“十一五”国家重点图书出版规划项目·科技史文库
中国天文学史大系

中国古代历法

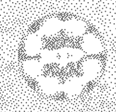
张培瑜 陈美东 薄树人 胡铁珠 著

中国科学技术出版社
·北 京·

中国天文学史大系

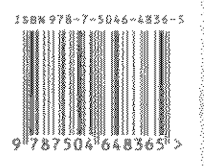
中国古代历法

张培瑜　陈美东　薄树人　胡铁珠　著



中国科学技术出版社

中国古代



定价：118.00元

图书在版编目(CIP)数据

中国古代历法/张培瑜等著. 一北京：中国科学技术出版社，2008.3
(中国天文学史大系)
ISBN 978-7-5046-4836-5

Ⅰ.中… Ⅱ.张… Ⅲ.历法-研究-中国古代 Ⅳ.P194.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 182666 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081
电话：010－62103210　传真：010－62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印刷
*
开本：787 毫米×960 毫米　1/16　印张：46.75　字数：855 千字
2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷
印数：1－2000 册　定价：118.00 元
ISBN 978-7-5046-4836-5/P・106

《中国天文学史大系》编委会

策划编辑　吕建华　许　英

责任编辑　吕建华　佘　君

封面设计　赵　鑫

责任校对　刘红岩　孟华英

责任印制　王沛



总　　序

中国古代天文学建树非凡，遗泽久长，是我们民族的骄傲。我一直怀着崇敬的心情向往着这份文化珍宝。只是数十年漫漫学海中有许多错过的机缘，以致今天仍还像是一个鹄立在圣殿门前的朝圣者，终未能进入门庭。尽管如此，我仍然感受到很大的喜悦、有幸在新中国成立初期百废待兴之际，见证了在竺可桢先生的倡导下，中国古代天文研究跨出了前所未有的聚集人才、系统"攻关"的一步。从那时起，经两代人的努力，资料齐集，成绩斐然。如今又促成了这一由中国科学院自然科学史研究所牵头，组织全国各单位的天文学史研究者齐力完成的学术壮举——一部上起夏商，下逮近代，罗列我国古天文学万象的六百万言鸿篇巨制！

纯粹用现代科学的眼光审视古代天文学，首先，它是一门旨在认识天文世界——发现天文现象、探究天文规律的自然科学。这和今日的学科定位并无不同。其次，它是一门"观测的科学"，今日也仍然如此。如果把天文观测工具的"古"的界限设在天文望远镜应用之前，那么古代天文学眼界中所有的天体不超过 7000 个，这使得天文实测研究的对象限于几个太阳系天体的表象及其运行轨迹，星空的监测以及几千个恒星的定位和陈列。这些，中国和其他古代文明的情况基本上一致，可以认为是历史的必然。



与之相应的天文理性认知的探求，这样规模的"天"，相对于地上的万物和人间的万众，虽然仍然是伟大、永恒，但也显得比较简单、稳定，导致了我国古代"天覆地载，人居于中"、天地人"三才"协调的宇宙观。这在一方面形成了宇宙结构、天体演化、天人感应的种种学说，成为我国古代哲学思想的一个组成部分；另一方面，把天文实测结果的解释引向到"天文"与"地理"的相关性、"天道"与"人事"的相关性的探求。前者把"天"联到了"地"，导致了在"时政"、"编历"这些"国之大政"上的应用；后者把"天"联到了"人"，应用到了当时同样属于"国之大政"的"星占"。这

些"应用天文学"备受尊崇，历代政权为之设立专职，在设备投资、人员培训上享有优遇，结果在历史长卷中成为我国古代天文学发展的主线索：保持了天象监测的长期持续性、主导了一代代天文仪器、实测方法的研究和发展以及一代代历算方法（和有关数学）的研究和发展。由此形成的堪称完整的体系，加上求实、求精的敬业传统，为我们留下了大量宝贵的历史资料和学术资料（其中也包括了与之相互影响的历代官方与非官方的天文著述，也包括了频繁出现的天文文物）。这种由长期皇权统治产生的古代版的"任务带动学科"的发展模式，历史功过暂且不去评论，但这份"资料宝库"对于今日中国天文学史工作者来说则是巨大的学术资源，当然同时也是巨大的责任，要很好地发掘和整理。

继 20 世纪 70 年代后期天文史料的一次大规模整理，中国天文学史工作者"自 1979 年起开始思索：是否有可能编著一部与中国天文学的悠久历史和广阔的内涵相适应的中国天文学史著作？商议的结果便是《中国天文学史大系》构想的诞生"（薄树人先生语）。

天文学是我国古代最发达的自然科学之一，在华夏科学、文化史中是一个具有连贯性的组成部分。在《中国天文学史大系》（以下简称《大系》）的全套书结构中，《中国古代历法》、《中国古代天体测量学及天文仪器》、《中国古代星占学》、《中国古代天象记录的研究与应用》、《中国古代天文学思想》、《中国古代天文机构与天文教育》、《中国古代天文学家》各立一卷，以概全面。完成这样的一部《大系》，可谓是从一个重要的侧面来认识华夏文化的源与流。

近世 100 多年，华夏文化受西方文化的冲撞，激湍跌宕，对传统文化的理解和传承出现前所未有的震动，至今波澜未已。其间在天文学上体现为结束古代传统、"转轨"西化、进入近现代的航道。《大系》中所设的《中国古代天文学的转轨与近代天文学》一卷，阐述了这一时期的历史。

全套书中用《中国少数民族天文学史》一卷介绍了对同属华夏文化的发掘和整理，是一项开辟性的探索。另一卷《中国古代天文学词典》篇幅达 47 万字，对天文典籍阅读者是十分有用的工具，也是好伴侣。《大系》共 10 卷，每卷 40 万到 80 万字。格局齐整，足以副"大系"之称。这是当年我国一代中青年天文学史工作者"聚水成渠"的宏愿。回溯"五

四”运动大潮中，我国现代天文学的先驱者们在率先“西化”的同时就着力启动了我古代天文学遗产的自力发掘和整理。60年过后我们喜见《大系》的构思(1979)，然后是构思落实为计划(1990)、诞生了文稿(1999)，现在文稿得以付梓(2007)完成了“多年修就的善果”(陈美东先生语)。

《大系》从构思到面世历时四分之一世纪。多位学者为之贡献了属于一生中最好的年华。他们如今青丝成雪，有几位且已过早地离开了我们。编委会主任薄树人先生从一开始就为《大系》的筹、编、写呕心沥血，奋斗到了最后一息(1997)。继后陈美东先生以令人钦佩的执着挑起担子，完了大家的宏愿。而他们二位在本书跋记中所透露的甘辛，或亦足以在相应历史中着上耐人寻思的一笔！

王绶琯

2007年7月于北京



前 言

历法是研究日月五星运行,推算各种计时单位长度,建立其间关系,制订时间序列法则的科学。

中国以农业立国,农时与季节有密切关系。因此授时颁历一直是历代君主的要务。《史记》说,"王者易姓受命,必慎始初,改正朔易服色,推本天元,顺承厥意。"颁历于是也成为君权统治的象征。臣民奉谁的正朔就表示接受谁的统治。因此,"自殷周皆创业改制",到清末3000多年,中国历法数十改,制历逾百家,是世界上历法科学最发达的国家。颁行的历法中,除太平天国天历外,全是阴阳合历。辛亥革命后,中国改行格里历(公历、阳历)。但至今我国颁行的历书中仍附载阴阳历月日(又称农历、夏历)。

阴阳历的平均年长称"岁",是反映寒暑变化的回归年。月长由月相盈亏圆缺周期决定,即朔望月。以太阳周日视运动形成的昼夜为日。历法三要素的年月日全是依据日(太阳)月(太阴)天象得出,这是阴阳合历的基本性质。

由甲骨卜辞可知,殷商武丁时期的历法已是月有大小年有平闰(12个月或13个月)的阴阳合历。到清末,阴阳历一直是中历的主要形式。但与其他阴阳历不同,中历还有两个显著的特点。

二十四节气是中国的独创,这是中历的第一个特点。它是在四时八节基础上发展起来的。殷周之交已分四时,春秋时代已有分至启闭八节。到战国晚期就形成了完整的二十四节气体系。二十四节气是中历确定月名月序和设置闰月的凭藉,也是农事活动的主要依据。节气由太阳位置决定,反映太阳的视运动。在历书中有着固定的月份和日期范围,使中历具有较强的阳历性质。

中历一直配合采用干支来纪时(年月日时),这是中历的第二个特点。殷墟卜辞显示,3000多年前古人已熟练地用干支纪日。西汉末至今,一直用干支来纪年。春秋战国时期已采用十二辰纪月,而十二辰加



时制度至迟西汉时已被采用。2000年来中国干支纪时与历法数序纪时既互相配合又各自成系统。实际上中历干支纪时系统是中国特有的阳历历法体系。可称之为干支历、节气历或中国阳历。它以立春为岁首，交节日为月首。年长即回归年，一节一中为一月。在节气历中年月日全由太阳视运动决定而与太阴月相无关。但它又与通常的阳历不同，后者月长是由人为规定而与天象无涉。所以它是有中国特色的阳历。唐以后，五代历书月名开始注以干支，北宋时又将十干十二辰配合以纪时，至此年月日时分别全以干支注记，节气历日趋完整。它实际上是“十二气历”和“天历”的滥觞。可惜的是，在古代干支历日多与历法纪时配合，只在历书中注记或民间用于象数、选择和命理学中，它在历法上的作用一直未能得到很好的认识。

殷商、西周以前的远古时期，历法属于观象授时阶段。主要通过昏旦观测某些标准星象（鸟火昴虚参斗等）的伏见南中和月相来颁告四时、朏望和农时季节，西周以后进入推步制历时期。早期推步历法颁历就是颁朔。以计算四时八节朔闰历日为目的。西汉末年开始，推步内容有了发展。由单纯的历日制度扩大到了日月五星运行的天体历。自此以后，中国历法并不限于推算日历。它包括了中朔、发敛、日躔、月离、晷漏、日月食和五星运动等七方面的计算内容。

随着天文、数学的进步发展，中国古历计算方法的历史进程可分作如下四个阶段。

（1）古代，先秦两汉至南北朝，这一段历法，主要以平运动计算中朔和日月五星的位置（后期加进月行改正）。

（2）中世纪，隋唐五代宋元明时期历法，把日月五星视作变速运动。计算采用二次、三次内插，相减、相乘等算法。

（3）清初时宪历，采用第谷改进的地心体系，以本轮均轮、几何学和球面三角方法来计算天体的距离和速度变化。

（4）清代中、后期的历书，依据地心椭圆运动体系，开普勒第一、第二定律计算。

在中国古代上百部历法中约有半数文献中保存有比较完整的记载。在“二十四史”中十五史有“历志”，记载斯时的历术和法数。但因历理深



奥、术语难懂，一般读者都视作天书望而却步。但也有不少读者对历法情有独钟。他们希望历法书不仅介绍历法的发展进步，通过它还能了解一些历术的具体推步方法和计算程序。

颁历的主要目的是授时，用来指导农业生产和安排各项社会活动，重在推步和实用。所以本书侧重于历术的复原，并以多种形式介绍具体推步方法。但历经术文刊本多有错讹衍夺。复原历术算法、数据，往往困难重重。我们的工作是在前人基础上，又参考借鉴时贤的大量成果论著。尽管如此，有的历术的重建，还是只能采用参酌原文，依据天文概念反推的办法来进行。复原的历术是否正确，我们尽量查找文献中推步验历的实例来复算校核，以便确认。

在介绍各历推步方法时，我们尽量多举实例。这样，既利于深入领会历术推步原理、熟悉具体计算方法、公式、程序，又可方便读者自己计算校核、举一反三。在算例中本书还给出与前代历法及现代计算结果的比较，有助于了解历法的发展情况和古历推步所达到的精度。

本书还特别注意阐述历法各术推步的天文意义。让读者不仅会算而且明白为什么要这样算。例如昏旦中星和恒星时的关系，就没有简单介绍今天计算恒星时的公式，而侧重从历理方面解释它与太阳、春分点位置的关系。

为了分析日躔月离表的盈缩朓朒及定朔的太阳月亮改正的正负号关系，并为说明中历定朔改正的精度，书中介绍了定朔计算的方法、公式，中历推步忽略了哪些项及会产生的影响。

宣明历引入气时刻三差，与天文学的视差，历术的高下差、南北差、东西差之间关系如何，视差对日食计算的影响和作用，等等。本书对此都作了一些定量的分析考查。为了讨论各历推求日度月度（日月位置）的精确情况，本书还介绍了计算太阳月亮位置和定气的简单方法和公式。

历法疏密，验在交食。中历特别重视日月食的计算。后者也促进了历法的发展。很多读者也对日月食推步感兴趣。从初期交食周期预报，到日月运动改正、据食限去交远近计算交食有无与食分大小、视差对交食的影响作用，直到授时、大统。本书对历代日月食计算方法作了比较

系统的介绍。

本书是几位作者多年从事历法研究的心得和成果。作者撰著此书的初衷是侧重介绍历术推步及阐明计算的天文意义，希望读者通过此书能基本了解历法和历术的推步。

在17世纪中西文化大交融的过程中，由于接受了西方天文学思想和天体运动模型，又引进了几何学和球面三角等新的数学方法，中国的历法计算有了长足进步。清时宪历的推算及甲子元癸卯元的变革，正好反映了这一时期历法的重大发展变化。由于篇幅和研究涉猎的原因，本书未能包含"中西合璧时宪历"的内容，对上述历法推步发展的第三、第四阶段的介绍，书中只得付诸阙如。历法推步根据不同需要形成各类历书。御殿颁历乃国家盛典。原拟"中国的历书和历注"一章介绍历代各类历书，步发敛术，历注的内容、发展、演变以及推算方法，也由于同样原因未能纳入本书之中。这些都是本书的不足和缺憾。

本书由张培瑜、陈美东、胡铁珠、薄树人四人分别执笔。陈美东撰写第一、二章，薄树人撰写第四章，胡铁珠撰写第八章，张培瑜撰写第三、五、六、七、九、十章。

张培瑜

2007年5月





目　录







第一章 历表及表格计算法

中国古代历法有悠久的历史，走过十分漫长的发展道路。它包含十分丰富的天文学内涵，是中国古代天文学的重要组成部分，甚至可以说是中国古代天文学的精髓所在。除了年、月、日等的历日安排外，中国古代历法涵盖对日、月、五星运动的研究，具体而言，有朔、晦、弦、望、节气、卦候、闰月的计算，每日昼夜漏刻长度、昏长和昏旦中星的推算，日月交食的预报，日、月、五星在恒星间位置的推求，等等。这差不多相当于近现代天文年历所包括的内容。为了解决这众多的天文学课题，中国古代天文学者经过世代不懈的努力，从天文实践中不断发现新的天文现象，提出新的天文概念，并日益充实和完善。这主要表现在一系列天文数据和天文表格（历表）的测算、相应的数学方法的创用以及有关具体推算方法的建立，从而十分有效地解决了所设定的天文学课题。这些正是本书所要讨论的问题。

本章第一节简要地勾绘了中国古代历法的发展状况，以后各节具体介绍历法中各种历表及表格计算法。

中国古代历法拥有众多的历表，备载各种天文量的变化情况，是历家对这些天文量变化规律做定量描述的重要形式。这些历表的描述方式可以分为两大类：其一是以文字描述的方式，叙述某天文量在特定的基准点之间的变化情况；其二是以表格的方式，纵横向栏交错处列出某天文量在特定基准点的状况。此中第一种类型先见，第二种类型后出，两种类型长期共存，但以第二种类型为主要的方式。欲求与两个特定基准点之间某一时刻（或度值）相应的天文量，历家则用一次差、二次差或三次差内插法求算之，这便是所谓表格计算法。以下大抵以这些历表出现年代的先后为序，对之做简要的介绍。

第一节 中国古代历法发展概况

我们的祖先生息在中国辽阔的土地上，在生产和生活实践中，逐渐发现日月星辰的升落隐现，自然界寒来暑往，猎物的出没和植物的荣谢等自然现象，与人类的生存有着重要的关系。所以，有意识地观察和认识这些自然现象，以期顺乎自然，求得自身的发展，便成为先民们感兴趣的问题，于是天文学的萌芽便油然而生。

古人日出而作，日没而息，就是以太阳的出入作为作息时间的客观依据。太阳

出入造成的明暗交替的规律，必定给先民以极深的感受，于是以太阳出入为周期的"日"，应是他们最早认识的时间单位。自然，月亮的圆缺变化，是又一明显和意义重大的天象。说它意义重大，是因为月亮的亮光对于人们的夜间活动的安排是关键的要素。人们逐渐发现月亮的圆缺周期约为 30 日，这便导致一个较长的时间单位"月"的产生。对于更长一些的时间单位"年"的认识，要较"日"、"月"困难得多，但它是对于人们的生产和生活意义更为重大的一种周期，因为寒暑、雨旱，以及渔猎、采集乃至农业生产活动无不与它有关。所以，人们对它进行了长期的探索。由物候——草木枯荣、动物迁徙和出入等的观察入手，也许是探索一年长度的最早方法，随后才是对某些星象的观测，这便是所谓观象授时的方法。

传说在颛顼帝时代，已设立"火正"专司大火星（心宿二、天蝎座 α 星）的观测，以黄昏时分大火星正好从东方地平线上升起时，作为一年的开始，亦即这一年春天的来临。这大约是公元前 2400 年发生的事，是为观象授时的初期形态。

据《尚书・尧典》记载，在传说中的尧帝时，乃命羲、和兄弟分别观测鸟、火、虚、昴四颗恒星在黄昏时正处于南中天的日子，来定出春分、夏至、秋分和冬至，以作为划分一年四季的标准。而且还采用了"期三百有六旬有六日，以闰月定四时成岁"的方法。这是中国古代应用阴阳历的初始历法的最早记载。据研究，与此四仲中星相符合的年代应在公元前 2000 年左右。

由甲骨文的有关卜辞，我们可以知道殷商时期（约前 1300—前 1046）行用的历法乃是阴阳历。这时的年有平年、闰年之分，平年 12 个月、闰年 13 个月。一年的长度大约已用圭表测量确定。又以新月作为一月的开始，月有大月和小月，大月 30 日、小月 29 日，并偶有连大月的出现。说明这时人们已得知朔望月长度应略大于 29.5 日。这时的岁首已基本固定，季节和月名有了基本固定的关系。应该说，此时的阴阳历已经初具规模，但从甲骨文中还偶有 14 月甚至 15 月的记载等情况看，说明闰月的设置还需由经常性的观测来修订，带有较大的随机性，这是此时仍不脱观象授时形态影响的表现。

西周仍应用阴阳历。周天子有所谓"颁朔"的制度，即每年都要预先向各诸侯国颁布来年朔闰的安排，以及相应的政令。这说明西周时已将朔作为一月的开始，这是人们对有关天文数据认识能力的提高与自信的表现，是向规整化历法迈出的重要一步。而自西周到春秋时期历法发展的其他状况，则是个尚待研究的课题。

春秋末，孔丘在杞国夏人故地访得《夏小正》，这是一个分一年为 12 个月，每个月列有物候、天象、气象、农事等内容的作品，它集物候历、观象授时法和初始历法于一身。当然，我们不能认为这就是夏代行用的历日制度，但是，它反映了大约源于夏代的一种历法传统，或者历法思想，即把一年月份的划分与特定的天象等相对



应，以黄昏时若干恒星的见、伏或南中天的时日，以及北斗斗柄的指向等，作为一年中某一个月份起始的标志。这应是一种不考虑月相变化的阳历系统。大约在战国时期兴起的月令，则是《夏小正》历法系统的直接继承者，它是阴阳家的历法主张与治国方略的结合体。

春秋战国时期，阴阳历仍是历法的主流。到春秋、战国之交，一种取回归年长度为 $365\frac{1}{4}$ 日，并采用19年7闰为闰周（由此可知朔望月长度为 $29\frac{449}{940}$ 日）的历法悄然而生，这是一种关于历月安排的十分规整的、完全定量化的历法系统，可称为古四分历。从战国到西汉早期，该历法系统不断得到充实与发展，吸取阴阳家、星占家等的研究成果，把关于二十四节气、12个月太阳所在宿次和昏旦中星，以及关于交食和五星位置的初始推算等作为历法研究的内容，奠定了中国古代历法的基础。

西汉武帝时，由邓平、落下闳等人制定了太初历（前104），该历法经由西汉末刘歆改造而成三统历（前7），是为我国现存第一部完整的历法。太初历（三统历）明确采用以不包含中气的月份定为闰月的方法；引进了交食周期和交点年长度的概念和具体数据；建立了以上元为历元，并以此作为推算气、朔时刻及五星位置等的共同起算点的具体方法；定出了新的五星会合周期，和五星在一个会合周期内的动态表，以及在此基础上预推五星位置的方法；引用了二十四节气太阳所在宿度表和二十八宿赤道宿度表等。这些使中国古代历法的基本形式更加明朗，其走向已不容逆转。

东汉编䜣、李梵等人编成的东汉四分历，于汉章帝元和二年（85）颁行，在其后约百年间，该历法不断得到改进。我们现今在《续汉书·律历志》中所见的东汉四分历实际上是这一个时代的产物。该历法纠正了太初历（三统历）回归年和朔望月长度均偏大的弊病，使之恢复到古四分历的水平。同时纠正了冬至点位于牵牛初度的错误，给出了新测值，对于交食周期也做了新的探索。该历法还给出了二十四节气黄道去极度（即太阳视赤纬）、晷影长度、昼夜漏刻长度和昏旦中星的天文表格、二十八宿黄道宿度表格，及其相应的计算任一时日这些天文量的方法。从而又充实了中国古代历法的内涵。

东汉末刘洪的乾象历（206），又增加了一批新概念和新方法，如近距历元法的采用，月亮运动不均匀性改正数值表（月离表）和白道离黄道内外数值表（月行阴阳表，亦即月亮极黄纬表）的创立，黄赤道度差表的引进，回归年、朔望月、恒星月、交食周期和交点年长度新值的测定，黄白交点退行和食限概念及数据的确立，月亮近地点进动值和近点月长度的测定，具体计算任一时刻月亮距黄白交点的度距和太阳所在位置方法的建立（这实际上已经解决了交食食分大小和交食亏起方位等的计算问题），等等。至此可以说中国古代历法的气、朔、闰、晷、漏、交食、五星和恒星位置等广泛论题的计算业已齐备，而且有若干天文数据和表格的精确度已达到相

当高的水准，说明中国古代的历法体系已经成熟。

魏晋南北朝时期，中国古代历法继续得到充实。这主要表现在，曹魏杨伟景初历(237)关于交食食分大小和亏起方位计算方法的明确提出，以及多历元法的采用，该法为刘宋何承天元嘉历(443)、北魏张龙祥正光历(518)和李业兴兴和历(540)所发展或继承；后秦姜岌(约384)测算太阳所在宿度的月食冲法的发明；北凉赵敺玄始历(412)对于闰周的改革；刘宋祖冲之将虞喜约于330年发现的岁差现象引人他的大明历(463)之中，建立了与回归年不同的恒星年概念和数值，有助于提高日、月、五星在恒星间位置推算的精度。祖冲之还发明了多测点冬至时刻测算法，对于冬至时刻测定精度的提高有重大意义，大明历回归年长度值精度的大幅度提高，正是应用该法的直接结果，同时也为闰周的进一步改革提供了基础。大明历还最先明确给出了交点月长度值。此外，上元历元法经由祖冲之的阐述与肯定，对后世历法产生了很大的影响；北魏张龙祥正光历最先将72候引进历法之中，亦值得一提。此间，又有若干天文数据和表格的精确度达到很高的水平，也是历法继续得到充实的表征。

北齐张子信经二十余年的精心观测与潜心研究，在570年前后获得的三大发现——太阳、五星运动不均匀性，以及月亮视差对日食的影响，是历法史上划时代的事件。自此，中国古代历法在各历法课题的计算法和数学方法的应用上都发生了巨大的变革，开启了一个崭新的时代。

隋代刘焯和张胄玄将张子信的发现卓有成效地引人各自的历法——皇极历(604)和大业历(607)之中。于是有太阳和五星运动不均匀性改正表(日躔表与五星人气加减表)的出现，以及与之相应的同时考虑日、月运动不均匀性影响的定朔法，和先求五星平见，次推五星常见(加上太阳运动不均匀的改正)，再算五星定见(又加上五星运动不均匀的改正)方法的产生；有考虑五星运动不均匀现象的新型五星动态表的编订；有日应食而不食和日不应食而食表的制定，交食食分大小改正法以及从定朔时刻到食甚时刻改正法的提出；月食食限的不偏食限，必偏食限，不全食限，必全食限概念与数值的确定，等等。皇极历还有交食初亏、复圆时刻的计算，黄白道度差算法等的创新，而大业历则有太阳出人时刻表以及相当精确的五星会合周期值的测定，等等。

还要指出的是，皇极历对于五星动态、昼夜漏刻、黄赤道度差和交食有关问题的计算，创用了等差级数法(大业历也采用此法于有关论题的计算)，在应用日躔、月离和月亮极黄纬表时更创用了等间距二次差内插法。而在此之前，历法的有关计算均仅限于采用一次内插法，即把有关天文量在特定两个基准点之间的数量变化均视为线性的变化。等差级数法和二次差内插法的应用，则是将上述数量变化

视为二次曲线的变化。这不但在数学上较一次内插法先进，而且从天文与物理学的角度考察，它更贴近上述数量变化的客观状况，也就是说，它能更客观和准确地反映上述的数量变化。显然，等差级数法和二次差内插法的创用，是随着人们对有关天文量测算精度的提高，亦即对日、月、五星等运动规律认识的深化而提出的，它们是中国古代代数学天文学体系发展到崭新阶段的又一重要标志。

及至唐代，这种改革和创新的势头仍在继续，这首先反映在唐初定朔法的正式颁用。在取得重大进展的天文学面前，传统的采用平朔法的观念，势在必改，经由傅仁均戊寅历(619)和李淳风麟德历(665)的先后努力，定朔法遂成定式。麟德历还在取消闰周法和统一各天文数据的分母等方面首获成功。其次，一行大衍历(728)首创不等间距二次差内插法，用于日躔表和食差表的计算；对于五星运动位置的推算，从五星动态表到五星运动不均匀性改正表均做了重大变革，并提出了五星运动轨道面同黄道面之间有一定夹角，五星近日点进动的概念与具体数据；更为重要的是，大衍历建立了一套推求九服晷长、昼夜漏刻长度和食差的近似算法，这是力图打破前代历法相关数值的推算仅限于某一地点有效的局面，使历法适用于全国各地的重要尝试，从而大大扩展了历法的普适性。再次，徐昂宣明历(821)首创日食时差、气差、刻差和加差算法，规范了月亮视差对日食食分和日食食时影响的方法，也对后世历法产生很大影响。

自唐郭献之五纪历(762)开始，出现了将历表公式化的最初尝试。所谓历表公式化，是不再沿用传统的先给出历表，再应用一次或二次差内插法进行计算的方法，而是给出统一的公式，直接依公式进行有关计算的方法。五纪历是将日食食差表及其算法公式化了，虽然其设定的算式还仅仅是一次函数式。曹士𫇭符天历(约780)沿着这条思路取得了重大的进展，在计算太阳运动不均匀性改正值时，首创了二次函数算式。接着，边冈在崇玄历(892)中全力加以开拓，除对太阳运动不均匀性改正值的计算给出与符天历不同的二次函数算式外，还给出了计算黄赤道度差、月亮极黄纬、日食时差改正、交食初亏与复圆时刻等的二次函数公式，对于晷长的计算则首创了三次函数算式，对于太阳视赤纬和昼夜漏刻长度的推算更创用了四次函数算式，从而形成了以高次函数法替代历表及其表格计算法的坦荡之势。

从数学上看，高次函数法的应用无疑是一大进步，而且它具有形式简明、计算便捷以及保持较高精确度的特征。由于历表给出的是一组基准点的天文量(一般由实测取得)，不论表格计算法采用的是一次或二次差内插法，都不能改变历表所描述的天文量整体变化的折线(或曲线)存在诸多奇点的情况，即诸多基准点本身就成了奇点。从天文与物理学的角度看，这不能不说是一大缺憾。而高次函数法

的采用，是将天文量的整体变化用一个算式加以描述，这就克服了对于特定天文量的整体描述存在诸多奇点的弊病，使对日、月、五星运动等的描述更富数理意义。所以，历表公式化或者说高次函数法的采用，把中国古代代数学天文学体系推进到一个新的高度。

宋元时期，中国古代历法发展的最主要特征是精确化，一系列天文数据和表格的总体精度均达到了高峰，高次函数法得到更普遍的应用，而且算式的精度也有所提高。宋行古崇天历(1024)还首创了黄白和赤白度差的公式计算法。周琮明天历(1064)则是历代历法中公式化程度最高者，包括日、月、五星中心差，黄赤、黄白和赤白道度差、晷长、昼夜漏刻长度、太阳视赤纬值、交食时差、气差和刻差、交食初亏和复圆时刻等，均取二次至四次函数算法，其中对于晷长的计算，还创用了五次函数算式，是为中国古代历法中采用的最高次函数式。姚舜辅纪元历(1106)所创用的各类算式多具有形式更简明、精度又较高的特点。郭守敬、王恂等人的授时历(1281)，更把三次差内插法应用于日、月、五星运动诸课题的计算，该历法还采用了类似球面三角法的弧矢割圆术等，于黄赤、赤白道度差、太阳视赤纬与昼夜漏刻长度等的计算，同时也应用高次函数法于交食有关问题的计算，继承并发展了前代历算家的有关数学方法，集于授时历之中，真可谓异彩纷呈。

授时历的另一项重要改革，是采用实测历元法，即由实测得到某年冬至时刻，以及各有关天文量与该冬至时刻的时距(或度距)，由此可得有关天文量的各不相同的起算点，从而由传统的上元历元法的弊病中解脱出来，这有助于提高有关历法问题计算的精确度。当然，这项改革是吸取了南宋杨忠辅统天历(1199)历元法的基本模式(该历元法实际上就是实测历元法，但却虚设了一个积年数不大的"上元")。这里还要顺便指出，唐傅仁均戊寅历曾一度采用实测历元法，但不敌上元法论者的攻击，不得不回复到上元法，而曹士蒍符天历采取的则是近距历元法。授时历终于成功地应用了实测历元法，实现了前代部分历家的历元理论。

在测量方法上，周琮、郭守敬等先后发展了刘宋祖冲之的冬至时刻测算法，为法加精加详。对于冬至时太阳所在宿度的测量，姚舜辅有金星借日出没法的新创，郭守敬又添加木星借日出没法，且有月离宿次法的发明。这些都为冬至时刻或冬至时太阳所在宿度和岁差值精度的提高创造了条件。

宋元时期是中国古代历法发展的高峰。但自明代开始，却出现了停滞不前以致倒退的现象。有明一代，一直沿用授时历，只是改名为大统历而已。其间偶有人提出改历的建议，但均因"祖制不可变"而被否定。天文官员墨守成规，久而久之，只能穷于应付日常历日的推算，以致屡屡发生误推日食等天象的事件。对于民间学者，统治者则采取禁习天文历法的愚蠢政策。朝野一潭死水，致使传统历法几成



绝学。不过，这一时期来自阿拉伯的回回历法受到重视，与大统历并行使用，可是回回历法也仅为少数天文官员所了解。明代晚期，虽有邢云路、朱载堉等人试图复兴传统历法，但却面临由东来传教的耶稣会士传入的天文历法的挑战，自此开始了中西历法论争与融汇的新时期。

明崇祯二至七年(1629—1634)，由徐光启等人主持，耶稣会士龙华民、邓玉函、汤若望等人参与编撰的《崇祯历书》，是较系统较全面介绍西方经典天文学的重大成果。该书保留了中国传统历法的某些形式特征，但却是以西法为基础，亦即是以西方几何学天文学体系为本质特征的历法。明代未及施行该历法而朝亡。清代始立，汤若望将《崇祯历书》改为《西洋新法历书》上献，随即得以颁行。清代虽有历家试图重振传统历法，但面临传统历法长期停滞的颓势和西方天文学长足进步的现实。大多数学者改而认真学习与研究传入的西方天文学知识，并潜心挖掘、整理传统历法的遗产。随着近现代天文学的兴起，中国古代历法相形见绌，但它作为古代科学的一朵奇葩而被载入史册，我们自然不会也不应忘记历家历代的贡献与功绩。

下面我们将转而介绍中国古代历法的历表及其表格计算法。关于中国古代历法诸多天文数据自粗及精的发展，中国古代历法理论的建立与阐发，本书不拟讨论，请读者分别参阅《中国天文学史大系》的《中国古代天体测量学及天文仪器》和《中国古代天文学思想》等卷。

第二节　五星动态表

一、西汉至北魏时期的五星动态表

关于五星在一个会合周期内视运动状况的完整记述首见于刘歆的三统历(前7)中，它大约也就是邓平、落下闳太初历(前104)关于五星动态的描述。以木星为例，其术文曰：

> 木，星始见，去日半次。顺，日行十一分度二，百二十一日。始留，二十五日而旋逆，日行七分度一，八十四日。复留，二十四日三分而旋。复顺，日行十一分度二，百一十一日有百八十二万八千三百六十二分而伏。凡见三百六十五日有百八十二万八千三百六十五分，除逆，定行星三十度百六十六万一千二百八十六分。凡见一岁，行一次而后伏。日行不盈十一(一为衍文)分度一。伏三十三日三百三十三万四千七百三十七分。行星三度百六十七万三千四百五十一分。一见，三百九十八日五百一十六万三千一百二分，行星三十三度三百三十三万四千七百三十七分。通其率，故曰日行千七

百二十八分度之百四十五。[1]

这是以文字描述的方式给出了木星在一个会合周期内的动态。它实际上又可示如表1—1。

表1—1 三统历(太初历)木星动态表

段名	每段日数(*A*)	每日行度(*B*)	每段行度(*A*×*B*)
晨始见后顺	121	$\frac{2}{11}$	[22]
始留	25	0	[0]
逆	84	$-\frac{1}{7}$	[−12]
复留	$24\frac{3}{7308711}$	0	[0]
复顺	$111\frac{1828362}{7308711}$	$\frac{2}{11}$	$\left[20\frac{1661286}{7308711}\right]$
伏	$33\frac{3334737}{7308711}$	不盈$\frac{1}{11}$,应为$\frac{1}{10.3613}$、不盈$\frac{1}{10}$	$3\frac{1673451}{7308711}$
一见	一会合日数(ΣA) $398\frac{5163102}{7308711}$	平均每日行度$\frac{145}{1728}$	一会合行度($\Sigma A\cdot B$) $33\frac{3334737}{7308711}$

表1—1中,[ ]内者在上引术文中虽并未列出,但其意当如此。由伏段$\frac{A\times B}{A}=\frac{1}{10.361293}$,可知"不盈十一分度一",应为"不盈十分度一"之误。欲求木星晨始见后第n日木星的行度(在恒星间自西向东运行的度值),可由上述历表依一次差内插法求得。设$n=300$日,由表1—1"每段日数"可知,其时当在"复留"以后$45\frac{7308708}{7308711}$日,而此段内木星每日行$\frac{2}{11}$度,前此,木星已行(22—12)度,故木星的行度应等于18.36$\left(=22-12+45\frac{7308708}{7308711}\times\frac{2}{11}\right)$度。三统历(太初历)关于土、火二星动态的描述方式与上引木星动态完全相同,它们均可称为6段分法。而对于金、水二星动态的描述方式则有所不同,以金星为例,其术文曰:

金,晨始见,去日半次。逆,日行二分度一,六日。始留,八日而旋。始顺,日行四十六分度三十三,四十六日。顺,疾,日行一度九十二分度十五,百八十四日而伏。凡见二百四十四日,除逆,定行星二百四十四度。伏,日

[1] 《汉书·律历志下》。



行一度九十二分度三十三有奇。伏八十三日，行星百一十三度四百三十六万五千二百二十分。凡晨见、伏三百二十七日，行星三百五十七度四百三十六万五千二百二十分。夕始见，去日半次。顺，日行一度九十二分度十五，百八十一日百七分日四十五。顺，迟，日行四十六分度三十三，四十六日。始留，七日百七分日六十二分而旋。逆，日行二分度一，六日而伏。凡见二百四十一日，除逆，定行星二百四十一度。伏，逆，日行八分度七有奇。伏十六日百二十九万五千三百五十二分，行星十四度三百六万九千八百六十八分。一凡夕见、伏，二百五十七日百二十九万五千三百五十二分，行星二百二十六度六百九十万七千四百六十九分。一复，五百八十四日百二十九万五千三百五十二分。行星亦如之，故曰日行一度。[1]

依此，实际上亦可示如表1—2。

表1—2　三统历(太初历)金星动态表

段名	每段日数(A)	每日行度(B)	每段行度($A\times B$)
晨始见后逆	6	$-\frac{1}{2}$	[−3]
始留	8	0	[0]
始顺	46	$\frac{33}{46}$	[33]
顺，疾	184($\sum$244)	$1\frac{15}{92}$	[214]($\sum$244)
伏	83	$1\frac{33}{92}$有奇，应为$1\frac{33.74}{92}$	$113\frac{4365220}{9977337}$
晨见、伏	327		$357\frac{4365220}{9977337}$
夕始见顺	$181\frac{45}{107}$	$1\frac{15}{92}$	[211]
顺，迟	46	$\frac{33}{46}$	[33]
始留	$7\frac{62}{107}$	0	[0]
逆	6($\sum$241)	$-\frac{1}{2}$	[−3]($\sum$241)
伏，逆	$16\frac{1295352}{9977337}$	$\left[-\frac{81.61}{92}\right]$	$-14\frac{3069868}{9977337}$
夕见、伏	$257\frac{1295352}{9977337}$		$226\frac{6907469}{9977337}$
一复	$584\frac{1295352}{9977337}$	1	$584\frac{1295352}{9977337}$

① 《汉书·律历志下》。

表1—2中,[ ]内者在上引术文中亦未列出,但其意当如此。三统历亦将水星动态分为如表1—2所示的10段。木、土、火三星动态表与金、水二星动态表的差异是前者在一会合周期内只有晨见,而后者则有晨见和夕见,这是因为前者为外行星,而后者为内行星所致。此外,后者将顺行分为两段,其速度分为两等,而前者仅取一等。至于欲求晨始见后第 n 日金星的行度,则也用一次差内插法求取。设 $n=400$ 日,由表1—2可知,其时应在"夕始见顺"以后73日,而此段金星的每日行度为 $1\frac{15}{92}$,前此,金星已行 $357\frac{4365220}{9977337}$ 度,故金星的行度应等于 $442.34\left(=357\frac{4365220}{9977337}+73\times1\frac{15}{92}\right)$ 度。

编䜣东汉四分历(85)的五星动态表亦取文字描述法,但其详细的程度已较三统历(太初历)有所提高。东汉四分历五星动态表均以"晨伏"作为起点,即把三统历(太初历)五星动态表中的"伏"均一分为二,辟为2段,以"伏"的中点作为起点。此外,对于木、火二星的顺行段亦分为2段,其运行速度也分为二等,称第二等为"微迟"等,即取10段分法。而对于土星顺行速度仍取一等,故为8段分法。而对于金星的顺行段更分为3段,其运行速度分为三等,称后二等为"疾"、"益疾"或"迟"、"益迟"。[①] 即东汉四分历的金星动态表实取14段分法,而对于水星顺行段的速度仍分二等,故其动态表取12段分法。这些改进自然较为接近五星视运动的实际情况。

东汉四分历的五星动态表描述法对后世历家产生了很大的影响,汉末刘洪乾象历(206)和曹魏杨伟景初历(237)、刘宋何承天元嘉历(443)的五星动态表均取东汉四分历的描述和分段法。而祖冲之大明历(463)、北魏张龙祥正光历(518)、李业兴兴和历(540)描述法亦与三统历相同,而分段法则取三统历(太初历)和东汉四分历五星动态表的中间形式。这些五星动态表的另一个共同点是每段内行星的行度都是相同的。当然,这些历法对于各段日数和每日行度的具体数据的取值则有所不同。

二、隋和唐初的五星动态表

到隋代刘焯皇极历(604)和张胄玄大业历(607)五星动态表虽仍取文字描述的方式,但在内涵上却发生了重大的变革。

如皇极历木星动态表的术文曰:

见,初日行万一千八百一十八分,日益迟七十分,百一十日行十

① 《续汉书·律历志下》。



八度、分四万七百三十八而留。二十八日乃逆，日退六千四百三十六分，八十七日退十二度、分二百四。又留二十八日。初日行四千一百八十八分，日益疾七十分，百一十日亦行十八度、分四万七百三十八而伏。[1]

这里虽然仍取三统历的6段分法，但对于顺行不再取匀速运动的描述法，而是以一日为单位，每一日的运行速度按等差级数递减（或递增）的描述法。这是刘焯五星动态表的一大特征，是对前代五星动态表的一大改进。在计算木星见后或留后第 n 日的行度时，皇极历则采取了等差级数求和的公式：

$$\text{木星见后第 } n \text{ 日的行度}=\frac{11818n-\dfrac{70[1+(n-1)](n-1)}{2}}{46644}=\frac{11853n-35n^2}{46644}$$

$$\text{木星留后第 } n \text{ 日的行度}=\frac{4188n+\dfrac{70[1+(n-1)](n-1)}{2}}{46644}=\frac{4153n-35n^2}{46644}$$

式中：$n\leqslant 110$，设 $n=110$ 代入上二式，均正得 $18\dfrac{40738}{46644}$，与上术文相等。

对于土星，刘焯皇极历仍沿用三统历的6段分法，并把每一段内土星的行度视为匀速运动，这大约是土星行度较小、行度的变化也较小的缘故，所以未做如木星那样的改革。

又如，刘焯皇极历关于火星动态表的术文曰：

见，初在冬至，则二百三十六日行百五十八度，以后日度随其日数增损各一；尽三十日，一日半（半应为衍文）损一；又八十六日，二日损一；复三十八日，同；又十五日，三日损一；复十二日，同；又三十九日，三日增一，又二十四日，二日增一；又五十八日，一日增一；复三十三日，同；又三十日，二日损一，还终至冬至，二百三十六日行百五十八度。其立春尽春分，夏至尽立夏（应为立秋）八日减一日；春分至立夏，减六日；立秋至秋分，减五度，各其初行日及度数。白露至寒露，初日行半度，四十日行二十度。以其残日及度，计充前数。皆差行，日益迟二十分，各尽其日度乃迟，初日行分二万二千六百六十九，日益迟一百一十分，六十一日行二十五度、分万五千四百九。初减度五者，于此初日加分三千八百二十三、篾十七，以迟日为母，尽其迟日行三十度，分同，而留十三日。[2]

这是关于火星晨见以后顺行至留的动态描述。刘焯将火星晨见后初日运行速度

[1] 《隋书·律历志下》。
[2] 《隋书·律历志下》。

的大小与晨见发生之时刻同冬至时刻之间时距的多少相联系，即认为火星晨见初日的运行速度随时日的不同（亦即黄经的不同）是各异的，其状况可示如表 1－3。

表 1－3　皇极历火星晨见在不同时日的速度表

日期	冬至初日	1 日	…	30 日	32 日	34 日	…	116 日	118 日	120 日
每日行度	$\frac{158}{236}$	$\frac{157}{235}$	…	$\frac{128}{206}$	$\frac{127}{205}$	$\frac{126}{204}$	…	$\frac{85}{163}$	$\frac{84}{162}$	$\frac{83}{161}$
日期	…	154 日	157 日	160 日	…	169 日	172 日	175 日	…	181 日
每日行度	…	$\frac{66}{144}$	$\frac{65}{143}$	$\frac{64}{142}$	…	$\frac{61}{139}$	$\frac{60}{138}$	$\frac{59}{137}$	…	$\frac{57}{135}$
日期	184 日	186 日	…	220 日	222 日	224 日	…	244 日	245 日	246 日
每日行度	$\frac{58}{136}$	$\frac{59}{137}$	…	$\frac{70}{148}$	$\frac{71}{149}$	$\frac{72}{150}$	…	$\frac{82}{160}$	$\frac{83}{161}$	$\frac{84}{162}$
日期	…	302 日	303 日	304 日	…	335 日	337 日	339 日	…	365 日
每日行度	…	$\frac{140}{218}$	$\frac{141}{219}$	$\frac{142}{220}$	…	$\frac{173}{251}$	$\frac{172}{250}$	$\frac{171}{249}$	…	$\frac{158}{236}$

上术文中“尽三十日，一日半损一”，若依之，则据上法推至 365 日时，火星行度为$\frac{168}{246}$度，不与上术文中“还终至冬至，二百三十六日行百五十八度”吻合，若删去“半”字，则相吻合，故知其“半”字为衍文。

这实际上是一份在一年（365 日）内火星晨见初日运动速度的表格。在此基础上，刘焯又对以下三个时段火星晨见初日运动的速度作出修正：

其一，立春到春分和夏至到立秋期间，内中某日求火星晨见运动速度时，需以该日与冬至的时距除以 8，所得减该日与冬至的时距，以此日作为初日并作为引数由上述 365 日表格查得该日火星晨见运动速度。

其二，春分到立夏时，欲求内中某日火星晨见运动速度，需以该日与冬至的时距减去 6 日，以此作为初日，并以之为引数由上述 365 日表格查得该日火星晨见运动速度。

其三，白露到寒露时，火星晨见初日运动速度均为半度。

在求得火星晨见初日运动速度后，火星的动态先是每日运动速度递减 20 分，及至其运动速度为 22669 分之后，每日运动速度则递减 110 分，这种状态持续 61



日，火星运行 $25\frac{15409}{46644}\left[=\dfrac{22669\times61-\dfrac{60\times61\times110}{2}}{46644}\right]$度。第 61 日火星的运行速度为 16069 分$=\frac{16069}{46644}$度$=0.34$ 度。此后，火星留而不行，计 13 日。如果火星晨见初日运动速度就小于 22669 分，火星运动速度即以每日 110 分递减，减至 16069 分后亦留而不行 13 日。当火星晨见在立秋到秋分时，火星的行度需先减去 5 度。而火星在此期间某日的初行度可以该日与冬至的时距为引数，由 365 日表格查得。其后亦先每日运动速度递减 20 分，但及至其运动速度为$26492\frac{17}{61}$分时，每日运动速度开始递减 110 分，这种状态亦持续 61 日，但火星运行 $30\frac{15409}{46644}$度（算法与上式相似）。

在留以后火星的动态，刘焯皇极历又有术文曰：

> 前减日分于二留，乃逆，日退分万二千五百二十六，六十三日退十六度、分四万二千八百三十四。又留十三日而行，初日万六千六十九，日益疾百一十分，六十一日行二十五度、分万五千四百九。立秋尽秋分，增行度五，加初日分同前。更疾，在冬至则二百一十三日行百三十五度；尽三十六日，一日损一；又二十日，二日损一；复二十四日，同；又五十四日，三日（日）（增）[损]一；又十二日，二日增一[半]；又四十二日，一日增一；又十四日，一日增一半；又十二日，[一日]增一；复四十五日，同；又一百六日，二日损一，亦终冬至二百一十三日，行百三十五度。前增行度五者，于此亦减五度，为疾日及数。其立夏尽夏至，亦日行半度，六十日行三十度。夏至尽立秋，亦初日行半度，四十日行二十度。其残亦计充如前。皆差行，日益疾二十分，备尽其日度而伏。①

这是说，在火星前留以后，火星开始逆行，每日退行 12526 分，63 日退行 $16\frac{42834}{46644}$ $\left(=63\times\frac{12526}{46644}\right)$度；此后又留 13 日；此后又开始顺行，初日速度为 16069 分，随后 61 日间，每日行度递增 110 分，共运行$25\frac{15409}{46644}\left[=\dfrac{16069\times61+\dfrac{61\times60\times110}{2}}{46644}\right]$度，此时火星每日运动速度应等于 22669 分；如果后留发生在立秋到秋分期间，后留之后顺行的初日速度应为$\left(16069+3823\frac{17}{61}\right)$分，随后 61 日间，每日行度亦递增 110

① 《隋书·律历志下》。

分，故共运行 $30\frac{15409}{46644}\left[=\dfrac{19892\frac{17}{61}\times 61+\frac{61\times 60\times 110}{2}}{46644}\right]$度，此时火星每日运动速度应等于 $26492\frac{17}{61}$分。

依上术文之意，刘焯又指出，后留之后火星运行速度从每日递增 110 分到每日递增 20 分的转折点当日的运行速度是随时日的不同（亦即黄经不同）而各异的，其状况可示如表 1—4。

表 1—4　皇极历火星后留之后运行速度从慢到快之日在不同时日的速度表

日期	冬至初日	1 日	…	36 日	38 日	40 日	…	56 日	58 日
每日行度	$\frac{135}{213}$	$\frac{134}{212}$	…	$\frac{99}{177}$	$\frac{98}{176}$	$\frac{97}{175}$	…	$\frac{89}{167}$	$\frac{88}{166}$
日期	…	80 日	83 日	86 日	…	134 日	136 日	138 日	…
每日行度	…	$\frac{77}{155}$	$\frac{76}{154}$	$\frac{75}{153}$	…	$\frac{59}{137}$	$\frac{60.5}{138.5}$	$\frac{62}{140}$	…
日期	146 日	147 日	…	188 日	189 日	190 日	…	202 日	203 日
每日行度	$\frac{68}{146}$	$\frac{69}{147}$	…	$\frac{110}{188}$	$\frac{111.5}{189.5}$	$\frac{113}{191}$	…	$\frac{131}{209}$	$\frac{132}{210}$
日期	…	214 日	215 日	…	259 日	262 日	264 日	…	365 日
每日行度	…	$\frac{143}{221}$	$\frac{144}{222}$	…	$\frac{188}{266}$	$\frac{187}{265}$	$\frac{186}{264}$	…	$\frac{135}{213}$

上术文需做如上所示的修订，才能得出此结果，否则 365 日时的火星行度必不与$\frac{135}{213}$度相吻合。

与上述一年内火星晨见初日运动速度的表格相似，这是一份在一年（365 日）内，火星后留后运动递增速度发生变化之日的火星运动速度表格。当火星后留初日在立秋到秋分期间，后留之后顺行速度由慢变快时，火星的行度需先减去 5 度。当后留之后 61 日，火星当日运动速度大于 22669 分$\left(\text{对于立秋到秋分之间，大于 }26492\frac{17}{61}\text{分}\right)$时，每日递增 110 分的日数则大于 61 日，增多的日数等于$\left[\text{当日运动速度}-22669\left(\text{或 }26492\frac{17}{61}\right)/110\right]$；小于 22669 分（对立秋到秋分之间，



小于 $22492\frac{17}{61}$)时,每日递增 110 分的日数则小于 61 日,减少的日数等于$\left[22669\left(\text{或 }26492\frac{17}{61}\right)-\text{当日运动速度}\right]/110$。而每日递增 20 分,则均在火星运动速度相同于当日运动速度之后起算。

如上所述,刘焯皇极历火星动态表虽然仍采用与东汉四分历相同的 10 段分法,但它又是随火星晨见东方的时日以及火星后留之后顺行速度由慢变快时日不同而变化的动态表。其变化是指从火星晨见到前留以及从火星后留到伏的时段内,火星运动速度每日递减(或递增)110 分和每日递减(或递增)20 分的日数各不相同。而火星前、后留的日数和逆行的日数及速度则是不变的。对于金星和水星动态表,刘焯皇极历也给出形式与此相类似的描述。

张胄玄大业历的五星动态表与刘焯皇极历取相同的形式,当然五星各时段的日数和速度各不相同。张胄玄和刘焯引进了北齐张子信关于行星运动不均匀性发现对火、金、水星动态表做如此繁杂的改动,这种思路对唐初历法产生了很大的影响。有人认为,这一思路的天文意义可以用行星运动的地球改正来解释[①],这是一种值得重视的见解。

唐初傅仁均戊寅历(607)的五星动态表的形式与皇极历、大业历相同,但五星各时段的日数和速度也有所修订。

唐代李淳风麟德历(665)五星动态表的形式亦继承皇极历、大业历,但又有所改进。如对于火星逆行的描述也依前留所处时日的不同给出不同的运行速度,其术曰:

> 前留,十三日。旋退,西行。入冬至初日,率六十三日退二十一度,乃四日益度一。小寒一日,率六十三日退二十六度,乃三日半损度一。立春三日,平,毕启蛰,率六十三日退十七度,乃二日益日、度各一。雨水八日,平,毕气尽,率六十七日退二十一度。入春分,每气损日、度各一。大暑初日,平,毕气尽,率五十八日退十二度。立秋初日,平,毕气尽,率五十七日退十一度,乃(二)[六]日益(日)一。寒露九日,平,毕气尽,率六十六日退二十度,乃二日损一。霜降六日,平,毕气尽,率六十三日退十七度,乃三日益一。立冬十(一)[二]日,平,毕气尽,率六十七日退二十一度,乃(二)[七]日[半]损一。入冬至,复初。[②]

依之可作表 1—5(上术文需作必要校正)。

① 刘金沂:《麟德历行星运动计算法》,《自然科学史研究》,1985 年,第 2 期。

② 《新唐书·历志二》。

表 1—5　麟德历火星前留后逆行在不同时日的速度表

日期	冬至初日	冬至后4日	冬至后8日	…	冬至后16日(小寒后1日)	小寒后4.5日	小寒后8日	…
每日行度	$\frac{21}{63}$	$\frac{22}{63}$	$\frac{23}{63}$	…	$\frac{26}{63}$	$\frac{25}{63}$	$\frac{24}{63}$	…
日期	小寒后33日(立春后3日)到雨水初日		雨水后2日	雨水后4日	雨水后6日	雨水后8日到雨水末日	春分	清明
每日行度	$\frac{17}{63}$		$\frac{18}{64}$	$\frac{19}{65}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{21}{67}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{19}{65}$
日期	谷雨	立夏	小满	芒种	夏至	小暑	大暑	立秋
每日行度	$\frac{18}{64}$	$\frac{17}{63}$	$\frac{16}{62}$	$\frac{15}{61}$	$\frac{14}{60}$	$\frac{13}{59}$	$\frac{12}{58}$	$\frac{11}{57}$
日期	处暑后6日	处暑后12日	…	处暑后54日(寒露后9日)至霜降初日		霜降后2日	霜降后4日	霜降后6日到立冬初日
每日行度	$\frac{12}{58}$	$\frac{13}{59}$	…	$\frac{20}{66}$		$\frac{19}{63}$	$\frac{18}{63}$	$\frac{17}{63}$
日期	立冬后3日	立冬后6日	立冬后9日	立冬后12日到小雪初日	小雪后7.5日	小雪后15日	小雪后22.5日	小雪后3日(冬至初日)
每日行度	$\frac{18}{64}$	$\frac{19}{65}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{21}{67}$	$\frac{21}{66}$	$\frac{21}{65}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{21}{63}$

李淳风麟德历又指出火星后留时日的长短亦与后留发生在一年内不同的时日有关：

后留：冬至初，留十三日，乃二日半益一。大寒初日，平，毕气尽，留二十五日，乃二日半损日一。雨水初日，留十三日，乃三日益一。清明初日，留二十三日，乃每日损一。清明十日，平，毕处暑，留十三日，乃二日损一。秋分十一日，无留。乃每日益一。霜降初日，留十九日，乃三日损一。立冬[三日，平]，毕大雪，留十三日。①

依之可作表1—6。

这些描述也都是继承刘焯、张胄玄的思路，对火星前留后逆行的状况和后留时日长短加进某种改正值，试图反映火星动态的真实情形。

① 《新唐书·历志二》。术文中[三日，平]，依《旧唐书·历志二》校改。



表 1—6　麟德历火星不同时日后留日数表

日期	冬至初日	冬至后2.5日	冬至后5日	…	冬至后30日(大寒初日)到立春初日	立春后2.5日	立春后5日	…	立春后30日(雨水初日)	雨水后3日
后留日数	13	14	15	…	25	24	23	…	13	14
日期	雨水后6日	…	雨水后30日(清明初日)	清明后1日	清明后2日	…	清明后10日到白露初日	白露后2日	白露后4日	…
后留日数	15	…	23	22	21	…	13	12	11	…
日期	白露后26日(秋分后11日)	秋分后12日	秋分后13日	…	秋分后30日(霜降初日)	霜降后3日	霜降后6日	…	霜降后18日(立冬后3日)到冬至初日	
后留日数	0	1	2	…	19	18	17	…	13	

在刘焯、张胄玄之前各历法的五星动态表，是在观测五星若干个会合周期的动态之后，给出的一个会合周期内固定的不同时段的平均运行状况，可称之为平均型的五星动态表。而自刘焯、张胄玄到李淳风，则对之做了重大的变革，除了对五星晨见的时日做入气加减的改正之外（见本章第九节），还把火、金、水三星平均型的动态表改造成变动型的动态表，即在一个会合周期内各时段的长短是不固定的。这一尝试应有助于对行星真实动态的描述，但却造成十分繁杂的状况。



三、唐大衍历及其后的五星动态表

唐一行大衍历（728）五星动态表在《旧唐书·历志三》和《新唐书·历志四下》中均有记载。有趣的是，后者仍取文字描述的形式，而前者则采取表格描述的形式，是为中国古代最早见的表格式五星动态表，两者的内涵完全一致。自大衍历以后除了徐承嗣的正元历外（该历仍用文字描述法，其内涵则与李淳风麟德历大同小异），所有历法均取表格方式给出五星动态表。

更为重要的是，一行开启了与刘焯、张胄玄至李淳风完全不同的构思，以解决五星运动不均匀性对五星动态的影响。现在我们先来讨论大衍历及其后各历法五星动态表表格横向栏的设置情况。

木星横向栏有 8、10、12、14 段四种分法。

大衍历为 8 段分法:“合后伏”、“前顺”、“前留”、“前退”、“后退”、“后留”、“后顺”、“合前伏”。郭献之五纪历(762)同此。

崇玄历为 10 段分法,它将大衍历的“前顺”与“后顺”各拆为两段:“前疾”和“前迟”,“后迟”和“后疾”。此外,又将大衍历的“合后伏”和“合前伏”分别改作“晨见”和“夕合”[①]。北宋应天、乾元和仪天三历同此。

钦天历为 12 段分法,它是在崇玄历分段法基础上,又将“前退”和“后退”各拆为两段:“退迟”与“退疾”,“退疾”与“退迟”[②]。

崇天历为 14 段分法,它将大衍历的“前顺”和“后顺”各拆为四段:“前疾初”、“前疾末”、“前迟初”、“前迟末”和“后迟初”、“后迟末”、“后疾初”、“后疾末”[③]。北宋观天历和纪元历,南宋统天历、开禧历和成天历,金重修大明历,元庚午历和授时历均同此。

明天历亦为 12 段分法,它将大衍历的“前顺”和“后顺”各拆为三段:“前二”、“前三”、“前四”和“后四”、“后三”、“后二”[④],南宋统元、乾道、淳熙、会元历均同此,只是将段名改作“晨疾”、“晨次疾”、“晨迟”和“夕迟”、“夕次疾”、“夕疾”[⑤]。

火星横向栏有 10、12、14、16、18 段五种分法。

大衍历为 10 段分法:“合后伏”、“前疾”、“前迟”、“前留”、“前退”、“后退”、“后留”、“后迟”、“后疾”、“合前伏”。崇玄历对于木星的 10 段分法即与此相当。

五纪历为 12 段分法,它将大衍历的“前疾”和“前迟”、“后迟”和“后疾”分别辟为三段:“前疾”、“前次疾”和“前迟”;“后迟”、“后次疾”和“后疾”[⑥]。明天历对于木星的 12 段分法即与此相当。唐末崇玄历,北宋应天历、乾元历、仪天历火星分段法均同此。

钦天历为 16 段分法,它将大衍历的“前疾”和“前迟”、“前退”和“后退”、“后迟”和“后疾”均各分为两段:“前二”、“前三”;“前四”、“前五”;“退迟”、“退疾”;“退疾”、“退迟”;“后五”、“后四”;“后三”、“后二”[⑦]。

崇天历为 18 段分法,它将大衍历的“前疾”和“前迟”、“后迟”和“后疾”均各分为三段:“前疾初”、“前疾末”、“前次疾初”;“前次疾末”、“前迟初”、“前迟末”;“后

① 《新唐书·历志六下》。
② 《新五代史·司天考一》。
③ 《宋史·律历志六》。
④ 《宋史·律历志八》。
⑤ 《宋史·律历志十六》。
⑥ 《新唐书·历志五》。
⑦ 《新五代史·司天考一》。

迟初"、"后迟末"、"后次疾初";"后次疾末"、"后疾初"、"后疾末"[1]。此后各历法除了明天历外,均同此。

明天历为14段分法,它与钦天历稍异处是保留了大衍历的"前退"和"后退"两段,不再各辟为两段。

土星横向栏的分法则有8、10、12段三种。

大衍历分为8段,其法同大衍历木星。五纪历亦与之相同。

崇玄历分为10段,其法同崇玄历木星。北宋应天历、乾道历、仪天历亦与之相同。

钦天历分为12段,其法同钦天历木星。

崇天历亦为12段分法,它是将大衍历"前顺"和"后顺"各辟为三段:"前疾"、"前次疾"、"前迟"和"后迟"、"后次疾"、"后疾"[2]。此后各历法无一例外均取此法。

金星横向栏有14、18、20段三种分法。

大衍历取14段分法:"晨合后伏"、"夕疾行"、"夕平行"、"夕迟行"、"夕留"、"夕退"、"夕合前伏"、"夕合后伏"、"晨退"、"晨留"、"晨迟行"、"晨平行"、"晨疾行"、"晨合前伏"。五纪、崇玄、应天、乾元、仪天诸历亦同此法。

钦天历取18段分法,它把大衍历的"夕疾行"、"夕平行"和"夕迟行","晨迟行"、"晨平行"和"晨疾行"分别辟为四段:"顺疾"、"次疾"、"次迟"和"顺迟","顺迟"、"次迟"、"次疾"和"顺疾";又把大衍历的"夕退"和"晨退"分别辟为两段:"退迟"、"退疾"和"退疾"、"退迟"[3]。

崇天历取20段分法,它把大衍历的"夕疾行"、"夕平行"和"夕迟行"、"晨迟行"、"晨平行"和"晨疾行"分别分为六段:"夕疾初"、"夕疾末"、"夕次疾初"、"夕次疾末"、"夕迟初"和"夕迟末","晨迟初"、"晨迟末"、"晨次疾初"、"晨次疾末"、"晨疾初"和"晨疾末"[4]。此后各历法亦无一例外均用此法。

水星横向栏有8、10、12段三种分法。

大衍历为12段分法:"晨合后伏"、"夕疾行"、"夕平行"、"夕迟行"、"夕留"、"夕合前伏"、"夕合后伏"、"晨留"、"晨迟行"、"晨平行"、"晨疾行"、"晨合前伏"。五纪历同此。

崇玄历为8段分法,它将大衍历"夕疾行"、"夕平行"和"夕迟行","晨迟行"、

---

① 《宋史·律历志六》。
② 《宋史·律历志六》。
③ 《新五代史·司天考一》。
④ 《宋史·律历志六》。

“晨平行”和“晨疾行”分别合而为一，称“夕顺”和“晨顺”[1]。明天历则同此法。

钦天历为10段分法，它是将崇玄历的“夕顺”和“晨顺”分别辟为两段：“顺疾”、“顺迟”和“顺迟”、“顺疾”。此后各历法除明天历外，均取此法，只是段名分别改为“夕疾”、“夕迟”和“晨迟”、“晨疾”[2]。

综上所述，大衍历木星和土星8段法、金星14段法和水星12段法都对五纪历产生了直接的影响。五纪历则创火星12段法。崇玄历则创木星和土星10段法及水星8段法。钦天历则创水星10段法，对后世历法(除明天历外)产生了深远的影响，其木星和土星12段法、火星16段法和金星18段法均将运行的速度分为两个档次，是为鲜明的特征。北宋初应天、乾道、仪天三历则采各家之法：金星14段法取用大衍历，火星12段法取自五纪历，木星和土星10段法取自崇玄历，而水星10段法取自钦天历。崇天历火星18段法(除明天历外)、土星12段法和金星20段法为后世各历法沿用不弃，其木星14段法亦为观天、纪元、统天、开禧、成天诸历及重修大明历、庚午历和授时历所采用，可见崇天历是对后世历法产生最大影响者。而明天历又创火星14段法和木星12段法，后者对统元、乾道、淳熙、会元四历产生了直接的影响。自明天历以后各历法并无新分段法出现，它们分别采用前已出现的有关分段法。

我们再来讨论大衍历及其后各历法五星动态表格纵向栏的设置状况：

大衍历五星动态表表格纵向栏均设有以下五栏：“变行日中率”——横向各段所经历的日数；“变行度中率”——横向各段内五星视运动的实际行度；“差行损益率”——横向各段内五星每日实行度的递增或递减值；“变行度常率”——横向各段内五星相对于五星近日点的平均行度；“变行乘数、变行除数”——计算横向各段内由五星平合时日求定合时日改正数时，该改正数需以“乘数乘之，除数除之”，才得到真正的改正数。

五纪历纵向栏仅保留大衍历的前三栏，名称与含义亦与大衍历相同。

崇玄历纵向栏有“常积日”、“常积度”和“加减”三栏，前两栏的含义与大衍历前两栏相同，而“加减”栏含义不明，待考。

钦天历纵向栏有“变日”、“变度”和“变历”三栏，前两栏的含义亦与大衍历前两栏相同，而“变历”与大衍历“变行度常率”的含义有同有异，即同为横向各段内五星相对于五星近日点的行度，但却不是平均行度。

应天、乾元、仪天三历纵向栏有“平日”(或“变日”、“常日”)、“平度”(或“变度”、“常度”)和“阴阳历分”(或“前后限分”、“上下限”)，其含义分别与钦天历三栏相同。

---

① 《新唐书·历志六下》。

② 《新五代史·司天考一》。



崇天历纵向栏有"变日"、"变度"、"限度"和"初行率"四栏，前三栏的含义分别与钦天历三栏相同，而"初行率"指横向各段初日五星的运动速度。自此以后诸历法纵向栏的设置均同此。只是"变日"又称"常日"、"段日"等，"变度"又称"常度"、"平度"等，"限度"又称"历度"，如此而已。

应该说纵横向栏设置的总体方法由大衍历开其端，一行扬弃了自隋刘焯、张胄玄以来试图对五星动态表本身进行改正，使动态表变动不定的总体构想，而保持了五星动态表的相对稳定性，将五星运动不均匀性的改正表达为对五星人各不同时段的时日的改正，不对五星动态表本身做调整变动。显然，后世绝大多数历家肯定了一行的思路与方法，这是因为一行的思路与方法要比刘焯、张胄玄等人的思路与方法来得简明与有效。一行的思路和方法经由后继者，特别是宋行占的总结与提高，遂成定型，对后世产生了决定性的影响。

一行等人的思路与方法是：其一，将五星的动态分成若干段（这本质上与三统历、皇极历并无不同，只是数量上有所增加）。其二，对于每一段内五星运行速度取等差级数递增或递减的描述法（这与皇极历是相同的）。大衍历所设各段"差行损益率"，崇天历所设各段"初行率"，即指此而言。本栏"初行率"与次栏"初行率"之差，除以本栏"变日"数，即得本栏五星运动速度递增或递减之值。其三，在计算五星位于动态表的那一段时，需加五星运动不均匀性的改正，大衍历表中"变行度常率"、崇天历表中"限度"等即为此改正值的计算而设，这一改正值的计算另有表格供使用（见本章第九节）。

徐昂宣明历的五星动态表亦属一行思路与方法的范畴，但其表述稍异，故在此另作专门的介绍。其五星动态表横向栏为阳初、阳二、……、阳十二、阴初、阴二、……、阴十二，计 24 栏（其中水星亦应有 24 栏，但现传本却全部脱漏）。而纵向栏五星各异：

木星和土星均为："前顺"、"前留"、"退行"、"后留"和"后顺"五栏（即五段分法）。

火星为："前疾"、"前迟"、"前留"、"退行"、"后留"、"后迟"和"后疾"七栏（即七段分法）。

金星为："夕疾"、"夕平"、"夕迟"、"夕留"、"夕退"、"退见晨行"、"晨迟"、"晨平"和"晨疾"九栏（即九段分法）。

水星为："夕疾"、"夕迟"、"夕留"、"晨留"、"晨迟"和"晨疾"六栏（即六段分法）。

上述各纵向栏中均分别载出所经日数和每日运行速度递增或递减的数值。

由此看来，徐昂宣明历五星动态表横、纵向栏交叉处所给的数值是与相应时日五星运动不均匀性改正有关的数值，其作用应与大衍历所给"变行度常率"相当，但它较大衍历所给者更为直观与详细。

第三节　二十八宿赤道和黄道宿度表

一、二十八宿赤道宿度表

中国古代对于二十八宿赤道宿度的测量至迟可以追溯到公元前 6 世纪初[①]。其明确地引入历法的记录首见于西汉三统历(太初历)中[②],它是以文字描述的形式给出的,其数值列入表 1－7。

表 1－7　三统等历二十八宿赤道宿度表

宿名 / 历名	角	亢	氐	房	心	尾	箕	斗	牛	女	虚	危	室	壁
三统	12	9	15	5	5	18	11	26 (26.25)	8	12	10	17	16	9
大衍	同上	同上	同上	同上	同上	同上	同上	26	同上	同上	同上	同上	同上	同上
纪元	同上	9.25	16.00	5.75	6.25	19.25	10.50	25.00	7.25	11.25	9.2572	15.50	17.00	8.75
授时	12.10	9.20	16.30	5.60	6.50	19.10	10.40	25.20	7.20	11.35	8.9575	15.40	17.10	8.60
宿名 / 历名	奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	井	鬼	柳	星	张	翼	轸
三统	16	12	14	11	16	2	9	33	4	15	7	18	18	17
大衍	同上	同上	同上	同上	17	1	10	同上	3	同上	同上	同上	同上	同上
纪元	16.50	同上	15.00	11.25	17.25	0.50	10.50	33.25	2.50	13.75	6.75	17.25	18.75	同上
授时	16.60	11.80	15.60	11.30	17.40	0.05	11.10	33.30	2.20	13.30	6.30	同上	同上	17.30

如表所示的二十八宿赤道度前后相继,组成一周天的二十八宿赤道宿度坐标系统。欲求日、月、五星的赤道宿度,可依历法规定的特定算法和特定的赤道宿度起算点(如斗 21 度、虚 7 度等),依次推过若干宿次及其距度值,而得日、月、五星值某宿次某度。

上述二十八宿赤道距度值为战国时期石申夫所测,该值长期为历家所采用,直至唐代一行才重新测用新值。在编䜣东汉四分历(85)亦载有二十八宿赤道距度



① 潘鼐:《中国恒星观测史》,学林出版社,1989 年,第 38 页。
② 《汉书·律历志下》。

表，其中斗、牛、女、虚、心、尾、箕北方七宿的总宿度为“九十八度四分一”①，它较三统历所载“北九十八度”多出 1/4 度，这 1/4 度应属于斗宿，即斗宿赤道距度应为 $26\frac{1}{4}$度。这应是石申夫当年测值的真实写照。此后在杨伟景初历(237)中亦载此表，其中斗宿赤道宿度为“二十六度”，“分四百五十五”②，即 $26\frac{455}{1843}$度，其余各宿赤道距度与三统历全同。这是杨伟依他所认定的周天总度(即一回归年长度数)，对斗宿赤道宿度做了些微调整。同理，在张龙祥正光历(518)所载这一表格中，斗宿赤道宿度为“二十六度”，“一千四百七十七分”③，即 $26\frac{1477}{6060}$；在李业兴兴和历(540)所载该表格中，斗宿赤道距度为“二十六度”，“分四千一百一十七”④，即 $26\frac{4117}{16860}$度。而刘焯皇极历(604)和张胄玄大业历(607)所载二十八宿赤道距度表与三统历所载全同⑤。李淳风麟德历(665)所载此表亦同，仅在斗宿“二十六度”下添“及分”两字⑥。其实他们都同样取用了杨伟当年的调整法，只是未明确注明而已。其他如刘洪乾象历(206)、何承天元嘉历(443)、祖冲之大明历(463)，虽未载有二十八宿赤道距度表，但他们沿用三统历(太初历)以来的成法是没有疑问的。

唐玄宗开元十二年(724)，僧一行对二十八宿赤道距度重加测定，得出新值，用于大衍历之中⑦，其数值亦引载于表 1—7 中。

一行此表也取文字描述之形式，他对描述的前后次序做了小的调整，即以斗宿为首，并把周天 365 度以外的小数置于虚宿之下。当然，这次测量最大的发现是“其毕、觜觿、参、舆鬼四宿度数，与古不同”⑧。一行的此新测值取代沿用了 11 个世纪的古测值，此举为后世历家欣然接受，其影响所及直至北宋姚舜辅之前的诸历家。王朴钦天历、王处讷应天历、吴昭素乾元历、史序仪天历、宋行古崇天历、周琮明天历、皇居卿观天历均载有与一行大衍历相同的二十八宿赤道距度表，只是各历对于虚宿度下分值均依本历法周天度分的大小做了小的调整。



直到北宋末姚舜辅在纪元历中才又给出新值⑨，其结果也引列于表 1—7 中。

---

① 《汉书·律历志下》。
② 《晋书·律历志下》。
③ 《魏书·律历志上》。
④ 《魏书·律历志下》。
⑤ 《隋书·律历志下》，《隋书·律历志中》。
⑥ 《旧唐书·历志二》。
⑦ 《新唐书·历志四上》。
⑧ 《新唐书·历志四上》。
⑨ 《宋史·律历志十二》。

该新测值与石申夫、一行所测比较，仅娄、轸、角三宿相同，其余都不一样。而且各宿距度值以少、半、太等描述之，即表面精度已在 1/4 度，较石申夫、一行仅以整度数描述要精确得多。此表亦取文字描述的方式，也以斗宿为二十八宿之首，它亦为南宋诸历所采用。在赵知微重修大明历（1180）和耶律楚材庚午历（1216）中，也赫然载有与之相同的文字，当然对于虚宿度下分值也依本历法周天度分的大小做了小的调整。

到郭守敬等人编制授时历（1281）又采用新测值[①]，其值亦引列于表 1—7 中。

此表仍取文字描述方式，但又改以角宿为二十八宿之首，其数值与石申夫、一行测值全然不同，而同姚舜辅测值相同者仅张、翼两宿。所列各值 100 分为 1 度，即表面精度已在 10 分（0.1 度）以内。

据研究，石申夫、一行、姚舜辅和郭守敬对二十八宿赤道距度测值的平均误差分别为 0°.47、0°.56、0°.16 和 0°.07[②]。虽然一行当年测值的平均误差还略大于石申夫当年的测值，但若继续沿用石申夫的测值于开元年间，其平均误差则达 0°.69，所以改用一行的新测值乃是一种进步的表现和明智的选择。至于姚舜辅测值的精度较前大幅度地提高，其意义重大自不待言，而郭守敬等人更是锦上添花，把二十八宿赤道距度的测量精度提到历史上的最高水平，这当是郭守敬创制崭新的测量仪器和认真观测结出的硕果。

二、二十八宿黄道宿度表

二十八宿黄道宿度表的测量工作，大约开始于“石氏星经”成立的年代，而明确且系统的记载则首见于《续汉书·律历志中》内。汉和帝永元十五年（103），太史用黄道铜仪测得二十八宿黄道距度值，该结果被东汉四分历所吸收，成为历法的一个组成部



分。它是以文字描述的方式表述的，从角宿开始，各宿依次首尾衔接，组成一周天的二十八宿黄道宿度坐标系统。其使用方法则与前述二十八宿赤道宿度表相同，供计算日、月、五星黄道宿度之用。

在后世的历法中，载有二十八宿黄道宿度表者，还有刘焯的皇极历、李淳风的麟德历、一行的大衍历、王处讷的应天历、吴昭素的乾元历、史序的仪天历、宋行古的崇天历、周琮的明天历、皇居卿的观天历、姚舜辅的纪元历、赵知微的重修大明历、耶律楚材的庚午历、郭守敬等人的授时历。现将各历二十八宿黄道宿度表的具体数值一并列于表 1—8 中，由于乾元、仪天和崇天三历二十八宿黄道宿度表中数值讹误较多，尚无由校核，故暂付之阙如。

---

① 《元史·历志一》。

② 潘鼐：《中国恒星观测史》，学林出版社，1989 年，第 18、139、175、272 页。



表 1—8　诸历二十八宿黄道宿度表

	东汉四分历	皇极历	麟德历	大衍历	应天历	明天历观天历	纪元历	重修大明历庚午历	授时历
角	13	13	13	13	13	13	12.75	12.75	12.87
亢	10	10	10	9.5	9.5	9.5	9.75	9.75	9.56
氐	16	16	16	15.75	15.25[4]	15.5	16.25	16.25	16.40
房	5	5	5	5	5	5	5.75	5.75	5.48
心	5	5	5	4.75	5	4.75[8]	6	6	6.27
尾	18	17	18	17	17.25	17	18.25	18.25	17.95
箕	10	10.5	10	10.25	10.25[5]	10	9.5	9.5	9.59
斗	24.25	$24\frac{12016}{64466}$[1]	$24\frac{328}{1340}$	23.5	23.5	23.5	23	23	23.47
牛	7	7	7	7.5	7.5	7.5	7	7	6.90
女	11	11.5	11	11.25	11.75	11.5	11	11	11.12
虚	10	10	10	$10\frac{779.75}{3040}$[3]	$10\frac{2563\frac{19}{24}}{10002}$	10.2564	9.2572	9.2568[9]	9.0075
危	16	17	16	17.75	17.25	17.75	16	16	15.95
室	18	17	18	17.25	16.75	17.25	18	18.25	18.32
壁	10	10	10	9.75	10.25[6]	9.75	9.5	9.5	9.34
奎	17	17	17	17.5	17.5	17.75	18	17.75	17.87
娄	12	13	13	12.5	12.75	12.75	12.75	12.75	12.36
胃	15	14	15	14.75	14.25	14.5	15.5	15.5	15.81
昴	12	11	11	11	11	10.75	11	11	11.08
毕	16	15.5	16	16.25	16.5	16	16.5	16.5	16.50
觜	3	2	2	1	1	1	0.5	0.5	0.05
参	8	9	9	9.25	9.25	9.25	9.75	9.75	10.28
井	30	30	30	30	30	30	30.5	30.5	31.03
鬼	4	4	4	2.75	2.75	2.75	2.5	2.5	2.11
柳	14	14.5	14	14.25	14.5	14.25	13.25	13.25	13.00
星	7	7	7	6.75	7	7	6.75	6.75	6.31
张	17	17	17	18.75	18.25	18.75	17.75	17.75	17.79
翼	19	19	19	19.25	19.25[7]	19.5	20	20	20.09
轸	18	18	18	18.75	18.75	18.75	18.5	18.5	18.75
文献出处	续汉书·律历志中	隋书·律历志下	新唐书·历志二[2]	新唐书·历志四上	宋史·律历志一	宋史·律历志七、十	宋史·律历志十二	金史·历志上；元史·历志五	元史·历志三

表 1—8 中所示各历法对二十八宿黄道宿度的描述，东汉四分历和授时历起于角宿，其余各历法均起于斗宿。此外表 1—8 中尚有九处需作说明：

①皇极历现传本斗宿仅记为 24 度，应补周天分的余分于下，即周分 12016，其分母称度法为 64466。

②《旧唐书·历志二》中亦有记载，但讹误较多，应据《新唐书·历志二》改正。

③大衍历现传本中在虚十后小字记“六虚之差十九太”，“六虚之差”的含义为虚分 760，再加上“十九太”，即虚分 779.75，其分母称通法为 3040。

④应天历现传本记为“氐十二度少”，前后诸历法氐均为 15 度左右，且现传本载“东方七宿七十五度少”，亦证氐应为 15 度左右，故应改为“氐十五度少”。

⑤应天历现传本载“东方七宿七十五度少”，但并东方七宿度仅得 75 度，故应改现存本所载“箕十度”为“箕十度少”。

⑥应天历现传本记“壁十度”，又记“北方七宿九十七度二千五百六十三、秒十九”，并北方七宿度较之少 1/4 度，故需改为“壁十度少”。

⑦应天历现传本记作“翌”，应为“翼”。

⑧明天历现传本记作“心四”，又载“东方七宿七十四度太”，但并东方各宿度仅得 74 度，又查观天历与明天历二十八宿黄道度相同，其记为“心四太”，故应据改。

⑨庚午历与重修大明历的差异仅在于取虚为 9.2567 度。

由表 1－8 可见，皇极历二十八宿黄道宿度与东汉四分历不同者有斗、女、危、室、娄、昴、毕、觜、参、柳、尾、箕等十二宿，除斗宿外，两者相差为 0.5 度或 1 度不等。麟德历二十八宿黄道宿度与东汉四分历不同者有斗、娄、昴、觜、参五宿，而与皇极历不同者有斗、女、危、室、毕、柳、尾、箕八宿，除斗宿外，彼此之差亦为 0.5 度或 1 度不等。刘焯和李淳风显然是对二十八宿黄道宿度重新做了测量工作，这与他们所取二十八宿赤道宿度均沿用石申夫的测值有所不同。大衍历二十八宿黄道宿度值与前三种历法完全相同者仅有角、房、井三宿。这同大衍历所测二十八宿赤道宿度值仅有毕、觜、参、鬼四宿与石申夫测值有别，这似乎说明二十八宿黄道宿度随时间的变化要较二十八宿赤道宿度敏感得多，这大约也就是应天、乾元、仪天、崇天、明天和观天诸历均各给出二十八宿黄道宿度值的原因，而如前所述，这些历法在取用二十八宿赤道宿度值时均沿用大衍历之值。从大衍历开始，对二十八宿黄道宿度的描述业已引进少、半、太的概念，即其表面精度已达 1/4 度，这大体说明历家似更注重黄道宿度值的描述。纪元历二十八宿黄道宿度值基本上与前代历法不同，南宋诸历均承用其值，重修大明历和庚午历亦与之大同小异（仅虚、室、奎三宿略做调整），可见其影响之深远。而授时历又出新测值，其表面精度更达 0.01 度。

还要特别指出的是，二十八宿黄道宿度与现代通用的黄经或黄经差（沿黄经圈在黄道上量度而得）不同。它是以天球赤极为基点，沿赤经圈在黄道上进行度量的宿度值，可称之为“极黄经”，这是中国古代黄道宿度的特点。



第四节　二十四节气太阳所在赤道宿度和昏旦中星表

一、二十四节气太阳所在赤道宿度表

至迟在战国时期已经出现一年十二个月太阳所在赤道宿度的完整记述，而以二十四节气为单位的太阳所在宿度表被引进历法，则首见于西汉三统历（太初历）之中，同时它们还与十二次相联系，其文曰："星纪，初斗十二度，大雪。中，牵牛初，冬至，终于婺女七度；……"[①]云云。这种文字描述方式给出的二十四节气太阳所在赤道宿度等的表格可示如表 1－9 中。

表 1－9　诸历二十四节气太阳所在赤道宿度表

12次	节气	三统历（太初历）	东汉四分历	景初历	元嘉历
星纪	大雪	斗 12	斗 $6\frac{1}{32}$	斗 6	箕 10
	冬至	牛 0	斗 $21\frac{8}{32}$	斗 $21\frac{3}{12}$	斗 $14\frac{3}{12}$
玄枵	小寒	女 8	女 $2\frac{7}{32}$	女 $2\frac{3}{12}$	牛 $3\frac{3}{12}$
	大寒	危 0	虚 $5\frac{14}{32}$	虚 $5\frac{5}{12}$	女 $10\frac{5}{12}$
娵訾	立春	危 16	危 $10\frac{21}{32}$	危 $10\frac{8}{12}$	危 $4\frac{7}{12}$
	惊蛰	室 14	室 $8\frac{28}{32}$	室 $8\frac{10}{12}$	室 $1\frac{10}{12}$
降娄	雨水	奎 5	壁 $8\frac{3}{32}$	壁 $8\frac{1}{12}$	壁 $1\frac{1}{12}$
	春分	娄 4	奎 $14\frac{10}{32}$	奎 $14\frac{4}{12}$	奎 $7\frac{4}{12}$
大梁	谷雨	胃 7	胃 $1\frac{17}{32}$	胃 $1\frac{6}{12}$	娄 $6\frac{6}{12}$
	清明	昴 8	昴 $2\frac{24}{32}$	昴 $2\frac{9}{12}$	胃 $9\frac{8}{12}$
实沈	立夏	毕 12	毕 $6\frac{31}{32}$	毕 7	昴 $10\frac{11}{12}$
	小满	井 0	参 $4\frac{6}{32}$	参 $4\frac{2}{12}$	毕 $15\frac{2}{12}$
鹑首	芒种	井 16	井 $10\frac{13}{32}$	井 $10\frac{5}{12}$	井 $3\frac{5}{12}$
	夏至	井 31	井 $25\frac{20}{32}$	井 $25\frac{7}{12}$	井 $18\frac{8}{12}$



① 《汉书·律历志下》。

续表

12次	节气	三统历（太初历）	东汉四分历	景初历	元嘉历
鹑火	小暑	柳 9	柳 3 $\frac{27}{32}$	柳 3 $\frac{10}{12}$	鬼$\frac{11}{12}$
	大暑	张 3	星 4 $\frac{2}{32}$	星 4 $\frac{1}{12}$	柳 12 $\frac{2}{12}$
鹑尾	立秋	张 18	张 12 $\frac{9}{32}$	张 12 $\frac{3}{12}$	张 5 $\frac{4}{12}$
	处暑	翼 15	翼 9 $\frac{16}{32}$	翼 9 $\frac{6}{12}$	翼 2 $\frac{6}{12}$
寿星	白露	轸 12	轸 6 $\frac{23}{32}$	轸 6 $\frac{9}{12}$	翼 17 $\frac{9}{12}$
	秋分	角 10	角 4 $\frac{30}{32}$	角 5 $\frac{11}{12}$	轸 15
大火	寒露	氐 5	亢 8 $\frac{5}{32}$	亢 8 $\frac{2}{12}$	亢 1 $\frac{3}{12}$
	霜降	房 5	氐 14 $\frac{12}{32}$	氐 14 $\frac{4}{12}$	氐 7 $\frac{6}{12}$
析木	立冬	尾 10	尾 4 $\frac{19}{32}$	尾 4 $\frac{7}{12}$	心 2 $\frac{8}{12}$
	小雪	箕 7	箕 1 $\frac{26}{32}$	箕 1 $\frac{10}{12}$	尾 12 $\frac{10}{12}$

二十四节气太阳所在赤道宿度表实际上是由二十八宿赤道宿度表衍生出来的。对于三统历（太初历）而言，其冬至太阳在牵牛初度，由此每经 15（或 16）度，即可推得冬至后各节气太阳所在赤道宿度之值。欲求任一时日太阳所在赤道宿度值，先求知该时日所入节气和所余日数，再由二十四节气太阳所在赤道宿度表所列的该节气和下一节气的太阳所在赤道宿度，用一次内插法便可求得。

东汉明帝永元十四年（102）发生过一次重大的漏刻制度的改革，曾有"取二十四气日所在，并黄道去极、晷景、漏刻、昏明中星刻于下"[①]的举措，即给出过包括二十四节气太阳所在赤道宿度在内的五种表格，可惜这些表格的形式和具体内容没有流传下来。而在东汉四分历中，我们确实看到了这五种表格，它们是以典型的表格形式给出的，横向列冬至、小寒……二十四节气计 24 栏，纵向列"日所在"、"黄道去极"、"晷景"、"昼漏刻"、"夜漏刻"、"昏中星"和"旦中星"[②]等七栏，纵横两栏相交叉处给出相应的数据。但它们却是刘洪和蔡邕在东汉灵帝熹平三年（174）观测的结果。他们关于二十四节气太阳所在赤道宿度的测量结果亦列于表1－9中。在该表中，以冬至为节气之首，二十四节气中先雨水后惊蛰，次序与三统历（太初历）不同（下述各历法凡未特别注明者，其次序均与东汉四分历相同）。这时刘洪、蔡邕认

① 《续汉书·律历志中》。
② 《续汉书·律历志下》。



定冬至在赤道斗宿 21 $\frac{1}{4}$度，自此每经一节气累加 365 $\frac{1}{4}$/24＝15 $\frac{7}{32}$度，即为各节气太阳所在赤道宿度值。

杨伟景初历（237）中亦给出了表格式二十四节气太阳所在赤道宿度表，其数值用强、少弱、少、少强、半弱、半、半强、太、太强、弱（分别为 1/12、2/12、…、11/12）等表示。杨伟亦以为冬至在赤道斗宿 21 $\frac{1}{4}$度，自此每经一节气累加 15 $\frac{2}{12}$或 15 $\frac{3}{12}$度，而得各节气太阳所在赤道宿度。其实质与刘洪、蔡邕法并无不同，杨伟只是偏爱强、少弱等的表述法，从严格意义上讲不如刘洪、蔡邕法精密。

何承天元嘉历（443）亦载有表格式二十四节气太阳所在赤道宿度表，亦引见表1－9 中，该历法以雨水作为二十四节气的第一个节气，其数值也以强、少弱……命之。此表的编制方法应与杨伟景初历相同，从雨水在赤道"室一太强$\left(1\frac{10}{12}\right)$"度起算，每经一节气累加 15 $\frac{3}{12}$或 15 $\frac{2}{12}$度，并虑及二十八宿赤道宿度表，即得。依此，现传本元嘉历二十四节气太阳所在赤道宿度表应做如下 11 处改正："立夏昴十一弱"应作"立夏昴十弱"；"夏至井十八"应作"夏至井十八太弱"；"小暑鬼一弱"应作"小暑鬼初弱"；"大暑柳十二弱"应作"大暑柳十二少弱"；"立秋张五半强"应作"立秋张五少强"；"白露翼十七太弱"应为"白露翼十七太"；"立冬心二半弱"应作"立冬心二太弱"；"冬至斗十四强"应作"冬至斗十四少弱"；"小寒牛三半强"应作"小寒牛三少弱"；"大寒女十半强"应作"大寒女十半弱"；"立春危四"应作"立春危四半强"。

李淳风麟德历（665）也载有表格式二十四节气太阳所在赤道宿度表（其二十四节气次序先惊蛰后雨水），它们给出的是二十四节定气时的相应数值，这是该表与前代不同之处。现存本所载明显有错误的地方，如，翼宿和角宿的赤道距度分别只有 18 度和 12 度，但《旧唐书·历志二》表中却载白露"翼十九度六百四十分一"，寒露"角十三度一千二百一十五分五"。又如，小暑"井三十度七百九十八分五"，大暑"柳十一度一千九十一分四"，立秋"张六度三十四分三"，依此计算小暑至大暑太阳行度为 18 度余，而大暑至立秋太阳行度仅为 9 度余。该表的校改是比较复杂的问题，有待进一步的研究。

自李淳风以后各历家均不列二十四节气太阳赤道宿度表，这大约是因为在太阳运动不均匀性发现以后，再不能应用此表依一次内插法简捷地计算太阳所在赤道宿度，给出此表对太阳所在赤道宿度的计算并无有效作用，故以特定的算法取代之。

二、二十四节气昏旦中星表

中国古代对于昏中星的观测有悠久的历史,《尚书·尧典》关于四仲中星的记载,便是二至、二分昏中星观测早期状况的反映。至迟到战国时期,已出现十二个月昏旦中星的系统记录,《吕氏春秋》十二纪的首句就指此而言。二十四节气昏旦中星表载于东汉四分历中,它是以典型的表格方式给出的。其横向列二十四节气栏,纵向分列"昏中星"和"旦中星"两栏。二十四节气昏旦中星的赤道宿度是与二十四节气太阳所在赤道宿度以及二十四节气昼夜漏刻长度有关的数值,可用以下两式表述:

$$\text{旦中星度}=\text{二十四节气太阳所在赤道宿度}+\text{周天度}-\frac{\text{昼漏刻}\times\text{周天度}-\text{夜漏刻}}{200} \quad (1-1)$$

$$\text{昏中星度}=\text{二十四节气太阳所在赤道宿度}+\frac{\text{昼漏刻}\times\text{周天度}-\text{夜漏刻}}{200}+1 \quad (1-2)$$

这两个算式既虑及昏、旦时太阳与中天子午圈的距度,又虑及太阳从夜半到昏或旦期间赤道宿度的变化,其中"昼漏刻"和"夜漏刻"分别指从旦到昏、从昏到旦的时距,周天度为365.25。依此数量关系和二十八宿赤道宿度表,便可对东汉四分历二十四节气昏旦中星赤道宿度表作核算,现将正确的结果列于表1—10中。

杨伟景初历亦载有二十四节气昏旦中星赤道宿度表,其值与东汉四分历相同。《晋书·律历志下》和《宋书·律历志上》均载有该表格,其中有若干讹误亦应依表1—10中所示加以订正。有趣的是,我们对东汉四分历表所做的八处校正(见表1—10中斜体表示者,下同)中有五处正好与《晋书·律历志下》和《宋书·律历志上》所载值相吻合(见表1—10中加*号者),这正可证明我们所作的订正是可靠的。

何承天元嘉历也有二十四节气昏旦中星赤道宿度表,其计算方法亦应如式(1—1)和式(1—2)。如该表中小雪"日所在度"为"尾十二太强",昼夜漏刻分别为46.7和53.3刻,依上述算式计,正分别可得昏中星和旦中星为"危十三半强"和"翼八太强"[①]。又如,夏至、大暑和立秋三节气,依上述算式计算所得昏旦中星度亦全合(该三节气的"日所在度"需如表1—10所示校改)。可是现存本所载昏旦中星度讹误太多,如,白露旦中星度记为"毕十六半弱",寒露昏中星记为"牛八半强",而毕宿和牛宿的赤道距度分别仅为16度和8度,其讹误极其明显,必为对天文历

① 《宋书·律历志下》。



表 1—10 诸历二十四节气昏旦中星赤道宿度(或距度)表

历名 节气	东汉四分历与景初历		大明历 昏中星度	皇极历 昏去中星	麟德历 昏去中度	大衍历 距中星度	乾元历 距中度
	昏中星	旦中星					
冬至	奎 6 弱	亢 2 少强	$82\frac{21}{23}$	*$82\frac{34.5}{52}$*	*82.1*	82.26	82.22
小寒 大雪	娄 6 半强 壁半强	*氐 7 强 ** *轸 15 少*	84	*$83\frac{15}{52}$*	83.0	82.91	*83.10*
大寒 小雪	胃 11 半强 室 3 半强	心半 翼 15 大强	$86\frac{1}{23}$	$85\frac{6}{52}$	84.8	84.77	84.84
立春 立冬	毕 5 少弱 危 8 强	尾 7 半弱 张 15 大强	$89\frac{3}{23}$	*$87\frac{50}{52}$*	87.7	87.70	87.94
雨水 霜降	参 6 半弱 虚 6 大	箕半强 *星 3 大 **	93	$91\frac{36}{52}$	91.6	91.39	*91.67*
惊蛰 寒露	井 17 半弱 女 7 大	斗少 鬼 3 少强	$97\frac{9}{23}$	$96\frac{3}{52}$	*95.8*	95.88	*96.14*
春分 秋分	鬼 4 牛 5 少	斗 11 弱 井 16 少强	$102\frac{3}{23}$	$100\frac{37.5}{52}$	100.4	100.445	*100.62*
清明 白露	*星 4 大强* 斗 21 强	斗 21 半 *参 5 少强 **	*$106\frac{21}{23}$*	$105\frac{21}{52}$	*105.0*	105.01	*105.09*
谷雨 处暑	张 17 斗 10 少	牛 6 半 毕 3 大	$111\frac{3}{23}$	$109\frac{39}{52}$	*109.3*	109.50	109.56
立夏 立秋	翼 17 大 箕 9 大强	*女 10 少弱 ** 胃 9 大弱	$114\frac{18}{23}$	*$113\frac{25.5}{52}$*	113.1	113.19	*113.29*
小满 大暑	角大弱 尾 15 半弱	危大弱 娄 3 大	$117\frac{12}{23}$	$116\frac{19}{52}$	116.0	116.12	116.15
芒种 小暑	亢 5 大 尾 1 大强	危 14 强 奎 2 大强	$119\frac{4}{23}$	$118\frac{18}{52}$	*117.8*	117.98	118.14
夏至	氐 12 少弱	*室 12 强 **	$119\frac{12}{23}$	*$118\frac{41}{52}$*	118.7	118.63	118.58
文献 出处	续汉书·律历志下	晋书·律历志下	宋书·律历志下	隋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	宋史·律历志二

法无知者所妄改。虽然我们可以依上述算式对之重加计算,但其讹误的原因尚不完全清楚,姑暂存待考。

祖冲之大明历所载二十四节气昏旦中星度采用了新的形式,它不再给出具体的二十八宿宿次及度数,而是给出昏旦中星同相应节气太阳所在宿度的距度值。考其距度值的计算,正依上述算式进行,而且对计算尾数采用了四舍五入的处理方式。现传本《宋书·律历志下》所列各值除清明和白露"昏中星度""百六二十"需改作"百六二十一"之外,均无误(请注意大明历的周天度取为 365.2646 度)。其"昏中星度"的数值引列于表 1—10 中,而"旦中星度"均等于 $366\frac{6}{23}$减去

"昏中星度"。

自东汉四分历到大明历，欲求任一日昏旦中星度，可用上列表格，依一次差内插法计算之。

刘焯皇极历亦取祖冲之的方法，给出了二十四节气"昏去中星"表。经校算，现传本《隋书·律历志下》所列"昏去中星"各值，若依上述算式计算均不合，必须对上述算式中的昼、夜漏刻数作如下改正：昼漏刻需减去 0.27 刻，夜漏刻需加上 0.27 刻。又，皇极历表中所给为"夜半漏"（夜漏刻之半），所以上述算式中的改正值需改作：

$$\text{昏去中星}=\frac{(50-\text{夜半漏}-0.135)\times\text{周天度}-(\text{夜半漏}+0.135)}{100}+1$$

$$=\frac{50\times\text{周天度}-(\text{夜半漏}+0.135)\times(\text{周天度}+1)}{100}+1 \qquad (1-3)$$

依此算式计算（皇极历所取周天度为 365.25761），现传本皇极历二十四节气"昏去中星"表中，冬至 $82\frac{47}{52}$度需改作 $82\frac{34.5}{52}$度；小寒和大雪 $83\frac{16}{52}$度应改作 $83\frac{15}{52}$度；立春和立冬 $87\frac{49}{52}$度应改作 $87\frac{50}{52}$度；立夏和立秋 $113\frac{25}{52}$度应改作 $113\frac{25.5}{52}$度；夏至 $118\frac{40}{52}$度应改作 $118\frac{41}{52}$度，其余各节气值均合。其中除了冬至数值需做较大改动外，其他改动的数值为 0.5/52 到 1/52 不等。应该说式（1－3）是可信的。经校算后的皇极历的二十四节气"昏去中星"值亦载于表 1－10 中。

我们知道，中国古代一般以日出前 2.5 刻为旦，日落后 2.5 刻为昏。东汉四分历、景初历和大明历等均做此理解。而刘焯对上述算式所做的修正表明，在计算昏旦中星时，他是以日出前2.365刻为旦，日落后 2.365 刻为昏的，这大约便是刘焯在算式中增夜半漏，减昼半漏刻数各 0.135 刻的理由。

李淳风麟德历二十四节气"昏去中度"表的算法与刘焯算法无异。所需注意的是，麟德历中给出的二十四节气"晨前刻"是指日入到日出之间的时距之半，则"夜半漏"＝"晨前刻"－2.5 刻。设李淳风所取的改正为 0.22，而不是刘焯所取的 0.135刻，则可得以下算式：

$$\text{昏去中度}=\frac{50\times\text{周天度}-(\text{晨前刻}-2.28)\times(\text{周天度}+1)}{100}+1 \qquad (1-4)$$

麟德历的周天度为 365.2448，依之可对麟德历二十四节气"昏去中度"表作核算，结果与表载值不同者有 6 处：冬至 82.2 度，而计算为 82.1 度；惊蛰和寒露 95.9 度，而计算为 95.8 度；清明和白露 104.9 度，而计算为 105.0 度；谷雨 109.2 度，而计算为 109.3 度。其中与谷雨相对称的处暑表载值为 109.3 度，可见谷雨载为



109.2 度应有误。这就是说式(1－4)的设定是可靠的。如此看来，李淳风在计算昏旦中星时是以日出前 2.28 刻为旦，日落后 2.28 刻为昏的。又，小暑载为 119.8 度，显系 117.8 度，应改正。现亦将核算后的结果列于表 1－10 中。

一行大衍历给出的是二十四节气"距中星度"，与以前各历法的含义有所不同，察表载各值，是由下式算得的：

$$距中星度=\frac{50-“漏刻”}{100}\times 周天度 \qquad (1-5)$$

即其"距中星度"仅虑及在昏旦时太阳同中天子午圈之间的度距。在计算昏旦中星度时，是以太阳昏旦时所在的赤道宿度入算，其结果与前代各历法的相应算法相同，只是在计算程序上有所调整。其中"漏刻"是指各节气从昏到旦的时距之半，周天度取 365.2565。依此校算《新唐书·历志四上》表载各值全合(亦引载于表 1－10 中)。

欲求任一日距中星度，大衍历有术曰：

> 又置消息定衰，以万二千三百八十六乘之，如万六千二百七十七而一，为度差，差满百为度。各递以息加、消减其气初距中度，得每日距中度定数。①

依术文意则有：

$$某日距中度定数=其气初距中度\pm\frac{12386}{16277\times 100}\times 消息定衰 \qquad (1-6)$$

式中，"消息定衰"值可由表列"消息衰"和"陟降率"计算而得。

徐昂宣明历亦给出二十四节气"距中星度"，其算法与一行大衍历相似，但需令式(1—5)中的"漏刻"(宣明历称之为"夜半定漏")加一改正值(Δ)，才能使计算结果与《新唐书·历志六上》的表载值相合。经验算其 Δ 值从 0.023 到 0.172，[$\Delta=50-“夜半定漏”-\frac{“距中星度”\times 100}{周天度(365.2565)}$]呈弥散分布，并无规律可循。这似不能用表载值有讹误来解释，我们也无由判定哪一数字有讹误，只能认为徐昂似采用了一种我们尚不能理解的特殊的 Δ 取值法。

吴昭素乾元历也载有二十四节气"距中星度"表。乾元历还给出"距中星度"与"晨分"之间的关系，其术曰：

> 百约晨分，进一位，以三千六百五十三乘，如元率(2940)收为度……不尽，退除为距子度，用减半周天度(182.6282)，余为距中星度分。②

① 《新唐书·历志四上》。

② 《宋史·律历志一》。

依之则有：

$$距中星度=182.6282-\frac{晨分\times10\times3653}{100\times2940} \qquad (1-7)$$

据式(1－7)可对乾元历“距中星度”表作校算，并引列表1－10中。

此后各历法均不再给出二十四节气“距中度”的表格，而是计算在得“夜半漏刻”的基础上，以术文的形式给出计算每日昏旦中星度的方法。

第五节　二十四节气晷长、昼夜漏刻和日出入时刻表

一、二十四节气晷长表

最早以文字描述方式给出二十四节气午中晷影长度表者，当推西汉《周髀算经》，其后两汉之际的纬书《易纬》亦有记载。该两书所给冬至晷长分别为13.5尺和13尺。若令冬至后每经一节气晷长递减0.99 $\frac{1}{6}$(或0.96)尺，可得到夏至各节气的晷长值，此后令每经一节气晷长递增0.99 $\frac{1}{6}$(或0.96)尺，即得到冬至各节气的晷长值，所以《周髀算经》和《易纬》所列二十四节气晷长值并不是实测的结果。

现存最早的二十四节气晷长实测值表亦首见于东汉四分历中。它是以典型的表格式描述的(以后各历法均同此)，横向栏列二十四节气名，纵向栏称“晷景”。其数值引列于表1－11中。考察其二至前后各节气的晷影长度可知，冬至前各节气晷长恒大于冬至后各节气晷长，而夏至前各节气晷长均小于夏至后各节气晷长，这一现象刘宋祖冲之就已注意到了，并由之得到刘洪、蔡邕所定冬至时刻后天“二日十二刻”①的正确推论。也就是说，刘洪、蔡邕是在冬至时刻的推算后天2日余的情况下，由实测而得东汉四分历所载二十四节气晷长表的。欲求任一时日晷长，可用该表依一次内插法求得。

杨伟景初历(237)所载二十四节气晷长表的数值与东汉四分历全同。

何承天元嘉历(443)则给出二十四节气晷长新值(结果亦列于表1－11中)。它以雨水为二十四节气之首，而二至前后各节气的晷长是两两相应的(其中“雨水”与“霜降”两相对称，晷长应相等，但现存本所载一为“八尺二寸二分”，一为“八尺二寸八分”，两者中必有一误，因难以判别是非，姑两存之)。何承天是在经过长期观测的基础上对二十四节气晷长表做出这种归纳的，较《周髀算经》和《易纬》晷长表而言，它更具实测的基础，较东汉四分历晷长表而言，它更富理论的色

① 《宋书·律历志下》。

表 1－11 诸历二十四节气晷长表

节气＼历名	东汉四分历、景初历	元嘉历	大明历	麟德历	大衍历	宣明历
冬至	13	13	13	12.75	12.7150	12.7312
小寒 大雪	12.3 12.56	12.48	12.43	12.28	12.2277	12.3911
大寒 小雪	11 11.4	11.34	11.2	11.15	11.2182	11.3830
立春 立冬	9.6 10	9.91	9.8	9.62	9.7351	9.9478
雨水 霜降	7.95 8.4	8.22	8.17	8.07	8.2106	8.3781
惊蛰 寒露	6.5 6.85	6.72	6.67	6.54	6.7384	6.8874
春分 秋分	5.25 5.5	5.39	5.37	5.33	5.4319	5.4470
清明 白露	4.15 4.35	4.25	4.25	4.24	4.3210	4.1959
谷雨 处暑	3.2 3.33	3.25	3.26	3.30	3.3047	3.2069
立夏 立秋	2.52 2.55	2.5	2.53	2.49	2.5331	2.4451
小满 大暑	1.98 2	1.97	1.99	1.98	1.9576	1.8989
芒种 小暑	1.68 1.7	1.69	1.69	1.64	1.6003	1.5714
夏至	1.5	1.5	1.5	1.49	1.4779	1.4780
文献出处	续汉书·律历志下、晋书·律历志下	宋书·律历志下	宋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	新唐书·历志六上

彩。在二十四节气晷长表的实测性和规整化两个方面，何承天都作出了重大的贡献。

祖冲之大明历(463)亦载有二十四节气晷长表，其结果也引列于表 1－11 中。祖冲之也曾做过长期而细致的晷影测量工作，但有趣的是，他似并未真正采用他经实测的结果。清代李锐指出，大明历二十四节气晷长表各值是依据东汉四分历二十四节气晷长表中所列二至前后晷长两两相加，折半而得的[1]。考察大明历二十四节气晷长表各值，知李锐之说可谓天衣无缝，我们难以想象祖冲之实测的结果正与之相合。至于祖冲之为什么要采用这种方法构建大明历的二十四节气晷长表，一时还难寻准确的答案。也许祖冲之来不及对二十四节气晷长做充分的测量，而权取此法；也许祖冲之对二十四节气晷长的实测结果与上述处理方法所得比较接近，为神其事而取此法，实难言也。

① 《续汉书·律历志下》校勘记[一五四]。

李淳风麟德历(665)给出了新测二十四节气晷长表,该表横向列二十四节气名,纵向列“日中影”(相应节气晷长)和“陟降率”(相邻两节气晷长差,前多为陟,前少为降)两栏。《旧唐书·历志二》现存本所载各值有些讹误,可依二至前后对应节气的晷长相等,大雪和冬至前后、芒种和夏至前后“陟降率”的绝对值相等,以及“日中影”和“陟降率”之间存在的数量关系这三者加以校核。其“日中影”需校改者有:“启蛰八尺七寸”应作“八尺七分”;“清明四尺三寸四分”和“白露四尺三寸四分”均应作“四尺二寸四分”;“立夏三尺四寸九分”应作“二尺四寸九分”;“处暑三尺三分”应作“三尺三寸”;“大雪一丈二寸八分”应作“一丈二尺二寸八分”。其“陟降率”需校改者有:“冬至陟四寸一分”应作“四寸七分”;“小寒陟三尺一寸三分”应作“一尺一寸三分”;“大寒陟一尺五寸二分”应作“一尺五寸三分”;“雨水降二尺二寸一分”应作“一尺二寸一分”。校改后的“日中影”亦引列于表1-11中[①]。欲求任一时日(t_0)晷长值 $f(t)$,可应用该表所列“日中影”和“陟降率”依二次差内插法求算之。这是李淳风麟德历较前代同类算法的高明之处。据研究[②],求 $f(t)$的算法为:

$$f(t)=f(a)\pm\left[\frac{t}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{15}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2\times 15^2}(\Delta_1-\Delta_2)\right] \quad (1-8)$$

式中:$f(a)$=某节气“日中影”$\pm\dfrac{\text{恒气小余}-670}{1340}\times$初日影定差。

这是关于从二十四节气时的晷长归算到二十四节气日中时晷长的计算。

$$\text{初日影定差}=\frac{1}{15}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\pm\frac{1}{15}|\Delta_1-\Delta_2|\mp\frac{1}{2\times 15^2}|\Delta_1-\Delta_2| \quad (1-9)$$

t 为所求时日(t_0)入于某节气的时日数。恒气小余为该节气平气时日数不足一日部分的分值。Δ_1 和 Δ_2 分别为该节气和次节气的“陟降率”,可由表查得。某节气“日中影”亦可由表查得。

一行大衍历又给出了二十四节气(定气)晷长新测表[③],其值亦列于表1-11中。该表应是一行等人在阳城(河南登封)经由实测而得的,此表还成为大衍历据以推求九服晷长的基础之一。该表所列各值是为某定气交气时的晷长,所以它是

---

① 纪志刚:《麟德历晷影计算方法研究》,《自然科学史研究》,1994年,第4期。已对此做了相同的校改。

② 纪志刚:《麟德历晷影计算方法研究》,《自然科学史研究》,1994年,第4期。

③ 《新唐书·历志四上》。



在实测的基础上经由某种数学处理而得的数值，其表面精度为 0.0001 尺，这自然不是实际的精度，大衍历中也应用了与李淳风相类似的从二十四节气时晷长值向二十四节气日中时晷长值的归算方法。据研究，大衍历二十四节气定气时晷长值的平均误差为 0.022 尺①。

徐昂宣明历(821)，也给出二十四定气晷长表，表中亦给出"阳城日晷"新值，其结果亦引列于表 1－11 中。徐昂新测值的平均误差较一行测值为大，即反不如大衍历准确。同样需指出的是，徐昂测值表面精度均达到 0.0001 尺，这显然不是实测的结果，而是利用一行的晷影差分表推衍而得的②。

五代王朴亦曾进行二十四节气晷长的实测工作，在钦天历中有"岳台中晷"术曰："置午中入历分，以其日损益率乘之，如统法而一，为分；分十为寸。用损益其下中晷数，为定数也"③，可见钦天历原应有晷长表，而且该表是每日均给出一"损益率"和"晷数"的，而该二值是如何求得，在钦天历中未见有关术文，只好存而待考。有趣的是，在北宋周琮等人编撰的《岳台晷景新书》中却引载有王朴钦天历二十四节气晷长测算的结果④。

北宋初王处讷应天历和吴昭素乾元历亦给出"二十四气午中晷景"表⑤，察其数值均系由一行大衍历二十四节气"阳城日晷"取舍而得。在第二章第七节中，我们将要论及，自唐末边冈崇玄历开始，关于晷长的计算已采用比较捷便的公式算法，王朴大约亦取公式算法，但北宋初年的应天历和乾元历却返复到传统的表格计算法上去，而且仅仅是简单地重复一行之法，此举实不合改革的潮流。随后不久，史序仪天历继承边冈所开拓的新方向而取公式算法，其后各历法亦均进一步发扬光大之。

二、二十四节气昼夜漏刻表

在历法中首载该表格者亦为东汉四分历，乃刘洪、蔡邕所实测。其前，在汉和帝永元年间已有这类表格，可惜早已失传。东汉四分历二十四节气昼夜漏刻表的横向列二十四节气，纵向列"昼漏刻"与"夜漏刻"。"昼漏刻"指自旦到昏的时距，"夜漏刻"指自昏到旦的时距，两者之和等于 100 刻。其中大寒"昼漏刻"46.8、"夜漏刻"53.8，必有一误，查与之对称的节气小雪"昼漏刻"46.7，"夜漏刻"53.3，故大寒"夜漏刻"以 53.2 为宜。现将其"夜漏刻"值列于表 1－12 中(表中斜体者为做过

① 陈美东：《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》，《自然科学史研究》，1985 年，第 3 期。

② 曲安京：《大衍历晷影差分表的重构》，《自然科学史研究》，1997 年，第 3 期。

③ 《新五代史·司天考一》。

④ 《宋史·律历志九》。

⑤ 《宋史·律历志二》。

校改者，下同）。杨伟景初历沿用东汉四分历的数值，《晋书·律历志下》载有此表，其中大寒“夜漏刻”正为53.2。由表1－12知，东汉四分历二至前后两相对称的节气的“夜漏刻”数不相等，冬至前恒大于冬至后，夏至前均小于夏至后，春、秋二分的“夜漏刻”数亦不相等。刘宋何承天就已注意到这种状况，并正确地指出造成这种状况的原因：“案《后汉志》，春分日长，秋分日短，差过半刻。寻二分在二至之间，而有长短，因识春分近夏至，故长；秋分近冬至，故短也。”[①]他认为春分和秋分的昼夜漏刻数理应相等，而二者之差达0.5刻，是春分和秋分均后天造成的。

表1－12　诸历二十四节气夜漏刻表

历名 / 节气	东汉四分历景初历夜漏	元嘉历夜漏	大明历夜漏	皇极历夜半漏	麟德历晨前刻	大衍历漏刻	宣明历夜半定漏	应天历晨分	乾元历晨分
冬至	55	55	55	27.43	30	$27\frac{230}{480}$	27.40	2748	808
小寒 大雪	54.2 54.5	54.4	54.4	27.26	$29\frac{54}{72}$	$27\frac{145}{180}$	27.29	2735	801
大寒 小雪	53.2 53.3	53.3	53.3	26.76	$29\frac{18}{72}$	$26\frac{380}{480}$	26.74	2688	787
立春 立冬	51.4 51.8	51.6	51.6	25.985	$28\frac{33}{72}$	$25\frac{475}{480}$	26.10	2612	762
雨水 霜降	49.2 49.7	49.5	49.5	24.965	$27\frac{30}{72}$	$24\frac{470}{480}$	25.09	2508	732
惊蛰 寒露	46.7 47.4	47.1	47.1	23.775	$26\frac{18}{72}$	$23\frac{360}{480}$	23.74	2388	696
春分 秋分	44.2 44.8	44.5	44.5	22.50	25	$22\frac{240}{480}$	22.42	2250	660
清明 白露	41.7 42.2	42.0	41.9	21.225	$23\frac{54}{72}$	$21\frac{120}{480}$	21.10	2112	624
谷雨 处暑	39.5 39.8	39.7	39.6	20.035	$22\frac{42}{72}$	$20\frac{10}{480}$	19.75	1992	588
立夏 立秋	37.6 37.7	37.7	37.6	19.015	$21\frac{39}{72}$	$19\frac{5}{480}$	18.74	1888	558
小满 大暑	36.1 36.2	36.1	36.1	18.23	$20\frac{54}{72}$	$18\frac{100}{480}$	18.10	1812	534
芒种 小暑	35.1 35.3	35.2	35.2	17.69	$20\frac{18}{72}$	$17\frac{335}{480}$	17.55	1765	519
夏至	35	35	35	17.57	20	$17\frac{250}{480}$	17.44	1752	515
文献出处	续汉书·律历志下、晋书·律历志下	宋书·律历志下	宋书·律历志下	隋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	新唐书·历志六上	宋史·律历志一	宋史·律历志一

① 《宋书·律历志中》。

在元嘉历中，何承天也给出了二十四节气昼夜漏刻表，现亦将其值引列于表1—12中。由表1—12知，何承天二十四节气夜漏刻值除二至与东汉四分历相同外，其余各节气是取东汉四分历表二至前后两相对称节气的夜漏刻数之和折半而得，其中除小满和大暑之外，均用四舍五入的方法。这就是说元嘉历二十四节气昼夜漏刻表并非由实测而得，不过，何承天所建立的二分昼夜漏刻相同，二至前后两相对称节气昼夜漏刻相同的观念对后世产生了极深远的影响。

祖冲之大明历也有二十四节气昼夜漏刻表，其夜漏刻值亦引列于表1—12中。同元嘉历相比较，两者仅清明和白露、谷雨和处暑、立夏和立秋等节气相差0.1刻。究其实祖冲之也是采用了与何承天相同的方法，从东汉四分历表中推衍而得此表的，大明历与元嘉历二十四节气昼夜漏刻表的差异仅仅是因为是否用四舍五入法而造成的，即祖冲之对于上述清明等节气的夜漏刻值，均未采用四舍五入法。固然这也表明祖冲之所认定的这些节气的夜漏刻值与何承天不同，但它们亦均未由实测而得是显而易见的。

刘焯皇极历则给出了新测得的二十四节气"夜半漏"表格，其值为从昏至旦时距的一半。其数值引载于表1—12中。刘焯以前各历法，在应用二十四节气昼夜漏刻表推求任一日昼夜漏刻之数时，均采用一次差内插法。而皇极历则不然，它以文字描述的方式，给出各不同节气每经一日漏刻数递增或递减的不同数值(k_0)。欲求某日昼夜漏刻数(k_n)，先求该日所值节气，由表可查得该节气的"夜半漏"(k)，再以该日入该节气的日数为引数，求得$\sum k_0$值，则$k_n=k\pm\sum k_0$。这自然较为接近一年内昼夜漏刻变化的真实情况。

唐初傅仁均戊寅历不但给出二十四节气"夜漏半"表格，而且还载列与之相关的"日出"和"日入"时刻，以及"一更"和"一筹"的长度[①]，其表格可引列于表1—13。

表1—13中的有关数值存在以下关系：

(1)夜半漏$=\frac{1}{2}$("日入"—"日出")—2.5刻；

(2)一更$=\frac{2}{5}$夜漏半；

(3)一筹$=\frac{1}{5}$一更；

(4)1刻=24分。

分值的计算取小数全部舍弃法。表1—13中所列各值已依此类数量关系作了校算，凡与现传本不同者用[　]示出。

① 《旧唐书·历志一》。

表 1—13　戊寅历二十四节气日出入、夜半漏及更、筹表

节气＼日出入等	日出	日入	夜漏半	一更	一筹
冬至	辰 24 分之 20	申 7 刻 12 分	27 刻 12 分	11 刻	2 刻 4 分
小寒、大雪	辰 13 分	申 7 刻 19 分	27 刻 5 分	10 刻 21 分	2 刻 4 分
大寒、小雪	卯 8 刻 7 分	酉[初刻]1 分	26 刻 15 分	10 刻 15 分	2 刻[3]分
立春、立冬	卯 7 刻 11 分	酉 21 分	25 刻 19 分	10 刻 7 分	2 刻 1 分
启蛰、霜降	卯 6 刻 10 分	酉[1 刻]22 分	24 刻 18 分	[9 刻 21 分]	[1 刻 23 分]
雨水、寒露	卯 5 刻 5 分	酉[3 刻]3 分	23 刻 13 分	9 刻 10 分	1 刻 2[1]分
春分、秋分	卯 3 刻 22 分	酉 4 刻 10 分	22 刻[6]分	8 刻 21 分	1 刻 18 分
清明、白露	卯 2 刻 15 分	酉 5 刻 17 分	20 刻 2[3]分	8 刻[9]分	1 刻 16 分
谷雨、处暑	卯 1 刻 1[1]分	酉 6 刻 21 分	19 刻 19 分	7 刻 2[2]分	1 刻 14 分
立夏、立秋	卯 1[1]分	酉 7 刻 21 分	18 刻[19 分]	[7]刻 1[2]分	1 刻 12 分
小满、大暑	寅 8 刻 1 分	戌 7 分	18 刻 1 分	7 刻 5 分	1 刻[10]分
芒种、小暑	寅 7 刻 14 分	戌 18 分	17 刻 14 分	7 刻	1 刻 9 分
夏至	寅 7 刻 12 分	戌 20 分	17 刻 12 分	7 刻	1 刻 9 分

李淳风麟德历二十四节气(定气)昼夜漏刻表纵向给出“晨前刻”、“屈伸率”和“发敛差”三栏。“晨前刻”为各节气从日入到日出间的时距;“屈伸率”为各节气初日漏刻增减量有关的数值;“发敛差”为相邻两“屈伸率”之差乘以$\frac{100}{15}$,即与该节气内每经一日漏刻增减量有关的数值。这三栏各节气的数值均相对于二至前后两两相等。依这些数量关系可对该表格进行校算。立夏、立冬“损二十三”均应为“损二十二”;小暑“屈七分”应为“屈三、七分”;大暑“屈九、二分”应为“屈九、四分”;寒露“损九”应为“损七”;霜降“屈十、十分半”应为“屈十、七分半”。而“晨前刻”各值列于表1—12中。

麟德历还给出依上述表格求每日晨前定刻的术文:

> 每气准为一十五日,各置其气屈伸率(a)。每以发敛差(b)损益之,差满十从分,分满十从率一,即各每日屈伸率。各累计屈伸率为刻分,乃以一百八十乘刻分,泛差十一乘纲纪(秋分后为进纲 16,春分后为退纪 17)而除之,得为刻差(c),满法(72)为刻。随气所在,以伸减屈加不见漏(d)而半之,为晨前定刻(e)。[1]

依之可列出以下算式:

① 《旧唐书・历志二》。



$$e=\frac{1}{2}\left(d\pm\frac{c}{72}\right)=\frac{1}{2}\left[d\pm\frac{180}{11\times16(\text{或 }17)\times72}\times\left(na+\frac{n(n-1)b}{200}\right)\right]\quad(1-10)$$

式中：n 为所求日入某节气的日数；d 为“晨前刻”的 2 倍，它与 a、b 均可由上述表格查得。

这里李淳风遵循的是刘焯的思路，但用更为规范化和简捷的方式予以表达和计算。

一行大衍历二十四节气（定气）漏刻表各值亦列于表 1—12 中。大衍历此表纵向除列出“漏刻”值（实即夜漏刻之半）外，还列有“陟降率”和“消息衰”二栏。“陟降率”指各节气内每经一日“消息衰”递增或递减的分值（分母为 100）。“消息衰”为与各节气初日晷长改正值有关的数值，某节气初日的“消息衰”等于其前一节气初日的“消息衰”加或减其前一节气的“陟降率”与其前一节气的定气日数的乘积。对于雨水、清明、处暑和寒露四个节气“陟降率”的变化，与其他节气的“陟降率”依等差级数递增或递减不同，大衍历另作规定：

> 皆以三日为限。雨水初日，降七十八，初限日损十二、次限日损八、次限日损三、次限日损二、次末限日损一。清明初日，陟一，初限日益一、次限日益二、次限日益三、次限日益八、末限日益十九。处暑初日，降九十九，初限日损十九、次限日损八、次限日损三、次限日损二、末限日损一。寒露初日，陟一，初限日益一、次限日益二、次限日益三、次限日益八、末限日益十二。各置初日陟降率，依限次损益之，为每日率。[①]

依此可知，雨水初日降 78，其后各日分别降 66、54、42、34、26、18、15、12、9、7、5、3、2、1。寒露初日陟 1，其后各日分别陟 2、3、…、78，数值正好同雨水的降率逆数而上。清明初日陟 1，其后各日分别陟 2、3、5、7、9、12、15、18、26、34、42、61、80、99。处暑初日降 99，其后各日分别降 80、61、…、1，数值正好同清明的陟率逆数而上。雨水和寒露的“消息衰”应分别较惊蛰和霜降的“消息衰”增或减 3.72（现存本此两节气“消息衰”之差正好为此值）；清明和处暑的“消息衰”应分别较谷雨和白露的“消息衰”减或增4.14（现存本《新唐书·历志四上》和《旧唐书·历志三》处暑“消息衰”分别为 34.55 和 24.76，白露“消息衰”为 38.90，减去 4.14，得34.76，可见《新唐书·历志四上》和《旧唐书·历志三》所载各有正误的部分）。

由大衍历二十四节气漏刻表计算任一日夜半漏刻值，其术曰：

> 又置消息定衰，满象积（480）为刻，不满为分。各递以息减、消加其气初夜半漏，得每日夜半漏定数。[②]

即：

① 《新唐书·历志四上》。

② 《新唐书·历志四上》。

$$每日夜半漏定数=其气初夜半漏\pm\frac{消息定衰}{480} \qquad (1-11)$$

$$消息定衰=某气“消息衰”\pm\frac{n(n-1)\times某气“陟降率”}{200} \qquad (1-12)$$

式中:n 为所求日入某定气的数值。

依“消息衰”和“陟降率”之间存在的数量关系,以及式(1-11),还有在上一节中已经提及的式(1-6),可以对这些相关的数据进行校算。此外,还要指出的是,大衍历二十四节气漏刻表中各定气日数等于平气日数加减盈缩值,如冬至初日到小寒初日的日数等于 $15\frac{664\frac{7}{24}}{3040}-\frac{2353}{3040}$,2353 为盈缩分,可由日躔表查得。以《新唐书·历志四上》所载为准,核算结果为:“立春降 34”应为“降 37”;“谷雨降 32、息 33.56”应为“降 41、息 34.75”;“小满息 20.12”应为“息 20.22”;“芒种息 10.12”应为“息 10.25”;“立秋降 32”应为“降 38”;“处暑消 34.55”应为“消 34.76”;“霜降陟 34、消 24.98”应为“陟 41、消 35.78”;“立冬陟 53、消 29.72”应为“陟 54、消 29.67”;“大雪消 11.13”应为“消 11.18”。又,由式(1-11)可校算得大衍历二十四节气漏刻表中小寒应为 $27\frac{145}{480}$刻[若依上一节中提及的大衍历“距中星度”与“漏刻”的关系式(1-5),亦可证小寒“漏刻”为 $27\frac{145}{480}$刻]。

徐昂宣明历也有二十四节气(定气)漏刻表,纵向列有“夜半定漏”和“屈伸数”[①]两栏,“屈伸数”的含义与大衍历的“消息衰”相似,其算法亦与大衍历同。现将其“夜半定漏”各值亦列于表1-12中。

由王朴钦天历求“晨昏分”[②]术文知,钦天历亦原有昼夜漏刻表,但现传本失载。

王处讷应天历和吴昭素乾元历亦均有二十四节气漏刻表,两历均称之为“晨分”,实即夜漏之半。所给各值,应天历以 10002 为分母,乾元历以 29.4 为分母。现依“晨分”与“距中度”等内在的数量关系,可列二历“晨分”各值于表 1-12 中[③]。应天和乾元二历法在应用该表计算任一日漏刻值时,采用了二次差内插法。每日漏刻值计算的公式化,始自边冈崇玄历,史序仪天历以后均继承之,详见第二章第六节。

三、二十四节气日出入时刻表

按理说,二十四节气昼夜漏刻表应是由二十四节气日出入时刻的测量结果

① 《新唐书·历志六上》。

② 《新五代史·司天考一》。

③ 陈美东、李东生:《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》,《自然科学史研究》,1990 年,第 1 期。



推衍而得的，可是隋代以前各历法均不载二十四节气日出入时刻表，却反过来用派生出来的二十四节气昼夜漏刻表来进行二十四节气等的日出入时刻的推算。在隋代张胄玄大业历中，我们才首次见到第一份二十四节气日出入时刻表格，其横向列二十四节气，纵向有"日出"和"日入"[①]二栏，其具体数值可列于表1—14中。

表1—14 大业历和韩显符二十四节气日出入时刻表

历名等 / 节气	大业历			韩显符《铜浑仪法要》		
	日出	日入	夜漏刻	日出	日入	夜漏刻
冬至	辰$\frac{50}{68}$	申7$\frac{30}{68}$	59$\frac{65.3}{68}$	卯4$\frac{144.5}{147}$	申3$\frac{51.5}{147}$	59$\frac{142}{147}$
小寒 大雪	辰$\frac{32}{68}$	申7$\frac{48}{68}$	59$\frac{29.3}{68}$	卯4$\frac{119.5}{147}$	申3$\frac{76.5}{147}$	59$\frac{92}{147}$
大寒 小雪	卯8$\frac{19}{68}$	酉$\frac{1}{68}$	58$\frac{18}{68}$	卯4$\frac{34.5}{147}$	申4$\frac{14.5}{147}$	58$\frac{69}{147}$
立春 立冬	卯7$\frac{28}{68}$	酉$\frac{52}{68}$	56$\frac{44}{68}$	卯3$\frac{56.5}{147}$	申4$\frac{139.5}{147}$	56$\frac{113}{147}$
启蛰 霜降	卯6$\frac{25}{68}$	酉1$\frac{55}{68}$	54$\frac{38}{68}$	卯2$\frac{58.5}{147}$	申5$\frac{137.5}{147}$	54$\frac{117}{147}$
雨水 寒露	卯5$\frac{13}{68}$	酉3$\frac{7}{68}$	52$\frac{6}{68}$	卯1$\frac{40.5}{147}$	申7$\frac{8.5}{147}$	52$\frac{81}{147}$
春分 秋分	卯3$\frac{55}{68}$	酉4$\frac{25}{68}$	49$\frac{30}{68}$	卯初	酉初	50
清明 白露	卯2$\frac{37}{68}$	酉5$\frac{43}{68}$	46$\frac{62}{68}$	寅7$\frac{8.5}{147}$	酉1$\frac{40.5}{147}$	47$\frac{66}{147}$
谷雨 处暑	卯1$\frac{28}{68}$	酉6$\frac{52}{68}$	44$\frac{44}{68}$	寅5$\frac{127.5}{147}$	酉2$\frac{68.5}{147}$	45$\frac{10}{147}$
立夏 立秋	卯$\frac{28}{68}$	酉7$\frac{52}{68}$	42$\frac{44}{68}$	寅4$\frac{119.5}{147}$	酉3$\frac{76.5}{147}$	42$\frac{141}{147}$
小满 大暑	寅8$\frac{3}{68}$	戌$\frac{17}{68}$	41$\frac{8.7}{68}$	寅3$\frac{146.5}{147}$	酉4$\frac{49.5}{147}$	41$\frac{48}{147}$
芒种 小暑	寅7$\frac{36}{68}$	戌$\frac{44}{68}$	40$\frac{14.7}{68}$	寅3$\frac{71.5}{147}$	酉4$\frac{124.5}{147}$	40$\frac{45}{147}$
夏至	寅7$\frac{30}{68}$	戌$\frac{50}{68}$	40$\frac{2.7}{68}$	寅3$\frac{51.5}{147}$	酉4$\frac{144.5}{147}$	40$\frac{5}{147}$

由"日入"时刻减去"日出"时刻，我们可以算得大业历的夜漏刻，亦列于表1—14中。大业历所用的辰刻制度是一日百刻，一辰8$\frac{22\frac{2}{3}}{68}$刻，自子初到子正、从子正

① 《隋书·律历志中》。



到丑初等均为 $4\frac{11\frac{1}{3}}{68}$ 刻，子初始于夜半之前 $4\frac{11\frac{1}{3}}{68}$ 刻，夜半即为子正。丑初等均可依此类推。

在本节上一小节中，我们已经提及傅仁均戊寅历所载日出入时刻表(见表1－13)，其所用辰刻制度与大业历无异，其日出入时刻与大业历均小有不同，但由之算得的夜漏半却与大业历的夜漏刻之半基本相同。细察之，这是由于戊寅历二十四节气日出入时刻均较大业历偏大，每节气偏大的幅度又大略相等。这是一种很奇特的现象。

在北宋韩显符的《铜浑仪法要》中亦载有"二十四节气昼夜进退、日出入刻数立成之法"[①]，其纵向设"日出"、"日没"、"昼刻"和"夜刻"四栏，现取其三栏载于表1－14中(其"昼刻"＝100－"夜刻")。其所用辰刻制度与隋及唐初不同，以夜半作为子初之始，每经 $8\frac{49}{147}$ 刻，进一时辰。

赵知微重修大明历和耶律楚材庚午历载有相同的"二十四气陟降及日出分"[②]表。其横向列二十四节气，纵向有"增损差"、"加减差"、"陟降率"、"初、末率"和"日出分"五栏。"日出分"$\times\frac{12}{313.8}$＝日出刻，是为某节气时太阳出地平面的分值或刻数(均从夜半起算)。"陟降率"为相邻两节气初日之间"日出分"之差。"初、末率"系指某节气初日和末日"日出分"的变化量。"增损差"、"初"和"末"系指某节气初日和末日"初、末率"的变化量。"加减差"系指某节气每经一日"增损差"的变化量。现将该表的一部分引列于表1－15。

表1－15　重修大明(庚午)历二十四节气陟降及日出分表

节气＼日出分等	增损差	加减差	陟降率	初、末率	日出分
冬至	增 初 0.0926 末 0.0796	减 0.001	陟 10.40	初 0.0550 末 1.2604	1567.92
小寒	增 初 0.0789 末 0.0659	减 0.001	陟 28.73	初 1.3600 末 2.3736	1557.52
大寒	增 初 0.0652 末 0.0522	减 0.001	陟 43.56	初 2.4300 末 3.2518	1528.79
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

① 《宋史・律历志三》。

② 《金史・历志上》、《元史・历志五》。



某节气"日出分"＝前节气"日出分"±前节气"陟降率"

$$某节气“末率”＝某节气“初率”\pm\frac{某节气“增损差初、末”之和}{2}\times 14$$

$$某节气“加减差”＝\frac{某节气“增损差初、末”之差}{13}$$

$$\frac{某节气“增损差初、末”之和}{2}=\frac{某气节“初、末率”之差}{14}$$

这些是可以从表1－15得出的数量关系。应用该表即可算得每日日出分，其术曰：

各以陟降初率，陟减降加其气初日日出分，为一日下日出分。以增损差(仍加减加减差)增损陟降率，驯积而加减之，即为每日日出分。复减日法(5230)，余为日入分。[1]

第六节　二十四节气太阳视赤纬表和月亮极黄纬表

一、二十四节气太阳视赤纬表

二十四节气太阳视赤纬表首见于东汉四分历中。它是以表格的方式给出的，横向列二十四节气，纵向栏称"黄道去极"，也是刘洪和蔡邕经实测而得的。它们实际上是太阳视赤纬的余角，即1象限度±"黄道去极"，是为太阳视赤纬值。在此之前，至迟在汉和帝永元年间已有此类表格当无疑问。东汉四分历所给值可引列于表1－16中。

杨伟景初历二十四节气太阳视赤纬表系沿用东汉四分历之值。据《晋书·律历志下》和《宋书·律历志中》记载，其立春、春分和小满"日行黄道去极度"均分别为"106少弱"、"89少弱"和"69太"，与东汉四分历所载不同，姑两存之。我们更倾向于认为《晋书》和《宋书》律历志所载立春"106少弱"是可信的，因为现传本《续汉书·律历志下》原即记为此值，而作"校勘记"者将其改作"106少强"。

在此后相当长的时间内，历家均不列此表，到唐代李淳风麟德历才给出新表，称"黄道去极度"。李淳风还给出由此表计算每日太阳视赤纬值的方法，其术曰：

置刻差(c)，三十而一为度。不满三[十]约为分。伸减屈加其气初黄道度(f_0)，即每日所求(f)。[2]

---

① 《金史·历志上》、《元史·历志五》。

② 《旧唐书·历志二》。

表 1—16　诸历二十四节气太阳视赤纬表

历名 节气	东汉四分历、景初历	麟德历	大衍历	宣明历	应天历
冬至	115	115.3	115.20	$115\frac{17}{84}$	115.20
小寒、大雪	113 强、113 大强	114.1	114.35	$114\frac{46}{84}$	114.58
大寒、小雪	110 大弱、111 弱	111.7	111.90	$112\frac{25}{84}$	112.32
立春、立冬	106 少强(少弱)、107 少强	107.9	108.05	$108\frac{55}{84}$	108.67
雨水、霜降	101 强、102 少强	102.9	103.20	$103\frac{67}{84}$	103.81(82)
惊蛰、寒露	95 强、96 大强	97.3	97.30	$97\frac{80}{84}$	97.93(91)
春分、秋分	89 强(少弱)、90 半强	91.3	91.30	$91\frac{25}{84}$	91.31
清明、白露	83 少弱、84 少强	85.3	85.30	$84\frac{55}{84}$	84.67
谷雨、处暑	77 大强、78 半强	79.7	79.40	$78\frac{67}{84}$	78.79
立夏、立秋	73 少弱、73 半强	74.7	74.55	$73\frac{80}{84}$	73.92
小满、大暑	69 大弱(太)、70	70.9	70.70	$70\frac{25}{84}$	70.27
芒种、小暑	67 少弱、67 大强	68.5	68.25	$68\frac{4}{84}$	68.02
夏至	67 强	67.3	67.40	$67\frac{34}{84}$	67.39
文献出处	续汉书·律历志下、晋书·律历志下	旧唐书·历志二	新唐书·历志四上	新唐书·历志六上	宋史·律历志二

这里“刻差”即为式(1—10)中的 c 值，则有：$f=f_0\pm\frac{c}{30}$　　(1—13)

东汉四分历和景初历在应用二十四节气太阳视赤纬表求算任一日的太阳视赤纬值时，是依一次差内插法。而李淳风则已将各节气间太阳视赤纬的变化描述为是按等差级数变化的。实际上式(1—13)也为我们对麟德历二十四节气视赤纬表进行校算提供了依据，即表中两相邻节气的“晨前刻”之差的 2 倍乘以 72，除以 30，应等于两相邻节气“黄道去极度”之差。这就是说：

“黄道去极度”之差＝4.8×“晨前刻”之差

＝2.4×昼(或夜)漏刻之差

亦即昼(或夜)漏刻每增减 1 刻，黄道去极度则增减 2.4 度。昼(或夜)漏刻与黄道去极度变化的这一数量关系，霍融在汉和帝永元十四年(104)便已指出：“漏刻以日



长短为数，率日南北二度四分而增减一刻"[①]。李淳风只是应用了霍融早已提及的数量关系(依此关系考察东汉四分历所载昼夜漏刻与黄道去极度各值，并不全合，这说明刘洪、蔡邕似更注重由实测而得的结果)。依之，可将对麟德历二十四节气视赤纬表的校算结果列于表1－16中，其中斜体者为校改后的数值(当然，二至前后对称的节气的太阳视赤纬两两相等，亦可为校改的又一途径)。

一行大衍历亦载有二十四节气(定气)太阳视赤纬表(见表1－16)，大衍历二十四节气太阳视赤纬值与漏刻值之间也存在霍融所述的数量关系。大衍历又有求每日太阳视赤纬值之术：

> 又置消息定衰，满百为度，不满为分。各递以息减、消加气初去极度，各得每日去极定数。[②]

即：

$$每日去极定数＝某气初去极度\pm 消息定衰/100 \qquad (1－14)$$

此中"消息定衰"即如式(1－6)所示。

依式(1－14)，我们也可以对上一节中关于"陟降率"和"消息衰"值校正的可靠性进行验证。复算说明其校正是可信的，由之算得的"黄道去极度"有些不与表载值密合，这是因为表载值的分值已被一行有意识地表达为20、35等规整值，所以有些表载值与计算值存在5分以下的差异是正常的。

徐昂宣明历和王处讷应天历亦给出二十四节气"黄道去极度"表(其值亦引列于表1－16中)，由之可见，应天历乃取用宣明历之值，两者之差均不大于0.03度。其中清明和白露应天历载为84.77，而宣明历载为$84\frac{55}{84}$＝84.65，故应天历亦改作84.67。又，应天历惊蛰载为97.93，而与之相对称的寒露载为97.91，由宣明历惊蛰和寒露均为$97\frac{80}{84}$＝97.95，则应天历寒露宜改作97.93。宣明历二十四节气黄道去极度与夜半定漏之间并不存在如霍融所说的数量关系，而应天历的二十四节气黄道去极度与晨分之间大多符合霍融所述的数量关系，其不合者，显然是受宣明历的影响所致。

此后各历均采用边冈在崇玄历中开创的公式算法，这在第二章第五节中还要进一步讨论。

二、月亮极黄纬表

月亮极黄纬表首见于刘洪乾象历，称为月行"阴阳历"。其后，何承天元嘉历和

① 《续汉书·律历志中》。

② 《新唐书·历志四上》。

祖冲之大明历均沿用与乾象历相同的表格。这里所谓月亮极黄纬是指月亮距黄道南北的度值。该表格横行自黄白交点始，每隔一日设一栏，13 日余，共 14 栏（乾象历以恒星月长度之半入算，不够严密，而元嘉历和大明历均以交点月长度之半入算，趋于完善）。纵行设有三栏："兼数"——某日月亮极黄纬分值；"损益率"——相邻两天月亮极黄纬分值之差；"衰"[①]——相邻两天月亮极黄纬分值差之差（均以 12 为分母）。

刘焯皇极历和李淳风麟德历也给出月亮极黄纬表，横向栏之设同元嘉历；但其纵向设有二栏，皇极历称"去交衰"和"衰积"[②]，麟德历称"去交差"和"差积"[③]（均以 10 为分母），其含义均分别与乾象历的"损益率"和"兼数"相当。

一行大衍历月亮极黄纬表的横向栏改为 24 栏，即从黄白交点开始每隔$\frac{\text{周天度}}{24}$设一栏，称为"少阳初、少阳二、…、少阳五、少阳上、老阳初、老阳二、…、老阳五、老阳上、少阴初、少阴一、…、少阴五、少阴六、老阴初、老阴二、…、老阴五、老阴上"，合称为"爻目"。纵向设有三栏："加减率"——相邻两爻月亮极黄纬分值之差；"阴阳积"——某爻月亮极黄纬分值；"月去黄道度"[④]——某爻月亮极黄纬度分值（均以 120 为分母）。前者与乾象历的"损益率"相当，而后二者均与"兼数"相当。

在应用上述表格进行任一时日的月亮极黄纬值(p)的计算时，各历法所取算法有所不同，现分述如次。

乾象历、元嘉历和大明历应用的是一次差内插法。以大明历为例，其算法为：

求月去日道度(p)：置入阴阳历余(n)乘损益率(Δ_1)，如通法(26377)而一，以损益兼数(P_m)为定数，定数十二而一为度……则月去日道度也。[⑤]

依之则有：

$$p=\frac{1}{12}\left(P_m\pm\frac{n\cdot\Delta_1}{26377}\right) \qquad (1-15)$$

式中 n 为所求时日与月亮过黄白交点时之间的日距之余数，该余数是以通法为分母的通分值的形式出现的，故需以通法除之，然后入算。由上式知，其算法当为一次差内插法无疑。

皇极历的计算法有如下述：

求月入交去日道：皆同其数，以交余为秒积(n)，以后衰(Δ_2)并去交衰

---

① 《晋书·律历志中》。
② 《隋书·律历志下》。
③ 《旧唐书·历志二》。
④ 《新唐书·历志四下》。
⑤ 《宋书·律历志下》。



(Δ_1)，半之，为通数$\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)$。进，则秒积减(衰)[交]法(7356366)，以乘衰$(\Delta_1-\Delta_2)$，交法除，而并衰以半之；退者，半秒积以乘衰，交法而一，[以减衰]。皆加通数，秒积乘，交法除，所得以进退衰积(P_m)，十而一为度，不满者求其强弱，则月去日道数(p)。[①]

这里"交余"系指所求时日与月亮过黄白交点时之间的日距之余数，需以交法乘之，所得 n 值，才能达到"同其数"的要求。而"后衰"(Δ_2)则指相邻两日 Δ_1 值之差。那么，依上术文遂有下式：

对于进时(指 $p>P_m$ 时)：

$$p=\frac{P_m}{10}+\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(7356366-n)(\Delta_1-\Delta_2)}{7356366}+(\Delta_1-\Delta_2)\right]+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right\}\times\frac{n}{7356366\times 10}$$

此式可简化为：

$$p=\frac{1}{10}\left\{P_m+\left[(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{(\Delta_1-\Delta_2)n}{7356366\times 2}+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right]\frac{n}{7356366}\right\}\qquad(1-16)$$

该式也正与术文中对于退时(指 $p<P_m$)的算式相符，仅有的不同是 P_m 之后当为"－"号。这就是说，皇极历是应用了等间距二次差内插公式。

李淳风的麟德历亦有"求月入交去日道远近术"[②]，察其算法则与皇极历完全相同。其术文中"退者，半入余以乘差，总法而一"句后，亦脱"以减差"三字，应增补之。

有人认为大衍历月亮极黄纬数值表格中"阴阳积"推至四次差时恒等于0，这应是一行在依表格做进一步计算时试图应用三次差内插法的表征，而且认为其求"月去黄道定数"术也表明一行发明了三次差内插法的近似公式[③]。但也有人认为，"月去黄道定数"术乃不脱二次差内插法的范畴，并无三次差内插法的涵义[④]。

第七节　月离表和日躔表

一、月离表

月离表是关于月亮运动不均匀性改正的数值表。它首见于东汉刘洪乾象历中，一开始便是以表格的形式给出。其横向栏以月亮一近点周的日数为序，其纵向栏列出月亮每日实行度分等(各历法纵向栏目数不等，详见后)，而纵横栏交错处所

① 《隋书·律历志下》。
② 《旧唐书·历志二》。
③ 严敦杰：《中国古代数理天文学的特点》，《科技史文集》第1辑，1978年。
④ 曲安京，纪志刚，王荣彬：《中国古代数理天文学探析》，西北大学出版社，1994年，第281～283页。

列数值,即为某日的月亮实行度分等。历代绝大多数历法都给出了月离表,其基本结构自刘洪乾象历便已大致确定了下来,其内涵(亦即纵向各栏)依出现年代的先后可陈述于下。

其一,月亮每日实行度分值,首见于乾象历。它列出"日转度分"和"月行分"二栏,前者为月亮每日实行度分值,后者为每日月亮的实行分值,两者实际上是一回事,只是所取单位不同而已。

现所知历法中给出"日转度分"值的历法另有11种,分别称"月行迟疾度"(景初历和元嘉历)、"月行度"(大明历)、"月行迟疾度及分"(正光历与兴和历)、"逡程"(五纪历、正元历)、"离度"(乾元历)、"历定度"(仪天历)、"转定度"(授时历)等;给出"月行分"值的历法另有25种,分别称"月行分"(景初历)、"转分"(大业、大衍、五纪、正元和崇玄等历)、"速分"(皇极历)、"行分"(戊寅历)、"离程"(麟德历)、"历分"(宣明历)、"离分"(应天历)、"离差"(乾元历)、"历定分"(仪天历)、"转定分"(崇天、观天、纪元、统元、乾道、会元、淳熙、统天、开禧、重修大明、成天、庚午等12历)。

月亮每日实行度分值是月离表最基本的数据,它们应是历家在对月亮运动进行一段时间实测的基础上求算而得的,是从若干个近点周(以月亮近地点或远地点作为起始点)的逐日实测值中所取的某种平均值。也就是说,它们应是导致月亮运动不均匀的有关因素(中心差、出差、二均差等)的综合影响的结果。月离表的其他各项内容或者是由之衍生而来,或者与之有极密切的关系。

其二,相邻两天月亮实行度分值之差,首见于乾象历,名曰"列衰",与之取名相同者还有大衍、五纪、正元和仪天等历。此外还有14种历法给出该值,分别名曰"列差"(元嘉历和崇玄历)、"转法"(大业历)、"速差"(皇极历)、"离差"(麟德历)、"进退衰"(宣明历和纪元历)、"历衰"(崇天历)、"进退差"(观天、统元、淳熙、统天、开禧和成天等历)。

其三,月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差,首见于乾象历,名曰"损益率",景初、元嘉、正光、兴和、大业、戊寅等6种历法均与之同。而崇天历和观天历称之为"增减差",纪元、统元、乾道、会元、统天、开禧、成天等7种历法称之为"加减差"。

其四,月亮每日实行度分与月亮每日相对于恒星的平均度分之差的累积值,亦首见于乾象历,名曰"盈缩积",另有20种历法列有此值,其名称分别为"盈缩积分"(景初、元嘉、大明、大业和戊寅5历)、"盈缩并"(正光历)、"盈缩并率"(兴和历)、"迟疾度"(如上述崇天等12历再加上授时历)。

其五,每天月亮实行分与太阳每日平行分之差,首见于元嘉历,名曰"差法"。此值仅大明历和大业历继续采用,所取名称相同。

其六，月亮相对于恒星运行1分(指度分的分)时，月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差，首见于大明历，名为“损益率”。大衍历及其后所有历法(授时历除外)均给出该值，其中，除皇极历和麟德历分别称之为“加减”和“增减率”之外，其他各历均与大明历一样以“损益率”名之。需特别注意的是，这里所谓“损益率”与上述乾象历等中的“损益率”名同而实异，不可混同。

其七，月亮相对于恒星运行1分时，月亮每日实行分与月亮每日相对于恒星的平行分之差的累积值，首见于正光历，名曰“盈缩积分”，此外还有22种历法给出此值，其名称分别为：“朓朒积”(皇极、五纪、正元、宣明、崇玄和大衍6历)、“迟速积”(麟德历)、“先后积”(应天历)、“阴阳差”(乾元历)、“升平积”(仪天历)、“朏朒积”(崇天、观天、纪元、统天、开禧和成天6历)、“朏朒数”(统元、乾道、会元、淳熙4历)、“朏朒率”(重修大明历和庚午历)。

其八，月亮每日实行度分的累积值，首见于大衍历，名曰“转积度”，五纪、正元、崇玄、崇天和授时5历均与之相同；称之为“积度”者，有宣明、应天、重修大明和庚午4历；而仪天历名之曰“历积度”，统天历名之曰“转日度”。

历代月离表的内容大抵不出上述八项。依它们之间存在的数量关系，可对历代月离表作校勘，我们发现需作更改者达250处左右[1]。

在刘焯皇极历以前各历法，在应用月离表计算月亮运行的有关度值时，均用一次差内插法。而在皇极历及其以后，则以等间距二次差内插法求算之。据研究，依刘焯皇极历“推朔弦望定日术”，可列出下式[2]：

$$f(n+s)=f(n)+s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+s(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (1-17)$$

式中，$f(n)$为某日的“朓朒积”，s为入某日的平朔时刻数，Δ_1和Δ_2分别为某日和下一日的“加减”，$f(n+s)$即为月亮运行不均匀性导致的对平朔时刻的改正值。

在徐昂宣明历中更将上式简化为[3]：

$$f(n+s)=f(n)+s\Delta_1+\frac{s}{2}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (1-18)$$

式中Δ_1和Δ_2分别为某日和下一日的“损益率”，$f(n+s)$、$f(n)$和s的含义均与上式相同。

如果将刘洪首创并被后世历家广泛采用的，以一日作为一限的月离表统称作传统月离表，那么五代王朴钦天历和元代郭守敬授时历则曾给出了非传统的月离

---

① 陈美东，张培瑜：《月离表初探》，《自然科学史研究》，1987年，第2期。

② 李俨：《中算家的内插法研究》，科学出版社，1957年，第31页。

③ 钱宝琮，主编：《中国数学史》，科学出版社，1964年，第107页。

表。据《新五代史·司天考一》载，王朴将"一日之中，分为九限。每限损益，衰稍有伦，朓朒之法，可谓审矣"。王朴钦天历一近点月的长度为 $27\frac{3993.09}{7200}$ 日，乘以 9，得 248，即王朴是将一近点周均分为 248 限，也就是说其月离表的横向设有 248 栏，这显然要比传统月离表精细得多。钦天历"月离朓朒"术曰：

置入历分，以日躔朓朒定数，朓减、朒加之，程节(800)除之，为限数。余乘所入限损益率，程节而一，用损益其限朓朒为定数。

这里"入历分"指所求时日同近地点时距的分值(分母为 7200)，此分值需经太阳运动不均匀性的改正，设改正后的分值为 $T=\frac{T}{7200}$ 日，已知 $27\frac{3993.09}{7200}$ 日适为 248 限，则 1 限 $=\frac{27\frac{3993.09}{7200}}{248}$ 日，$\frac{T}{7200}$ 日相当于 $\frac{248T}{27\frac{3993.09}{7200}\times 7200}$ 限 $=\frac{T}{800}$ 限，这就是钦天历"程节"为 800 的来由。从该术文可知，钦天历月离表纵向至少应有"损益率"和"朓朒"二栏，其含义即上述"其六"和"其七"所示者。而且在求得限数及其余数以后，是以一次差内插法做进一步的推算的。所以，王朴加细月离表的主要动因之一应是使计算便捷。至于他是如何推得各限的"损益率"和"朓朒"的，我们推想可能是应用从实测而得的以一日为一限的月离表，依二次差内插法推出此二值，遂成 248 限月离表，这实际上是以二次差内插公式算法为基础的、简便的表格算法。

郭守敬授时历既给出以一日为一限的传统月离表，应用该表计算时是取三次差内插法(见第二章第二节)。同时，授时历又给出将一日分为 12.2 限(其一近点月等于 27.5546 日)的 336 限月离表，即横向分 336 栏，纵向则至少设有"损益分"和"迟疾度"二栏(其含义即上述"其三"、"其四")，在应用 336 限月离表时亦取一次差内插法。郭守敬构造此月离表的思路与王朴无异，当然应用三次差内插法是他较王朴更高明之处。

据研究[①]，由历代月离表所列月亮每日实行度的测量平均误差为 15′.8。其中，刘洪乾象历首创月离表便已达较高精度(平均误差为 11′.7)，而大明、皇极、乾元、统元、授时等 5 种历法的平均误差均为 10′左右，是为诸历中的佼佼者，崇玄历的平均误差为 7′.0，是为最佳者。

二、日躔表

日躔表是关于太阳运动不均匀性改正的数值表，首见于刘焯皇极历。它以表

① 陈美东，张培瑜：《月离表初探》，《自然科学史研究》，1987 年，第 2 期。



格形式给出。其横向以十二个月份和相应的二十四节气为栏目(张胄玄大业历同此,而自傅仁均戊寅历开始,各历法均省去十二个月份名);纵向含有"躔衰"、"衰总"、"陟降率"和"迟疾数"四个栏目;纵横交错处所列数据,即某节气"躔衰"等值。"躔衰"——相邻的节气初日太阳实行度分值与平行度分值之差(以"日干元"52为分母);"衰总"——冬至初日到某节气初日之间太阳实行度分值与平行度分值之差,亦即始于冬至到某节气初日"躔衰"的累积值;"陟降率"——因"躔衰"所引导致的平朔望时刻改正日数的分值(以"朔日法"1242为分母),它应等于$\frac{\text{“躔衰”}\times 1242}{\text{月亮每日平行度}\times 52}$(皇极历月亮每日平行度为13.36879度);"迟疾数"——"陟降率"的累积值。

此后绝大多数历法均给出与之相类似的日躔表,只是各历法所取纵向各栏的名称有所不同,所取用的分母名称和大小亦各不相同而已。它们与皇极历所取名称和大小相对应的各栏的状况可列如表1—17。

自北宋王处讷应天历开始,多数历法日躔表纵向又增加"常数"一栏(其后各历法的名称稍异,亦见于表1—17中),其意均为自冬至到各节气初日太阳的平均行度,它们分别等于某节气到冬至的节气数乘以$\frac{\text{周天度分}}{24}$。

历代日躔表的结构与内涵大抵如此,但内中有若干历法小有变化,特说明如下:

王处讷应天历需以"冬至常数"减"定日"、"常数"减"盈缩准"才分别得同皇极历"躔衰"、"衰总"相当者。此外,"损益准"的含义不清;"先后积"依前述方法计算的结果与现传本表列值均稍有不同,其因不明。均有待进一步查考。

赵知微重修大明历和耶律楚材庚午历的日躔表是将传统的日躔表析为二表:"二十四气日积度及盈缩"和"二十四气中积及朓朒"。两表纵向除了都有"损益率"、"初、末率"和"日差"(两表具体数值各异)三栏外,前表还有"日积度分秒"和"盈缩积"两栏,后表还有"中积经分、约分"和"朓朒积"两栏。前表"损益率"和"盈缩积"、后表"损益率"和"朓朒积"的含义分别与皇极历的"躔衰"和"衰总"、"陟降率"和"迟速数"相同。后表"中积经分、约分"与应天历的"常数"之意相同。而前表"日积度及分秒"即为各节气相对于冬至的太阳实行度,等于各节气相对于冬至的太阳平行度加上"盈缩积"。令"损益率"/平气日数(15.2185),即某节气内每经一日"损益率"的平均变动值,可称之为"中率"。前表中的"日差"等于相邻两节气的"中率"/平气日数,是为某节气内每经一日"中率"的平均变动值。于是前表的"初、末率"应等于"中率"$\pm\frac{\text{“日差”}\times(\text{平气日数}-1)}{2}$。后表"中积经分、约分"分别

表 1—17　皇极历及其他各历法日躔表纵向栏名称与分母值表

皇极	躔衰	衰总	日干元 52	陟降率	迟疾数	朔日法 1242		隋书·律历志下
大业	损益率	盈缩数	日法/10 114.4					隋书·律历志中
戊寅	同上	同上	气时法 1183					新唐书·历志一
麟德	躔差率	消息总	总法 1340	先后率	盈朒积	总法 1340		新唐书·历志二
大衍	盈缩分	先后数	通法 3040	损益率	朓朒积	通法 3040		新唐书·历志四上
五纪	同上	同上	通法 1340	同上	同上	通法 1340		新唐书·历志五
正元	同上	同上	通法 1095	同上	同上	通法 1095		同上
宣明	同上	同上	刻法 84	同上	同上	统法 8400		新唐书·历志六上
崇玄	升降差	盈缩分	10000	损益数	同上	通法 13500		新唐书·历志六下
应天	冬至常数减定日	常数减盈缩准	同上	损益准?	先后积?	元法 10002	常数	宋史·律历志一
乾元	阴阳分	阴阳度	元率 2940	损益率	阴阳差	元率 2940		同上
崇天	升降分	盈缩分	10000	损益率	朏朒积	枢法 10590	中积	宋史·律历志五
纪元	盈缩分	先后数	同上	同上	朒朏积	日法 7290	中积日	宋史·律历志十二
统元	同上	升降差	同上	同上	朏朒积	元法 6930	中积及余	宋史·律历志十六
乾道	同上	同上	同上	同上	同上	元法 30000	同上	同上
淳熙	同上	同上	同上	同上	同上	元法 5640	同上	同上
重修大明	损益率	盈缩积	同上	同上	朓朒积	日法 5230	中积经分、约分	金史·历志上
会元	盈缩分	升降差	同上	同上	朏朒积	统率 38700	中积及余	宋史·律历志十六
统天	同上	升降分	同上	同上	同上	策法 12000	中积日及余	宋史·律历志十七
开禧	同上	同上	同上	同上	同上	日法 16900	同上	同上
庚午	损益率	盈缩积	同上	同上	朓朒积	日法 5230	中积经分、约分	元史·历志五
成天	盈缩分	升降分	同上	同上	朏朒积	日法 7420	中积日及余	宋史·律历志十七
授时	盈缩加分	盈缩积	日周 10000					高丽史·卷五十二、古今律历考·卷四十



指平气日数的分数值与小数值。而后表的"初、末率"和"日差"的求取方法则与前表相同。

郭守敬授时历的日躔表与传统日躔表以一节气设一横向栏不同。它是以一日设一栏，计 365 栏，其纵向计有四栏："盈缩加分"是指每经一日的太阳实行度与平行度的差值；"盈缩积"是指某一日与冬至(或夏至)间太阳实行度与平行度差的累积值；"行度"指每经一日的太阳实行度值；"日差"系指相邻两日间太阳实行度之差。

由上述各纵向栏之间存在的数量关系，可对现传本各历法日躔表进行校算，发现隋唐各历法日躔表均无误，而自北宋及元代各历需校补者至少达 150 处[①]。

对历代日躔表内涵的分析可知，对各节气太阳实行度的实测值是日躔表的核心数据。在若干历法中，此核心数据存在着明确的传承关系：麟德历同皇极历；五纪历和正元历同大衍历，崇玄历仅与大衍历小异；而乾元历同崇玄历；应天历同宣明历，统元历仅与宣明历小异；淳熙、重修大明和庚午三历同纪元历。这就是说并非所有日躔表都是实测的结果。

自刘焯皇极历开始，在应用日躔表进行与太阳运动不均匀性有关的各项改正值计算时，就采用了等间距二次差内插法；一行则使用了不等间距二次差内插法[②]；而王恂、郭守敬等更发明了三次差内插法。这些计算方法一般都以文字表述的形式附于日躔表之后。而重修大明历和庚午历则在日躔表中列出同二次差内插法有关的数值(即前述"初、末率"、"日差"等)。授时历 365 横栏日躔表则是应用了三次差内插法进行计算而列出的(见第二章第二节)。在应用此表进行计算时仅用一次差内插法即可，其基本思路与授时历的 336 栏的月离表相通。

据研究[③]，历代历法日躔表的精度情况是：关于二十四节气太阳实行度值测定的平均误差，隋及唐初在 10′左右，唐一行大衍历降至 6′.6，自此到北宋在 5′到 6′间，北宋末姚舜辅纪元历及至元郭守敬授时历更降至 4′左右，其中以刘孝荣会元历平均误差为 3′.6，是为最佳结果。关于平朔望时日改正的平均误差，隋唐及北宋时期各历法在 2.7～3.4 刻之间变动，北宋纪元历以后各历法则在 2.1～2.5 刻之间变动，其中也以刘孝荣会元历获最佳结果。质言之，日躔表的编制肇自北齐张子信关于太阳运动不均匀性的发现，刘焯和张胄玄差不多同时将其引进历法，改善了定朔、太阳所在位置、交食以及五星运动等天文历法问题的推算。此后一行大衍历改进了日躔表，对太阳运动不均匀的总体描述趋于科学与合理，准确度有所提高。又

---

① 陈美东：《日躔表之研究》，《自然科学史研究》，1984 年，第 4 期。

② 李俨：《中算家的内插法研究》，科学出版社，1957 年，第 46 页。

③ 陈美东：《日躔表之研究》，《自然科学史研究》，1984 年，第 4 期。

其后，北宋末姚舜辅纪元历又使日躔表进一步精密化，并对后世产生很大影响。

第八节　黄赤道、黄白道和赤白道度差表

一、黄赤道度差表

黄赤道宿度之间坐标变换法的研究，始于东汉张衡。张衡在《浑天仪注》中以文字方式最早予以描述[①]。张衡是在特制的圆球上绘出黄赤道，用竹篾度量黄赤道度的变化，进而归纳出两者进退规律的。所谓黄道度乃是沿赤经圈在黄道上量取的度值，可称之为极黄经，同现今所说的黄经是不同的。所以，本节所讨论的黄赤道差应相当于赤经与极黄经之差。东汉末刘洪最先将张衡的研究成果引进他的乾象历中，并给予更简要的文字描述：

进退有差，起二分度后，率四度转增少，少每半者，三而转之，差满三止，历五度而减如初。[②]

这是说从春分到夏至、秋分到冬至之间（各 91.31 度）黄赤道度变换的方法。自春分、秋分开始，赤道度每经 4 度，黄道度增1/4度，如此者三，此后经 3 度亦增1/4度，于是每经这样 15 度而增 1 度。依此重复 3 次，于是经 45 度而增 3 度，此后转而为减。因为从春分（或秋分）到夏至（或冬至）计 91.31 度，刘洪指出，开始减1/4度的度距为 5 度，即"历五度而减如初"，严格地说应为历 5.31 度。此后则每经 4、4、3、4、4、4、3、4、4、4、3 度而减 1/4 度，到夏至（或冬至）黄赤道度相等。依此可列出表1－18。至于从夏至到秋分、冬至到春分之间黄赤道度的变换也列于表 1－18 中。刘焯皇极历又给出新的变换法，其术文曰[③]：

准冬至所在为赤道度，后于赤道四度为限，初数九十七，每限增一，以终百七。其三度少弱，平，乃初限百（九）[七]，（亦）每限（增）[损]一，终（百一十九）[九十七]，春分所在；因（百一十九）[九十七]，每限（损）[增]一，又终百（九）[七]，亦三度少弱，平，乃初限百七，每限损一，终九十七，夏至所在；又加冬至后法得秋分、冬至所在数。各以数乘其限度，百八[十]而一，累而总之，即黄道度也。[④]

这实际上是以文字描述方式给出的计算表格。依此，可列如表1－18所示。这

---

① 陈美东：《张衡〈浑天仪注〉新探》，《社会科学战线》，1984 年，第 3 期。

② 《晋书·律历志中》。

③ 该术文有错误，（　）为错字，[　]为经改正者。严敦杰已对术文做了重要校改，但不尽妥，需在其基础上，再做修订如上。严敦杰：《中国古代的黄赤道差计算法》，《科学史集刊》，1958 年，第 1 期。

④ 《隋书·律历志下》。

表 1—18　乾象等历黄赤道度差表

乾象历			皇极历				
赤道度	黄道度 分到至	黄道度 至到分	赤道度	黄道度 至到分	黄赤道度差	每限增损数	黄道度 分到至
4	4.25	3.75	4	3.78	$-\frac{97}{450}$	$-\frac{97}{450}$	4.22
8	8.5	7.57	8	7.57	$-\frac{195}{450}$	$-\frac{98}{450}$	8.43
12	12.75	11.25	12	11.35	$-\frac{294}{450}$	$-\frac{99}{450}$	12.65
15	16	14	16	15.12	$-\frac{394}{450}$	$-\frac{100}{450}$	16.88
19	20.25	17.75	20	18.90	$1\frac{45}{450}$	$-\frac{101}{450}$	21.10
23	24.5	21.5	24	22.67	$-1\frac{147}{450}$	$-\frac{102}{450}$	25.33
27	28.75	25.25	28	26.44	$-1\frac{250}{450}$	$-\frac{103}{450}$	29.56
30	32	28	32	30.21	$-1\frac{354}{450}$	$-\frac{104}{450}$	33.79
34	36.25	31.75	36	33.98	$-2\frac{9}{450}$	$\frac{105}{450}$	38.02
38	40.5	35.5	40	37.74	$-2\frac{115}{450}$	$-\frac{106}{450}$	42.26
42	44.75	39.25	44	41.51	$-2\frac{222}{450}$	$\frac{107}{450}$	46.49
45	48	43	47.31	44.82	$-2\frac{222}{450}$	0	49.80
50.31	53.06	47.56	51.31	49.06	$-2\frac{115}{450}$	$+\frac{107}{450}$	53.57

大衍历				
赤道度	黄道度 分到至	黄赤道度差	每限增损数	黄道度 至到分
5	5.50	$+\frac{12}{24}$	$+\frac{12}{24}$	4.50
10	10.96	$+\frac{23}{24}$	$+\frac{11}{24}$	9.04
15	16.38	$+1\frac{9}{24}$	$+\frac{10}{24}$	13.63
20	21.75	$+1\frac{18}{24}$	$+\frac{9}{24}$	18.25
25	27.08	$+2\frac{2}{24}$	$+\frac{8}{24}$	22.92
30	32.38	$+2\frac{9}{24}$	$+\frac{7}{24}$	27.62
35	37.63	$+2\frac{15}{24}$	$+\frac{6}{24}$	32.37
40	42.83	$+2\frac{20}{24}$	$+\frac{5}{24}$	37.17
45	48	+3	$+\frac{4}{24}$	42
46.31	49.31	+3	0	43.31
51.31	54.14	$+2\frac{20}{24}$	$-\frac{4}{24}$	48.48

续表

乾象历

赤道度	黄道度	
	分到至	至到分
54.31	54.81	53.81
58.31	60.56	56.06
61.31	63.31	58.31
65.31	67.06	63.56
69.31	70.81	67.81
73.31	74.56	72.26
76.31	77.31	75.31
80.31	81.06	79.56
84.31	84.81	83.81
88.31	88.56	88.06
91.31	91.31	0

皇极历

赤道度	黄道度	黄赤道度差	每限增损数	黄道度
	至到分			分到至
55.31	53.29	$-2\frac{9}{450}$	$+\frac{106}{450}$	57.31
59.31	57.52	$-1\frac{354}{450}$	$+\frac{105}{450}$	61.10
63.31	61.76	$-1\frac{250}{450}$	$+\frac{104}{450}$	64.87
67.31	65.98	$-1\frac{147}{450}$	$+\frac{103}{450}$	68.64
71.31	70.21	$-1\frac{45}{450}$	$+\frac{102}{450}$	72.41
75.31	74.44	$-\frac{394}{450}$	$+\frac{101}{450}$	76.19
79.31	78.66	$-\frac{294}{450}$	$+\frac{100}{450}$	79.96
83.31	82.88	$-\frac{195}{450}$	$+\frac{99}{450}$	83.74
87.31	87.10	$-\frac{97}{450}$	$+\frac{98}{450}$	87.53
91.31	91.31	0	$+\frac{97}{450}$	91.31

大衍历

赤道度	黄道度	黄赤道度差	每限增损数	黄道度
	分到至			至到分
56.31	58.94	$+2\frac{15}{24}$	$-\frac{5}{24}$	53.68
61.31	63.69	$+2\frac{9}{24}$	$-\frac{6}{24}$	58.93
66.31	68.39	$+2\frac{2}{24}$	$-\frac{7}{24}$	64.23
71.31	73.06	$+1\frac{18}{24}$	$-\frac{8}{24}$	69.56
76.31	77.69	$+1\frac{9}{24}$	$-\frac{9}{24}$	74.93
81.31	82.27	$+\frac{23}{24}$	$-\frac{10}{24}$	80.35
86.31	86.81	$+\frac{12}{24}$	$-\frac{11}{24}$	85.81
91.31	91.31	0	$-\frac{12}{24}$	91.31



是自冬至到春分和自春分到夏至之间黄赤道度的变化情况，其中春分到夏至之间的"黄赤道度差"和"每限增损数"均与冬至到春分之间者相等，但正负号相反。而夏至到秋分、秋分到冬至之间黄赤道度的变化情况则分别与冬至到春分、春分到夏至之间者相同。由表 1－18 则可求得任一度值时黄赤道度的变换。

一行也给出黄赤道度变换的新方法，其术文曰：

> 黄道之差，始自春分、秋分，赤道所交前后各五度为限。初，黄道增多赤道二十四分之十二，每限损一，极九限，数终于四，率：赤道四十五度而黄道四十八度，至四立之际一度少强，依平。复从四起，初限五度，赤道增多黄道二十四分之四，每限益一，极九限而止，终于十二，率：赤道四十五度而黄道四十二度，复得冬、夏至之中矣。[①]

依之，也可列出表格，如表 1－18 所示。其中计算夏至（或冬至）到秋分（或春分）之间的黄道度时，表列"黄赤道度差"和"每限增损数"的正负号应相反。

五代王朴钦天历[②]、北宋王处讷应天历、吴昭素乾元历和史序仪天历[③]都分别以文字描述的方式给出黄赤道度变换法，各限的划分都与大衍历相同，但各家所给的每限增损数和黄赤道差的极大值（约当赤道度为 45 度时）各异[④]。现将这四种历法的此二值列如表 1－19。

表 1－19 钦天等历黄赤道度每限损益数和极大值

历名	每限损益数	黄赤道度差极大值
钦天历	40、35、30、25、20、15、10、5、0（以 72 为分母）	$2\frac{1}{2}$度
应天历	12、10.5、9、7.5、6、4.5、3、1.5、0（以 20.2 为分母）	$2\frac{68}{101}$度
乾元历	9、8、7、6、5、4、3、2、1（以 16.8 为分母）	$2\frac{57}{84}$度
仪天历	107、97、87、77、67、57、47、37、27（以 202 为分母）	$2\frac{995}{1010}$度

依各历法的每限损益数即可列出如表 1－18 中大衍历黄赤道差表相类似的表格。

以上便是中国古代历法中所给黄赤道度差表的状况。在应用这些表格计算

① 《新唐书·历志三下》。

② 《新五代史·司天考一》。

③ 《宋史·律历志一》。

④ 严敦杰：《中国古代黄赤道差计算法》，《科学史集刊》，1958 年，第 1 期。

时，先推算所求赤道度数所入的限数和余数，再以余数为引数，依一次差内插法计算之。自东汉张衡首创其法，便奠定了此表的基本形式。刘焯则将其形式趋于完备，他应用了均匀的分限法和每限损益数递增减的方法。后者对后世历家产生很大影响，它从理论上讲要比张衡一律用1/4度为损益数来得合理。而一行改4度1限为5度1限，此法为后世历家所录用。

黄赤道度差极大值应约等于2.5度。由之可见，皇极历和钦天历所取值均为2.5度，是相当接近的；应天历和乾元历所取值为2.67度，还比较接近；而刘洪（张衡）、一行和史序则取3度或接近于3度，其误差是较大的。

自宋行古崇天历开始，及其后各历法均前承边冈崇玄历的公式算法来计算黄赤道度差，这在第二章第四节中还要论及。

二、黄白道度差和赤白道度差表

这是一种用于计算黄道宿度与白道宿度之间以及赤道宿度与白道宿度之间变换的表格。首见于刘焯皇极历，是以文字描述的方式给出的，其术文曰：

> 准交定前后所在度（181.8967）半之，亦于赤道四度为限，初十一，每限损一，以终于一。其三度（强）[弱]，平。乃初限数一，每限增一，亦终十一，为交所在。即因十一，每限损一，以终于一。亦三度（强）[弱]，平，又初限数一，每限增一，终于十一，复至交半。返前表里，仍因十一增损，如道得后交及半交数。各积其数[乘限度]，百八十而一，即道所行每与黄道差数。[①]

这是关于自黄白交点（Q_1）前后90.94335度到另一黄白交点（Q_2），以及Q_2前后90.94335度区间黄白道宿度变换状况的描述。这里所谓黄白道宿度是指以通过赤极的赤经圈分别在黄道、白道上量取的度值，它们可分别称为"极黄经"和"极白经"。依术文意，亦可列出如同表1－18相类似的表格。表1－18中的"赤道度"应改为"黄道度"4、8、…、44、46.94、50.94、…、90.94（其中46.94－44＝2.94，为三度弱，与表1－18中的47.31－44＝3.31，即三度少弱不同）；"每限增损数"应分别为$\frac{-11}{45}$、$\frac{-10}{45}$、…、$\frac{-1}{45}$、0、$\frac{1}{45}$、$\frac{2}{45}$、…、$\frac{11}{45}$；"黄道度"和"黄赤道度差"应改为"白道度"和"黄白道度差"，其计算方法则相类似。如当"黄道度"为44度时，"黄白道度差"等于$-\frac{66}{45}$（＝－1.47度，此即黄白道度差的极大值），"白道度"应等于$44-\frac{66}{45}=42\frac{24}{45}$度。

① 《隋书·律历志下》。



一行大衍历也以文字描述方式给出黄白道度差，而且还给出了赤白道度差的换算表，其术文曰：

> 各视月交所入七十二候距交初中黄道日度，每五度为限，亦初数十二，每限减一，数终于四，乃一度(强)[弱]，依平。更从四起，每限增一，终于十二，而至半交，其去黄道六度。又自十二，每限减一，数终于四，亦一度(强)[弱]，依平。更从四起，每限增一，终于十二，复与日轨相会。各累计其数，以乘限度(5)，二百四十而一，得度。不满者，二十四除，为分。为月行与黄道差数。距半交前后各九限，以差数为减；距正交前后各九限，以差数为加。计去冬至、夏至以来候数，乘黄道所差，十八而一，为月行与赤道差数。①

依此亦可列出与表 1－18 相类似的表格，只是表 1－18 中的"赤道度"、"黄道度(分到至)"、"黄赤道度差"和"黄道度(至到分)"需分别改作"黄道度"、"白道度(正交至半交)"、"黄白道度差"和"白道度(半交至正交)"。其"黄道度"值分别为 5、10、…、45、45.94(0.94 即为一度弱)、50.94、…、90.94。其"每限增损数"值则分别为$+\frac{12}{48}$、$+\frac{11}{48}$、…、$+\frac{4}{48}$、0、$-\frac{4}{48}$、$-\frac{5}{48}$、…、$-\frac{12}{48}$。于是，"黄白道度差"、"白道度(正交至半交)"、"白道度(半交至正交)"各值均可依与表 1－18 相类似的方法计算。如当"黄道度"等于 45 度时，其"黄白道度差"为＋1.5 度(此即黄白道度差的极大值)，"白道度(正交至半度)"和"白道度(半交至正交)分别等于 46.5 度和 43.5 度。

也依上术文，赤白道度差应等于由上述方法求得的黄白道度差乘以所求时日距冬至(或夏至)的 72 候的候数(在 0～36 之间)，再除以 18。

王朴钦天历也载有黄白道度差和赤白道度差的变换法，其法与大衍历黄白道度差基本相同，其稍异者是它将黄道分为 8 节(二至、二分和四立)，每一节均分为 9 限，即 1 限约为 5.07 日(计算黄白道度差时，是以 5 日为 1 限，在四立前后有 1 度少强作所谓"依平"处理)。这样也可依类似于表 1－18 所示的方法列出相应表格。在此基础上，钦天历又有术文曰：

> 各置所入限度，[遇半倍使]，以限率(5.07)乘之，为泛差。其正交、中交前后各九限，以距二至之宿限数乘之；半交前后各九限，以距二分之宿限数乘之，皆[十八约之]，如经法(72)而一，为黄道差。……四约泛差，以黄道差减之，为赤道差。②

① 《旧唐书·历志三》，《新唐书·历志四上》。

② 《新五代史·司天考一》。

这里“正交”、“中交”指黄白道的两个交点，“半交”指距黄白交点前后约 90.94 度处。正交、中交点距冬至(或夏至)的限数在 0～18 之间，半交点距春分(或秋分)的限数亦如之。考虑到钦天前后有关历法(如大衍历和下面将要论及的应天历)黄赤道差为黄白道差的 2 倍的事实，上引术文中应加“遇半倍使”(应天历用语，取其一半的意思)；又虑及钦天历上术文中有以限数(0～18)乘“泛差”的步骤，当“正交”或“中交”正好在春分(或秋分)点时，限数正等于 18，此时黄白道度值应正好等于“泛差”/72，所以在限数乘以“泛差”后，还应以 18 除之。于是术文中“如经法而一”之前，当补“十八约之”四字。依此，钦天历求黄白道度差的算法应为：$\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{2}\times\frac{\text{限数}}{18\times 72}$(所入限度可由上述表求得)。而：

$$\text{赤白道度差}=\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{8}-\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{2}\times\frac{\text{限数}}{18\times 72}$$

$$=\frac{\text{所入限度}\times 5.07}{8}\times\left(1-\frac{\text{限数}}{18\times 18}\right)$$

王处讷应天历的黄白道度差和赤白道度差变换法，介乎大衍历和钦天历之间，它采用大衍历的分限法和应用 72 候数之法入算(各限的初数与每限损益数又均与应天历的黄赤道度差的计算相同)，又采用了钦天历求黄白道度差法的后半部分。其术文曰：

> 交初、交中、半交，各以[所入]限数，遇半倍使，乘限度(5)为泛差。其[交初]、交中前后各九限，以距二至之宿前后候数乘之；半交前后各九限，各至二分之宿前后候数乘之，皆[十八约之]，满百[一]而一，为黄道差。……倍泛差，退一位，又以黄道差减，为赤道差。[1]

这里“交初”、“交中”即钦天历的“正交”与“中交”。依术文意，其黄白道度差应等于可由上表求得的“所入限数”(相当于钦天历的“所入限度”)乘以$\frac{5\times\text{“候数”}}{2\times 18\times 101}$(除以 18 的理由同上，又由表 1—19 知，应天历的度母应为 101)。而：

$$\text{赤白道度差}=\frac{\text{“所入限度”}\times 5\times 2}{2\times 10}-\frac{5\times\text{“候数”}\times\text{“所入限数”}}{2\times 18\times 101}$$

$$=\text{“所入限数”}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{5\times\text{“候数”}}{2\times 18\times 101}\right)$$

此后各历法黄白道度差和赤白道度差均以公式法计算之。在第二章第四节中，我们还将做进一步的介绍。

---

[1] 《宋史·律历志二》。



第九节 五星运动不均匀性改正表

一、五星入气加减表

在北齐张子信发现五星运动不均匀性之后，刘焯在其皇极历中便引进了用于推算五星运动不均匀影响的有关表格，这是以文字方式描述的，可称之为五星入气加减表。张胄玄大业历、傅仁均戊寅历、李淳风麟德历和徐承嗣正元历亦给出此类五星入气加减表，是为中国古代五星运动不均匀性改正表的早期形式。现分别讨论如次。

(一)木星

皇极历术曰：

平见，在春分前，以四乘去立春日；小满前，又三乘去春分日，增春分所乘者；[白露前，以四乘去小暑日][1]，白露后，亦四乘去寒露日；小暑，加七日；小雪前，以八乘去寒露日；冬至后，以八乘去立春日，为减，小雪至冬至减七日。[2]

这是五星入气加减法的典型描述方式。说的是由于木星运动不均匀性的影响，使木星晨见东方的真实时间(常见)较平见日(由木星平均会合周期计算而得的晨见东方的时间)或超前或滞后，超前或滞后的时间改正值则因节气的不同而各异。如对于立春到春分这一时段中某一日的改正值，需依一次差内插法计算，即以该日与立春日的时距乘以4，再除以转法52，即得。别的时段的改正值计算均仿此。当然，术文中直书“加七日”或“减七日”的时段的改正值则无需做这样的计算。

若以改正日及分为纵坐标，以二十四节气为横坐标，按上术文意，可以给出皇极历木星运动不均匀性改正的曲线图(图1—1)。

大业、戊寅、麟德和正元四历的木星入气加减法[3]，与皇极历大同小异，依之，亦可绘出相应的改正曲线，如图1—1所示。这里需要指出的是：在计算各时段的改正值时，这四种历法采用的除数(与皇极历的转法相当者)分别为42640、676、670和1095。大业、戊寅二历改正曲线的差异仅仅在于：大业历取“十寒后十日”，而戊寅历取其后五日余的“立春”作为关节点。在图1—1中，我们是以大业历为准给出改正曲线的。正元历的改正曲线则与麟德历全同。

---

① 综观术文，对于小暑到白露间的变化状况未述及，当为脱漏，特据历理补之。

② 《隋书·律历志下》。

③ 《隋书·律历志中》、《新唐书·历志》一、二和五。

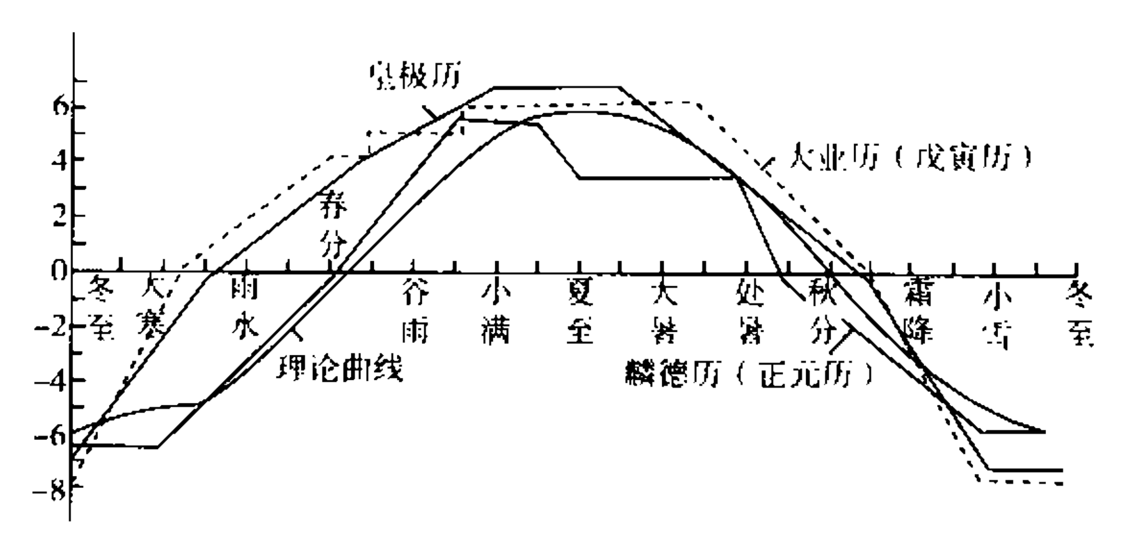


图 1-1　皇极等历木星运动不均匀性改正曲线图

(二)火星

皇极历术曰：

> 平见，雨水前，以十九乘去大寒日；清明前，又十八乘去雨水日，增雨水所乘者(此间应加"清明至夏至加二十七日"句)；夏至后，以十六乘去处暑日；小满(应为处暑)后，又十五日('十五日'三字为衍文，需改增'二十八乘去白露日，减处暑所乘者'十四字)；寒露前，以十八乘去白露日；小雪前，又十七乘去寒露所乘者；大雪后，二十九乘去大寒日，为减，小雪至大雪减二十五日。

上术文中已明确无疑地列出了从大寒到雨水、雨水到清明、夏至到处暑、白露到寒露、寒露到小雪、小雪到大雪、大雪到大寒七个时段的改正值，中缺清明到夏至、处暑到白露两个时段，需设法予以补正。

已知大寒经雨水到清明，改正值累增 $2\times15.21875\times\frac{19}{52}+3\times15.21875\times\frac{18}{52}=26.9255\approx27$(日)

清明到夏至的改正值应持平，均等于 27 日，故需在术文"夏至后"句前增加一句，即"清明至夏至加二十七日"。又，已知从夏至到处暑，改正值累减 $4\times15.21875\times\frac{16}{52}=18.7308$ 日，从处暑到白露，改正值应累减 $26.9255-18.7308=8.1947$ 日，于是该时段改正值的每日变率应等于 $8.1947\times52/15.21875=28$。依此，我们对上述术文做了"二十八乘去白露日，减处暑所乘者"14 字之补正。

据如上做了补正后的术文，我们可以给出皇极历火星运动不均匀性改正的曲线图。大业历、戊寅历、麟德历和正元历的火星改正曲线亦可据有关术文作出(图 1-2)，戊寅历基本上与大业历一致，而正元历则与麟德历大体相同。

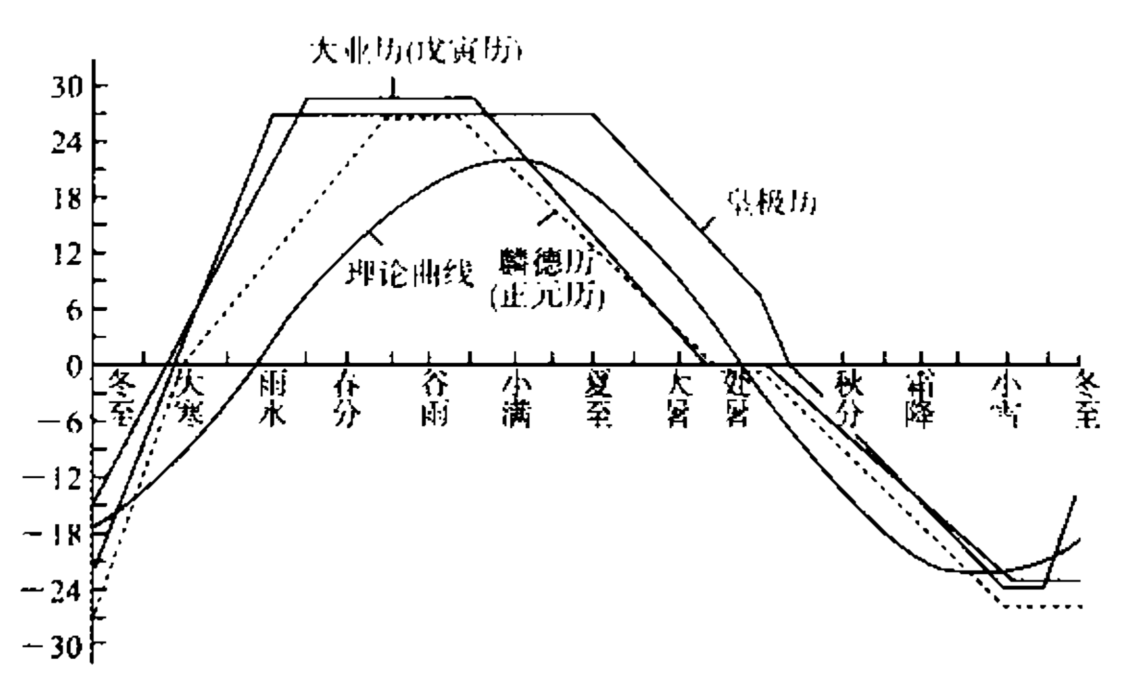


图 1－2 皇极等历火星运动不均匀性改正曲线图

(三)土星

皇极历术曰：

平见，在大暑前，以七乘去小满日；寒露后，九乘去小雪日，为加，大暑至寒露加八日。小寒前，以九乘去小雪日；雨水后，以四乘去小满日；立春后，又三乘去雨水日，增雨水所乘者，为减，小寒至立春减八日。

依之，可得皇极历土星运动不均匀性改正曲线（图 1－3）。同理，依大业、戊寅、麟德和正元四历的有关术文可得相应的改正曲线，亦见图 1－3。此中，正元历与麟德历全同。戊寅历土星入气加减法的术文有小误，需略做修正："入大暑，日增所加百八十一分。入处暑，均加九日，入白露初日，加六千二分。"这里"均加九日"与"加六千二分"显然是一个意思，而 6002/676＝8.88 日，则 9 日仅是 8.88 日的约值。依 6002 分计，从大暑到处暑二节气（30.4375 日）间改正值的变率应为 6002/30.4375≈197，故术文中，"百八十一分"应为"百九十七分"之误。

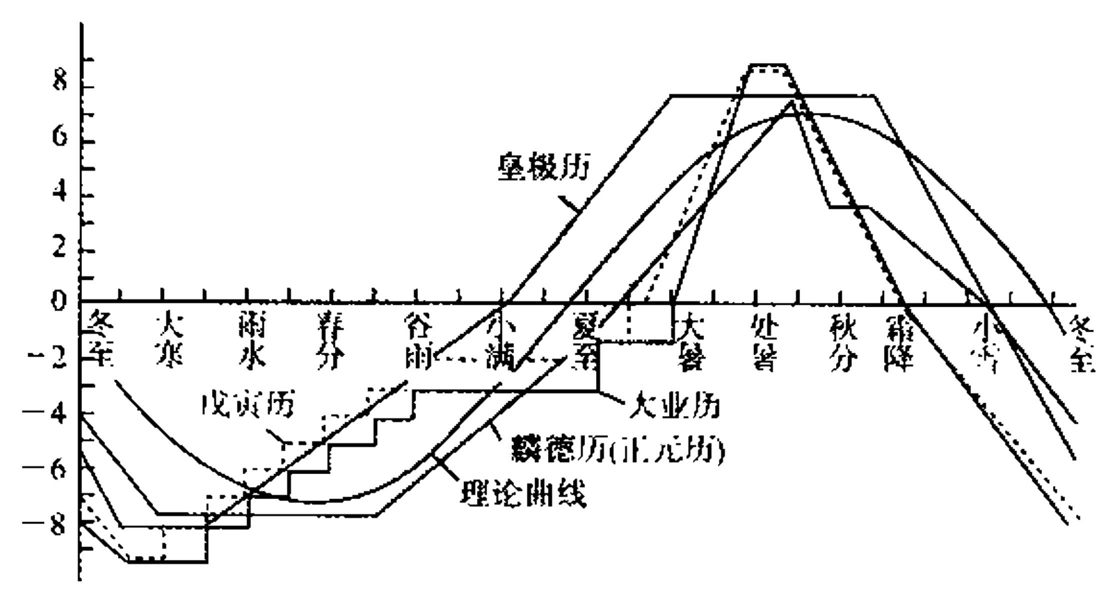


图 1－3 皇极等历土星运动不均匀性改正曲线图

(四)金星

皇极历术曰：

夕平见，在立秋前，以六乘去芒种日，秋分后，以五乘去小雪日；小雪后，又四乘去大雪日，增小雪所乘者，为加，立秋至秋分加七日。立春前，以五乘去大雪日；雨水前，又四乘去立春日，增立春所乘者，清明后，以六乘去芒种日，为减，雨水至清明减七日。……晨平见，在小寒前，以六(应为五)乘去冬至日；立春前，又五(应为六)乘去小寒日，增小寒所乘者；芒种前(应为后)，以六(应为五)乘去夏至日；立夏前(应为后)，又五(应为六)乘去芒种日，增芒种所乘者，为加，立春至立夏加五日。小暑前，以六(应为五)乘去夏至日；立秋前，又五(应为六)乘去小暑日，增小暑所乘者；大雪后，以六(应为五)乘去冬至日，立冬后，又五(应为六)乘去大雪日，增大雪所乘者，为减，立秋至立冬减五日。

在“晨平见”术文中，“立夏前”与“芒种前”的两个“前”字均应为“后”之误，这是显而易见的。又，既然“立春至立夏加五日”和“立秋至立冬减五日”，但是，自冬至经小寒到立春，自立夏经芒种到夏至，自夏至经小暑到立秋，以及自立冬经大雪到冬至改正值的增减是均为 $15.21875\times\frac{6}{52}+2\times15.21875\times\frac{5}{52}=4.68$ 日，两相矛盾。若将各段的日增减分互换，则有：$15.21875\times\frac{5}{52}+2\times15.21875\times\frac{6}{52}=4.98\approx5$ 日，于是两相吻合，故应据改。依之，可给出皇极历金星运动不均匀性改正曲线(图1—4)。

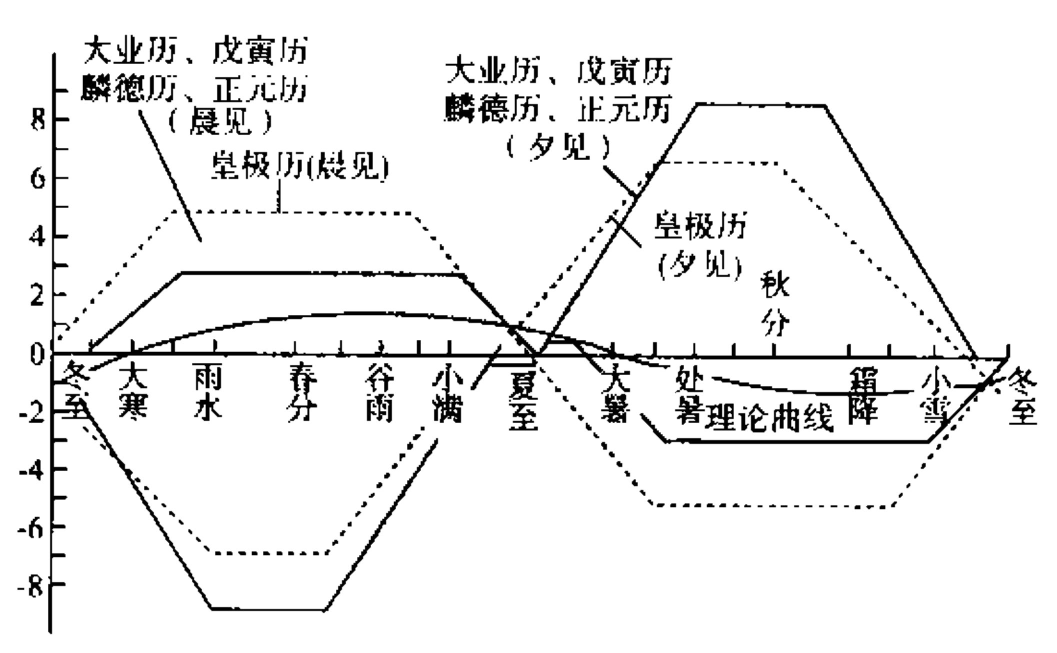


图1—4　皇极等历金星运动不均匀性改正曲线图

在大业历金星人气加减法术文中，“夕平见，在启蛰前，以六千二百九十乘去小



雪日数"句,"小雪"应改为"冬至",因为通观整个术文,改正曲线具有明显的对称性,与之相应的时段为清明至芒种、夏至至处暑、寒露至大雪,均相距四个节气,而启蛰至小雪却为六个节气,启蛰无误,与之相距四个节气者应是冬至,故据改。戊寅、麟德和正元三历法的金星入气加减法均与大业历相同。依之,亦可作改正曲线如图1—4。

(五)水星

皇极历术曰:

夕应见,在立秋后、小雪前者不见;其白露前、立夏后,时有见者。……晨应见,在立春后、小满前者不见;其惊蛰前、立冬后,时有见者。

显然,这仅仅是一种定性的描述,而且是不连续的,即对各节气状况的描述是间断性的,甚至在对夕应见和晨应见作分别描述时,也还存在彼此矛盾之处。据此,我们无法给出它的改正曲线。这说明刘焯对于水星运动不均匀性的认识是十分粗疏的。

大业历小有改进,其术曰:

晨平见,在雨水后、立夏前者,应见不见。……从霜降至小雪加一日,冬至至小寒减四日,立春至雨水减三日。冬至前,一去三,二去二,三去一。

夕平见,在处暑后、霜降前者,应见不见。……从谷雨至夏至,减二日。

这是一种半定性半定量的描述,而且仍是不连续的,我们还难于据之作出相应的改正曲线来。但是它在分别描述晨见、夕见的改正值时,已经消除了自身的内在矛盾,更重要的是,它真切地反映了人们对水星运动不均匀性改正进行定量化描述的初始尝试。

到戊寅历,对于水星运动不均匀性改正的描述,依然是半定量半定性的,只是描述的连续性有所提高,但就总体的水平看,并无实质性的进展。而麟德历和正元历则基本上沿袭了戊寅历的水星入气加减法。这些都为我们留下了从定性向定量描述过渡的历史轨迹。

二、五星盈缩历

自一行大衍历开始,出现了五星运动不均匀性改正的新型表格,这不但是在形式上的一种改进,更重要的是在内涵上的重大变革。刘焯等人的五星入气加减法是用于五星晨见时刻的改正,而新型表格则用于五星任一时刻的改正,即将五星运

动不均匀性的改正推广到各种不同的时段。对于这种新型表格，大衍历称之为“五星爻象历”，徐昂宣明历称之为“五星平见加减历”，宋行古崇天历以后各历法均称之为“五星盈缩历”。其名称虽不同，实质却无异。下面为叙述方便，统称之为盈缩历。

各历法对盈缩历横行的总称各异，有“爻目”(大衍历和五纪历)、“变数”(宣明历)、“画数”(崇玄历)、“限数”(仪天历)、“会数”(崇天历)、“策数”(观天、纪元、统元、乾道、淳熙、会元、统天、开禧、成天、重修大明、庚午等 11 历)；但它们都把横向分为 24 栏，这一点是相同的，不过，其名称又各异：大衍历和五纪历称：少阳初、少阳二、……、少阳五、少阳上、少阴初、少阴二、……、少阴五、少阴上。宣明历称：阳初、阳二、……、阳十二、阴初、阴二、……、阴十二。崇玄历称：初、二、……、十二。应天历称：初、二、……、十一、末。乾元历称：前限初、一、……、五、末限初、一、……、五、后限初、一、……、七、末限初、一、二、三。仪天历称：一、……、十一、末。崇天、观天、统元、乾道、淳熙、会元、统天、开禧、成天 9 历称：初、一、……、十一。纪元、重修大明和庚午 3 历称：一、二、……、十二。

各历法盈缩历相邻两横向栏的度距分别为：

大衍历和五纪历：$“爻象”=\frac{“策实”+“变差”}{24\times“通法”}$度。

宣明历：$“变策”=\frac{“章岁”+\frac{“变差”}{“秒母”}}{24\times“统法”}$度。

崇玄历：把周天度分为“盈限”和“缩限”两段(其中土、水二星两段略等)，每段又各等分成 12 栏。于是，前段度距$“盈画”=\frac{“盈限”}{12}$度，后段度距$“缩画”=\frac{“缩限”}{12}$度。应天、乾元、仪天 3 历的划分法同崇玄历，只是名称各异。应天称“阳限”和“阴限”，乾元称“前限”和“后限”，仪天称“上限”和“下限”。

纪元历：$“历策”=\frac{“历率”}{24\times“日法”}$度。

重修大明历和庚午历：$“历策”=\frac{“历率”}{24\times“历度法”}$度。

其他各历法：“历策”(或称“会策”)$=\frac{“周天度”}{24}$度。

设第 n 栏与第 1 栏的度距为 S_n，对于崇玄历，其前段 $S_n=n\times$“盈画”，后段 $S_n=$“盈限”$+n\times$“缩画”，$n=0、1、2、\cdots、11$，应天、乾元、仪天 3 历与之类同。对于其他各历法，$S_n=n\times$“爻象”(或“变策”、“历策”、“会策”)，$n=0、1、2、\cdots、23$，其 S_n 即等于或约等于 $n\times15°$。



大多数盈缩历的纵向只设两栏：一曰“损益”（或“损益率”）；一曰“进退”（大衍历）或“进退积”（五纪历）或“盈、缩差积”（崇玄历）或“阳、阴积”（应天历）或“差度”（乾元历）或“增、减定度”（仪天历）或“盈、缩积度”（崇天历及其后各历法均同此）。宣明历只设前一栏，名曰“加减”。应天历增“阳变分”和“阴变分”二栏；仪天历增“上限度分”和“下限度分”二栏。其算法均类同于崇玄历的 S_n，此时 $n=1、2、\cdots、12$。乾元历增“差分”栏而无“损益”栏。大多数历法盈缩历纵向前后二栏的关系很明确，即后栏是为前栏的累积值。唯应天历的“损益率”和乾元历的“差分”二项的算法不明，待考。

依上述关系和某些盈缩历的“损益率”、“进退积”存在的对称性，可对历代盈缩历进行订正，发现其讹误、脱漏或为衍文者凡 220 余处。[①]

各历法均有计算五星“平合入历”——平合与盈缩历第一栏间度距（S）的算法。已知 S，平合入盈缩历的哪两栏之间可知，再用内插法可求得相应的进退定数，以之进加退减平合日算，为常合日算，即“常合日”＝“平合日”±“进退定数”。这里“进退定数”就是当度距为 S 时的 Δ_i 值。那么，盈缩历所列的“进退积”，即为与第 1 栏的度距为 S_n 时的 Δ_i 值，而“损益率”则是相邻两栏间的 Δ_i 值之差，亦即每经一栏五星实行度与平行度之差。

遍察 100 个盈缩历第 1 栏的 Δ_i 值，除宣明历土星不等于零外，其余全为零（应天历木、火二星稍稍大于零，可姑且视为零）。又，“损益率”正最大值之所在，有3/4强的盈缩历均在第 1 栏前与后，说明这些盈缩历的第 1 栏即为五星近日点。另有1/4 弱盈缩历第 1 栏前后的“损益率”稍小于正最大值，其正最大值之所在，除崇玄等 3 历土星在第 4 栏前后，偏离稍大外，其他均在第 2、23、24 栏前后，只是小有偏离。我们认为，这种偏离是由于 Δ_i 的观测误差造成的，而它们既以第 1 栏的 Δ_i 为零为起算点，那么，第 1 栏当是盈缩历制定者所认定的五星近日点。唯有宣明历有些例外，其木星“损益率”正最大值在第 13 栏前后，则第 1 栏应为远日点；其土星，第 1 栏 Δ_i 远远大于零，而 Δ_i 值为零和“损益率”正最大值均在第 9 栏前后，所以其近日点当在第 9 栏。

我们以为，盈缩历的 Δ_i 值是由实测得到的。经长期观测，首先可以确定五星运行速度最快的一点——近日点，由此起算，分别测得 S_n 时五星的实行度，减去相应的平行度 S_n，即得各 Δ_i 值。该值实际上就是五星循各自的椭圆形轨道运行的实际度值与沿圆形轨道运行的相应平均度值之差。

考察 100 个盈缩历的 Δ_i 值，大致有四种情况：（Ⅰ）前后两段的 $|\Delta_i|$ 值两两对

① 陈美东：《古历新探》，辽宁教育出版社，1995 年，第 448～455 页。

称，且前后两段自身的 Δ_t 值亦两相对称，约占全部盈缩历的 1/2 弱；（Ⅱ）前后两段两两对称，但前后两段自身不对称，约占 1/8；（Ⅲ）前后两段不对称，而前后两段自身对称，约占 1/4 强；（Ⅳ）无对称关系可言者，约占 1/8。从历法年代先后看，大衍历、五纪历五星均取（Ⅰ）式。自宣明历起就有所变化，火、土二星取（Ⅳ）式，木、金、水三星取（Ⅰ）式。而崇玄等四历，对木、火、金三星采用了前后段不均分的方法，这本身就含有不对称性的意义，对土星则取（Ⅲ）式或（Ⅳ）式，水星取（Ⅰ）式或（Ⅱ）式。所以，除水星外，崇玄等四历都采取了前后段不对称式。崇天历，对于木、土、火三星取（Ⅳ）式，金、水二星取（Ⅰ）式。其后各历法总的趋势是：对于土星和木星的大部分取（Ⅲ）式或（Ⅳ）式，对于水星和金、火二星的大部分取（Ⅰ）式或（Ⅱ）式。这些情况表明，至少从宣明历始，历法家已经较普遍地发觉盈缩历 Δ_t 值不对称性的问题，对木、土二星的认识则更充分些。这是人们对五星（特别是木、土二星）的 Δ_t 值进行了长期实测的有力证明。

历代盈缩历之间有不少存在前后继承的关系，它们可分为若干个系统。大衍历和五纪历的五星构成一个系统。宣明历的五星独树一帜。崇玄、应天、乾元和仪天四历组成一个系统，其中仅应天历土星和仪天历金星有较大差异。崇天历五星自成一系，此中金、水二星对后世历法影响巨大，除会元历金星后段有相当大变动外，其余都是以崇天历为范本，略加修订而已。对于火、木、土三星，观天历和纪元历各自成一系。其后，火星，纪元历的影响颇大，除统元历前段同崇天历，后段同观天历外，其他各历法或全同纪元历，或仅稍作修正。木星，统元历和淳熙历各自成一体；乾道历前段依纪元历，后段依崇玄历；其他各历法可分为两支：一支继纪元历，有重修大明、庚午和授时三历；一支继淳熙历，有会元、统天、大禧、成天四历。土星，统元、乾道、会元三历各自成体；淳熙历前段同乾道历，后段同纪元历；成天历前段同纪元历，后段作了较大修正，其他各历均依纪元历略作修正。

总之，大衍、崇玄、崇天和纪元四历五星盈缩历的影响最大，另外具有较大独立性的有宣明、观天、统元三历，淳熙历的木星及乾道、会元两历的土星盈缩历，它们对有关的 Δ_t 值均进行了较认真的测量，并得到新的数据。

对于中国古代五星运动不均匀性改正表的精确度，可以用历测五星偏心率值与相应的理论值的差异（Δ_{2r}）和历测五星实行度与平行度之差（对于皇极历五种历法而言，即指与入气加减日数相应的度值；对于盈缩历而言，即指“进退积”等）与相应的理论值的差异（$\Delta_{木}$、$\Delta_{土}$）来衡量。其状况可分述如下①：

水星：皇极历等五种历法对水星运动不均匀性改正的描述还处于半定性、半定

① 陈美东：《中国古代五星运动不均匀性改正的早期方法》，《自然科学史研究》，1990 年，第 3 期；陈美东：《五星盈缩历之研究》，见杜石然，主编：《第 3 届国际中国科学史讨论会论文集》，科学出版社，1990 年。



量的状况。大衍历以后则有所进步。大衍历、五纪历同，其历测 $2e$ 值过小，Δ_{2e} 达 20°余。宣明历有所改善，但历测 $2e$ 值还是太小。崇玄等四历的历测 $2e$ 值反不及大衍历，对后世历法影响巨大的崇天历又不及崇玄历。由此看来，各历法水星盈缩历对于水星运动不均匀性的改正，只是小有补益。

金星：皇极等五种历法对于金星运动不均匀性改正的描述，分为晨见和夕见两条截然不同的改正曲线（见图 1－4），这显然是对金星运动不均匀性的极大误解，因为无论晨见还是夕见，金星运动不均匀性改正曲线当是一致的。这种状况表明，它们对于金星运动不均匀性的认识是似是而非的。大衍历、五纪历同，历测 $2e$ 值偏大，Δ_{2e} 为 26′，它对于金星运动不均匀的改正还是有益的。而自宣明历始，历测 $2e$ 值骤增，为理论值的 10 倍多，崇玄等四历亦大增其值，为理论值的 7 倍余，崇天历虽大减其值，但仍为理论值的 2 倍多，其后各历法又因循不改。这说明从宣明历以后各历法的盈缩历，对金星运动不均匀性所作的改正，都起了不好的作用。

火星：皇极历等五种历法的 Δ_{2e} 在 1°.5～1°.9 间。皇极、大业和戊寅三历的 $\Delta_{\text{火}}$ 均为 3°.1；麟德和正元两历略有进步，$\Delta_{\text{火}}$ 为 2°.6。而大衍历和五纪历的盈缩历 Δ_{2e} 则增至 4°余。自宣明历开始，及至授时历的盈缩历 Δ_{2e} 更达到 14°～16°间。依此所做的改正，起了适得其反的作用。这就是说后世盈缩历对火星运动不均匀性的描述的准确度远较隋唐之际诸历为差，造成这种状况的原因还有待进一步的探讨。

木星：皇极、大业和戊寅三历的 Δ_{2e} 均为 1°.0，而麟德历和正元历的 Δ_{2e} 降至 0°.1，达到相当高的水平。皇极历 $\Delta_{\text{木}}$ 为 1°.6，大业历和戊寅历 $\Delta_{\text{木}}$ 为 1°.9，而麟德历和正元历 $\Delta_{\text{木}}$ 降至 0°.8。这些都表明麟德历关于木星运动不均匀性的描述要较前有较大进步，它甚至较大衍历和五纪历（$\Delta_{\text{木}}$ 为 1°.2）的精度还要高些。宣明历 $\Delta_{\text{木}}$ 为 0°.6，才超过麟德历的水平。但崇玄、应天、乾元和仪天四历却又大为倒退，$\Delta_{\text{木}}$ 反增至 1°.3，崇天历较之虽有改善，但也只与大衍历持平。自观天历开始才大为进步，纪元、重修大明、庚午和授时四历继其余绪，$\Delta_{\text{木}}$ 降至 0°.4～0°.5 之间，是为最佳状况。但自观天历后，统元、乾道、淳熙等历法的 $\Delta_{\text{木}}$ 则在 0°.7～0°.9之间徘徊，开禧历 $\Delta_{\text{木}}$ 则更增至1°.2，处于变动不定的状态。



土星：皇极历和麟德历 Δ_{2e} 同为 0°.7，但其 $\Delta_{\text{土}}$ 分别为 2°.4 和 1°.9，表明麟德历略优于皇极历。而大业历和戊寅历的 Δ_{2e} 和 $\Delta_{\text{土}}$ 均分别为 1°.7 和 3°.0 左右，是精度较差者。大衍历 $\Delta_{\text{土}}$ 约为1°.0（五纪历同），较前大有进步。而崇玄、乾元、仪天和崇天四历的 $\Delta_{\text{土}}$ 却小增，为 1°.1～1°.2 之间。从纪元历开始又大有改进，$\Delta_{\text{土}}$ 降至 0°.5～0°.7 之间，是为最佳状况。唯成天历 $\Delta_{\text{土}}$ 为 1°.5，这主要是由于土星近日点黄经测量的误差较大造成的。

第十节　交食计算用表

一、推日应食不食和日不应食而食表

刘焯皇极历最先给出日应食不食和日不应食而食表，它是以文字描述的方式给出的。所谓应食或不应食是指依据食限推算而得的结论，但由于日食发生的节气不同、与午正相距时刻各异，并在某特定的日月与黄白交点距度的条件下，应食者可能不食，不应食者可能食，即因月亮视差的影响导致了这种状况的出现。其术曰：

推应食不食术：朔先后在夏至十日内，去交十二辰少；二十日内，十二辰半；一月内，十二辰大[太]；闰四月、六月，十三辰以上，加南方三辰。若朔在夏至二十日内，去交十三辰，以加辰、申半以南四辰；闰四月、六月，亦加四辰。谷雨后，处暑前，加三辰；清明后、白露前，加巳半以西、未半以东二辰；春分、[秋分]前[后][①]，加午一辰，皆去交十三辰半以上者，并或不食。[②]

这是指定朔时月亮在黄道北的情况而言的。由是，术文中九种应食不食的判别条件，可列于表1－20中(序号1～9)。

我们可以对表1－20中序号1～9的情况进行分析，对于月在内道而言，当Z增大时，日食较易发生，若日月同黄白交点的度距(A)值相应增大，可能发生应食不食的情况：设距午正时刻相同，离夏至渐远时，Z当渐大，A需相应渐增，则可能不发生日食，1、2、4、5、7均合此，设离夏至远近相同，距午正时刻渐增时，乙亦当渐大，A亦需相应渐增，或可不食，2和3、5和6均与之相合；设A不变，当因距午正时刻渐小和距夏至渐远所导致的Z大小变化大体抵消时，或可不食，6、7、8、9与之符合。



又术文曰：

推不应食而食术：朔在夏至前后一月内，去交二辰；四十六日内，一辰半，以加二辰。又一月内，亦一辰半，加三辰。(及加四)[去交一]辰[③]，与四十六日内，加三辰。谷雨后、处暑前，加巳少后，未太前；清明后、白露

---

① 由全术文知，若仅言"春分前"，则对于清明到春分及其前，白露到秋分及其后的时段均未顾及，故应据补。

② 《隋书·律历志下》。

③ "与四十六日内"后已言"加三辰"，其前又言"加四辰"，显然有误，虑及其术文前后已有去交二辰、一辰半和半辰之说，故应将"及加四"改作"去交一"。



表 1—20　皇极历应食不食和不应食而食的判别条件

序号	A	节气	加辰(距午正前后刻)
1	12.25 辰(13°.45)	夏至十日内	加三辰(8.3～12.5)
2	12.5 辰(13°.73)	夏至二十日内	同上
3	13 辰(14°.27)	同上	加四辰(12.5～16.7)
4	12.75 辰(14°.00)	夏至一月内	加三辰(8.3～12.5)
5	13 辰以上(14°.27 以上)	闰四月、六月	同上
6	13 辰半以上(14°.82 以上)	同上	加四辰(12.5～16.7)
7	同上	谷雨后、处暑前	加三辰(8.3～12.5)
8	同上	清明后、白露前	加二辰(4.3～8.3)
9	同上	春分、秋分前后	加一辰(0～4.2)
10	2 辰(2°.20)	夏至一月内	加二辰(4.2～8.3)
11	1.5 辰(1°.65)	同上	加三辰(8.3～12.5)
12	同上	夏至 46 日内	加二辰(4.2～8.3)
13	1 辰(1°.10)	同上	加三辰(8.3～12.5)
14	0.5 辰以下(0°.55 以下)	谷雨后、处暑前	加巳少后、未太前(8.3～10.4)
15	同上	清明后、白露前	加二辰(4.2～8.3)
16	同上	春分、秋分前后	加一辰(0～4.2)

前，加二辰；春分(后)、秋分前[后][1]，加一辰，皆去交半辰以下者，并得食。[2]

这是指定朔时月亮在黄道南的情况而言的。于是术文中七种不应食的判别条件亦可列于表 1—20 中(序号 10～16)。

表 1—20 中序号 1 的含义是：当日月相会在夏至前后 10 日之内，及距午正 8.3～12.5 刻之间，以及日月与黄白交点的度距大于或等于 13°.45 时，将不会发生日食。其余各序号的含义均与之相似。

同理，对于月在外道时，当 Z 增大时，日食较难发生，若 A 相应减小，则可能发生不应食而食的情况：设距午正时刻相同，离夏至渐远，Z 当渐大，A 需相应渐减，可得食，表 1—20 中 10、12、15 均合此；设离夏至远近相同，距午正时刻渐增，Z 亦当渐大，A 亦需相应减小，可得食，10 和 11，12 和 13 均与之相合；设 A 不变，当因距午正时刻渐小和距夏至渐远所导致的 Z 大小变化大体抵消时，可得食，14、15、16 正与之吻合。



---

① 理同"推应食不食术"。

② 《隋书·律历志下》。

由以上分析知，表1—20中的1～9和10～16，是两组各能自恰的条件系统，它们都定性地与月亮视差对日食影响的原理相符合。可见刘焯对这一天文学概念十分明晰，并成功地应用于应食不食和不应食而食术中。

张胄玄大业历也载有与之相类似的方法，分别称为"求内道日不食法"和"求外道日食法"①，也以不同的节气和距午时刻以及去交度大小三种因素为据，列出日应食不食或不应食而食的表格。但它与刘焯皇极历的相应表格相比显得简单和粗略一些。唐代傅仁均戊寅历亦列此法，分别称"推内道日不食术"和"推外道日食术"②，其法与大业历大同小异。

李淳风麟德历给出了较前远为详细的日应食不食或不应食而食的方法，其术曰：

> 月在内道，朔应食。若在夏至初日，以千三百七十三为初准。去交如初准已上，加时在午正前后十八刻内者，或不食。夏至前后每日益初准一分半，皆毕于九十(四)[一]日，为每日变准。以初准减变准，余十而一，为刻准。以减午正前后十八刻，余为时准。其去交在变准已上，加时在[时]准内，或不食。③

显然，这里仅论及从春分到夏至、从夏至到秋分时的情况，而未涉及从秋分到冬至到春分时段的状况，这是现传本术文缺漏所致。夏至到二分均91日余，故术文中云"皆毕于九十四日"，明显有误，严格地说应为91.31日(下同)。术文中日月去黄白交点的度距1373等，是指分值而言，需除以1340，乘以月亮每日平行度(13.36875)，再乘以0°.9856，化作360°制的度值。设距夏至n日，"距午正刻"应等于$\left(18-\frac{1.5n}{10}\right)$刻。现依略作更正的术文，可作表1—21。



又术曰：

> 月在外道，朔不应食。夏至初日，以二百四十八为初准。去交前后分如初准已下、加时在午正前后七刻内者，食。朔去夏至前后每一日损初准二分，皆毕于九十(四)[一]日，为每日变准。交分如变准已下加时如前者，亦食。又以末准六十减初准及变准，余以十八约之，为刻准。以并午正前后七刻内数，为时准。加[时刻去午前后]时准内、交分如末准已下[者]，亦食。又置末准，每一(刻)[日]加十八，为差准。加时刻去午前后如刻准已(上)[下]、交分如差准已下者，亦食。自秋分至春分，去交如末

① 《隋书·律历志中》。
② 《旧唐书·历志一》。
③ 《新唐书·历志二》。



表 1—21 麟德历日应食不食和不应食而食表

日期 \ 条件 \ 食或不食	日应食不食		日不应食而食					
	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻	去交度	距午正刻
夏至初日	1373 13°.50	18.00	248 2°.44	7	60 0°.59	17.44	60 0°.59	10.44
前后 1 日	1374.5 13°.52	17.85	246 2°.42	7	60 0°.59	17.33	78 0°.77	10.33
前后 2 日	1376 13°.53	17.70	244 2°.40	7	60 0°.59	17.22	96 0°.94	10.22
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
前后 90 日	1508 14°.83	4.50	68 0°.67	7	60 0°.59	7.44	1680 16°.52	0.44
前后 91.31 日	1510 14°.85	4.30	65.4 0°.64	7	60 0°.59	7.30	1704 16°.76	0.30
秋分至 春分	?	?	60 0°.59	12				

准已下，加时巳、午、未者，亦食[1]。

术文中“加时准内交分，如末准已下”（现传本及标点者作如是说），“时准”为时间，“交分”为度数，两者不能相加，故必有脱漏之文，标点亦不妥。察其后有同类术文，由是应改作“加时刻去时准内、交分如末准已下者”。又，“每一刻加十八”，1 日百刻，若依此 1 日需加 1800，亦必有误，应改“刻”为“日”。又，“如刻准已上”，依文意“上”应为“下”，查《旧唐书·历志二》确为“下”，应据改。但《旧唐书·历志二》中的术文讹漏处更多，均应依改。术文中 248 等也应依前述方法化作今度。夏至后 n 日的“距午正刻”可分别依以下两法求得：$7+\dfrac{248-2n-60}{18}$ 和 $\dfrac{248-2n-60}{18}$。依此，亦可将麟德历日不应食而食法列如表 1—21 中。

由表 1—21 可见，对于自春分到秋分的时段，麟德历给出了逐日不同的判据。在夏至前后，日月相会时月亮的天顶距较夏至增大，此时，若日月距午正刻数较夏至减小（可使月亮天顶距减小），两者所导致的月亮视差对日食的影响是相抵消的，若去交度较夏至时增加超过某一数值，就将造成日应食不食的后果。表1—21中“日应食不食”所示即如此。在夏至前后，若日月距午正刻数相等（如同为 7 刻），只有当去交度减小到一定数值时，才产生日不应食而食的现象；若去交度相等（如同

---

[1] 《新唐书·历志二》。

为 0°.59)，只有当日月距午正时刻减小到一定数值时，才产生日不应食而食的现象；若日月距午正时刻日渐减小，而去交度相应增加不大于某一数值，也将产生日不应食而食的现象。表 1－21 中"日不应食而食"所示正是这三种情况。李淳风的这些描述至少从定性上看是合乎科学道理的。但他对于秋分至春分时段的描述却过于简略。

二、日食时差改正表

由于月亮视差的影响，定朔时刻与日食食甚时刻有所不同，两者之差即为时差改正数，刘焯皇极历最先建立了这一概念，并给出了时差改正表和相应的算法，其术曰：

> 置定余(I)，倍日限(11)，克减之。月在里，三乘朔辰(103.5)为法(310.5)，除之，所得以艮、巽、坤、乾为次，命艮(艮当为衍文)算外。不满法者半法(155.25)减之，无可减者为在前，所减之残为后，前则因余，后者减法，各为其率。乃以十加去交辰，三除之，以乘率，十四而一为差。其朔所在气二分前后一气内，即为定差。近冬至，以去寒露、惊蛰；近夏至，以去清明、白露气数(K_1 或 K_2)，倍而三除去交辰，增之。近冬至，艮、巽以加，坤、乾以减；近夏至，艮、巽以减，坤、乾以加其差为定差。乃艮、(以坤)[坤以]加，巽、(以乾)[乾以]减定余。月在外，直三除去交辰，以乘率，十四而一，亦为定差。艮、坤以减，巽、乾以加定余，皆为食余(I')。[1]

这里"定余"系指定朔时刻的分值 I(以 1242 为分母)，令 $I_1=I-2\times 11$，置之，若将其化为时辰数，则有$\frac{I_1}{1242}\times 12=\frac{I_1}{103.5}$。如图1－5所示，当$\frac{I_1}{103.5}<3$，亦即$\frac{I_1}{3\times 103.5}<1$ 时，为在艮限；同理，当 $1<\frac{I_1}{310.5}<2$ 时，为在巽限；当 $2<\frac{I_1}{310.5}<3$ 时，为在坤限；当 $3<\frac{I_1}{310.5}<4$ 时，为在乾限。而所谓"命算外"，系指分别自子、卯、午、酉之时起算。设 I_1 在 A 处，$a_1<155.25$，则"率"即等于 a_1；设 I_1 在 B 处，$a_2>155.25$，则"率"等于 $310.5-(a_2-155.25)=465.75-a_2$。

当月在内道时：

$$差=\frac{\frac{10+去交辰}{3}\times 率}{14}$$

月在外道时：

---

[1] 《隋书·律历志下》。

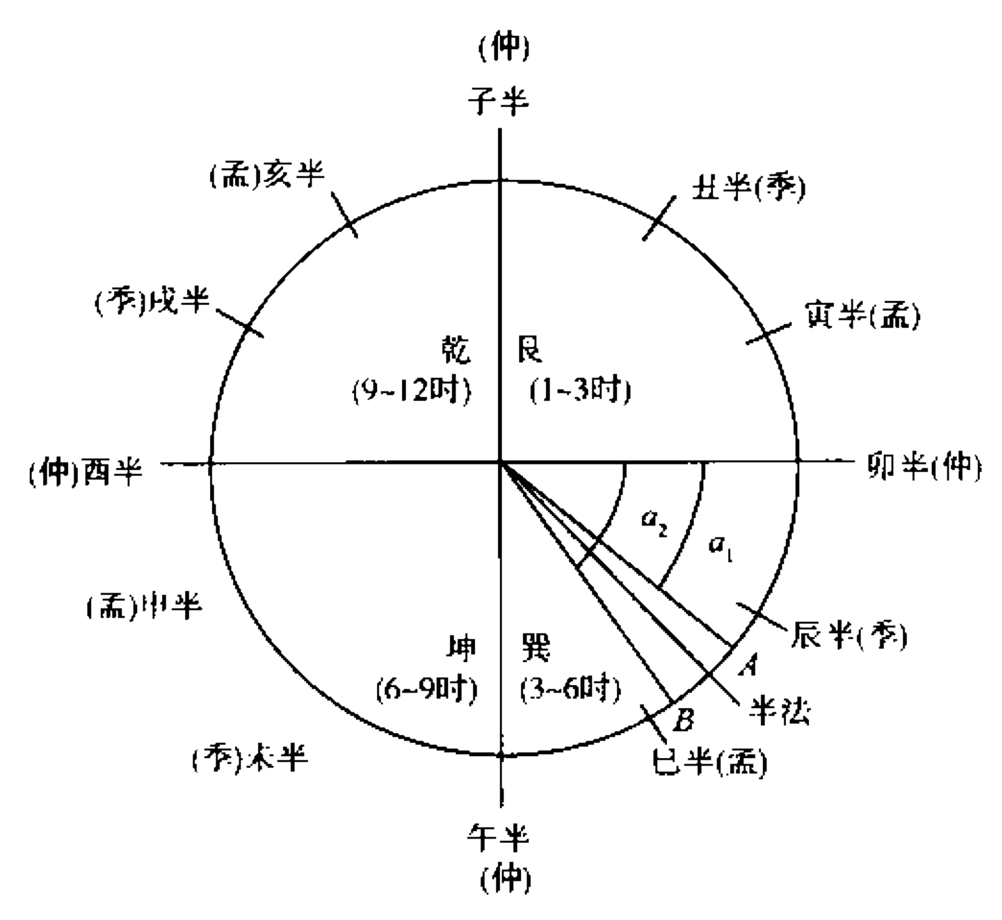


图 1—5 皇极历、大业历时差改正“前后”、正负取值示意

$$差=\frac{\frac{去交辰}{3}\times率}{14}$$

$$食甚时刻(I')=I\pm定差 \qquad (1-19)$$

式中，月在内道时，艮、坤取正号，巽、乾取负号；月在外道时，艮、坤取负号，巽、乾取正号。去交辰为定朔时月亮距黄白交点的度值（以时辰的形式表达者），而定差的计算可如表 1—22 所示。

表 1—22 皇极历日食时差(定差)改正表

节气	惊蛰—清明	清明—白露	白露—寒露	寒露—惊蛰
定差	差	$\left(2K_1+\frac{去交辰}{3}\right)\pm差$ （K_1 为去夏至气数，艮、巽取负号，坤、乾取正号）	差	$\left(2K_2+\frac{去交辰}{3}\right)\pm差$ （K_2 为去冬至气数，艮、巽取正号，坤、乾取负号）

唐代李淳风麟德历日食时差的表格和算法与皇极历大同小异，已有专文论及于此[①]。

① 刘金沂：《麟德历交食计算法》，《自然科学史研究》，1984 年，第 3 期。

张胄玄大业历时差改正表及计算法另有一套，其术曰：

置食定日小余(I)，秋三月，内道，去交八时已上，加二十四，十二时以加四十八；春三月，内道，去交七时已上，加二十四。乃以三乘之，如辰法(286)得一辰，以命子算外，即所在辰。不尽为时余。副置时余，仲辰不满半辰(143)，减半辰；已上去半辰；季辰者直加半辰；孟辰者减辰法，余加半辰为差率。又，置去交时数，三已下加三，六已下加二，九已下加一，九已上依数，十二已上从十二，以乘差率，如十四得一为时差。子半至卯半，午半至酉半，以加时余；卯半至午半，酉半至子半，以减时余。加之，满辰法去之，进一辰，余为定时余(I')。[1]

依之，可列出表1－23：

表1－23 大业历日食时差改正表

条件	D_1+D_2	条件		差率	条件	I'_0
秋三月，月在内道，月去交8时以上到12时以内	$\frac{3(I+24)}{286}$	D_1在子、卯、午、酉（仲辰）	$D_2<143$	$143-D_2$	$D_1<3$	$D_2\pm\frac{(D_1+3)}{14}$差率
春三月，月在内道，月去交7时以上			$D_2>143$	D_2-143	$3<D_1<6$	$D_2\pm\frac{(D_1+2)}{14}$差率
秋三月，月在内道，月去交12时以上	$\frac{3(I+48)}{286}$	D_1在丑、辰、未、戌（季辰）		D_2+143	$6<D_1<9$	$D_2\pm\frac{(D_1+1)}{14}$差率
		D_1在寅、巳、申、亥（孟辰）		$429-D_2$	$9<D_1<12$	$D_2\pm\frac{D_1}{14}$差率

表1－23中，D_1为依式计算结果的整数部分，即从子半起算的时辰数；D_2为余数部分(必小于286)，即时余。式中I为定朔时刻。又，I'_0依式计算结果若大于286，需以286减去之，并令D_1增1。关于仲辰等可参见图1－5。

于是：

$$食甚时刻(I')=D_1+I'_0 \qquad (1-20)$$

唐代傅仁均戊寅历日食时差的表格和算法与大业历大同小异[2]，此不赘述。

综观皇极历和大业历日食时差改正均与日食发生的节气、日月的相对位置(内道或外道)、日月所值的时角等因素有关。这些显然都与月亮视差的大小相关，说

① 《隋书·律历志中》。

② 《旧唐书·历志一》、"推日食加时术"。



明刘焯、张胄玄的思路是不无道理的，但其具体的描述却不尽如人意，即他们并未真正掌握月亮视差对时差大小的影响。关于日食时差认识的发展，我们将在下一章第三节中再做介绍。

三、日食食分大小改正表

刘焯皇极历还最早给出了日食食分大小的改正法。改正值的大小既与日食发生所值的节气有关，又与日食发生与午正的时距有关，这两者实际上都与日食发生时月亮所处的天顶距（Z）的大小相关，亦即与月亮视差对日食食分的影响相关。皇极历日食食分（$g_{\odot}$）的计算法有如下式：

$$g_{\odot}=\frac{望差-(A+M)}{96}=\frac{望差-A}{望差}\times 15-\frac{M}{96} \quad (1-21)$$ ①

上式中 M 即为日食食分大小改正值，其正负或大小有如下述：

> 月在内者，朔在夏至前后二气，加南二辰，增去交余（A）一辰太；加三辰，增一辰少；加四辰，增太。三气内，加二辰，增一辰[少]，加三辰，增太；加四辰，增少。四气内，加二辰，增太；加三辰及五气内，加二辰，增少。自外所加辰，立夏后、立秋前，依本其气内，加四辰，五气内，加三辰（六气内加二辰）②，六气内加二辰者，亦依平。自外所加之北诸辰，各依其去立夏、立秋（白露）③[日]数，随其依平辰，辰北每以其数三分减去交余；雨水后、霜降前，又半其去分日数，以加二分去二立之日，乃减去交余；其在冬至前后，更以去霜降、雨水日数三除之，以加霜降、雨水当气所得之数，而减去交余，皆为定不食余。④

这里"加南二辰"、"加三辰"、"加四辰"等应如图 1—6 所示，它们与距午正的多少相关。而"增一辰少"、"增太"等即指式（1—21）中的 M 值。计算时需乘以 $\frac{1242}{12}$ 化为日分值。又从术文的前半部分知：某节气加 n 辰的 M 值等于其前一节气加（$n+1$）辰的 M 值，这一规律亦应适用于术文中"自外所加之北诸辰"以后三句的情况。该后三句都说的是有关节气加四辰的 M 日分值的计算法：第一句指清明和谷雨、春分和秋分；第二句指惊蛰和寒露、雨水和霜降；第三句则指立冬到立春各节气。于是，依术文意可列出表 1—24。

---

① 陈美东：《刘焯交食推算法——中国古代交食研究新时期的标志》。见黄盛璋，主编：《亚洲文明》第二集，安徽教育出版社，1992 年。

② 此 6 字与下文重复，应为衍文。

③ 此 2 字应为日字之误。

④ 《隋书·律历志下》。

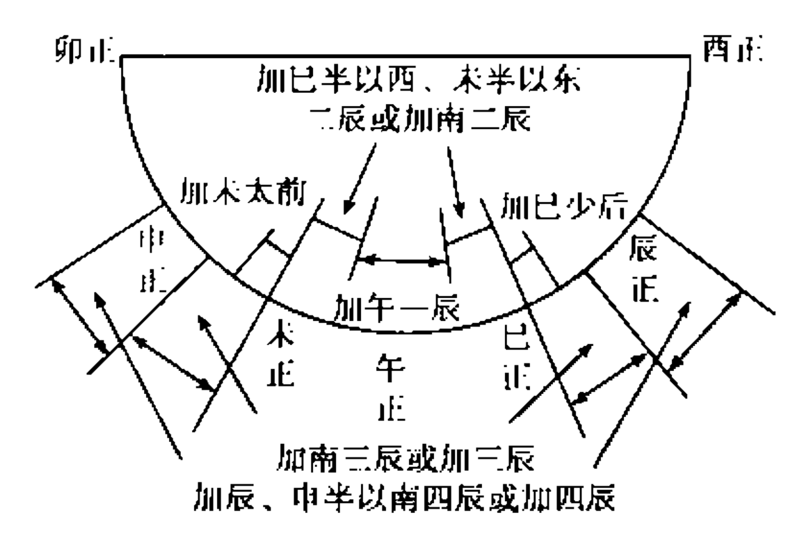


图 1－6　皇极历“加南二辰”等示意图

表 1－24　皇极历日食食分改正日分值表

M（日分）加辰／节气	加二辰（距午正 4.2～8.3 刻）	加三辰（距午正 8.3～12.5 刻）	加四辰（距午正 12.5～16.7 刻）
小满 芒种 夏至 小暑 大暑	＋181.1（1.75 辰）	＋129.4（1.25 辰）	＋77.6（0.75 辰）
立夏 立秋	＋129.4（1.25 辰）	＋77.6（0.75 辰）	＋25.9（0.25 辰）
谷雨 处暑	＋77.6（0.75 辰）	＋25.9（0.25 辰）	0
清明 白露	＋25.9（0.25 辰）	0	－10.1
春分 秋分	0	－10.1	－15.2
惊蛰 寒露	－10.1	－15.2	－53.3
雨水 霜降	－15.2	－53.3	－60.9
立春 立冬	－53.3	－60.9	－65.9
大寒 小雪	－60.9	－65.9	－71.0
小寒 大雪	－65.9	－71.0	－76.1
冬至	－71.0	－76.1	－81.2



由表1－24和式(1－21)知，当日食发生在近夏至和午正时，M值较大，$g_{\odot}$则较小；当离夏至或午正渐远时，M值渐小，$g_{\odot}$则渐大；当近冬至和远午正时，M值较小，$g_{\odot}$则较大；当离冬至渐远或距午正渐近时，M值渐大，$g_{\odot}$则渐小。我们知道：若日食时，月亮位于黄道北（“月在内者”），月亮的天顶距(Z)越大，月亮视差越大，$g_{\odot}$也越大。而当日食发生在近夏至和午正时，Z较小，$g_{\odot}$应较小；当离夏至或午正渐远时，Z渐大，$g_{\odot}$应渐大；当近冬至和远午正时，Z较大，$g_{\odot}$应较大；当离冬至渐远或距午正渐近时，Z渐小，$g_{\odot}$应渐小。由此可知，式(1－21)是刘焯在前人计算法的基础上，正确地虑及了月亮视差对$g_{\odot}$的影响，这也是一项重大的创新。

对于日食发生时，月亮位于黄道南（“月在外者”）的情况，刘焯均取M约为正一辰，即＋103.5日分左右，而由式(1－21)知，这将使$g_{\odot}$总是偏小。这同其时月亮视差总是使日、月间的黄经差增大的效应是相一致的。

张胄玄大业历则给出了日食食分大小节气改正值，其术文曰：

> 在秋分前者，以去夏至日数乘二千，以减去交余，余为不食余，不足减者，反减十八万四千，余为不食余（亦减望差为定法，其后交值缩，并不减望差，直以望差为定法）。在启蛰后者，以去夏至日数乘千五百[一十]以减之，秋分至启蛰，均减十八万四千，不足减者，如前；大寒至小满，去后交五时外，皆去不食余一时。时差减者，先交减之，后交加之，不足减者食既；值加，先交加之，后交减之，不足减者食。①

由术文知，大业历认定秋分初日到启蛰初日食食分大小的改正值均为184000；夏至初日为0；秋分初日到夏至初日（应为91.31日，以92日计），每经一日减2000；夏至初日到惊蛰初日（应为121.75日，以122日计），每经一日增1510，才同惊蛰初日改正值为184000相吻合，故现存本术文中“以去夏至日数乘千五百以减之”应做相应改正。依之，可作表1－25，即为大业历日食食分大小节气改正表。

表1－25 大业历日食食分大小节气改正表

启蛰初日	夏至前121日	夏至前120日	…	夏至前2日	夏至前1日	夏至初日
184000	182710	181200	…	3020	1510	0
秋分前91日	秋分前90日	…	秋分前2日	秋分前1日	秋分初日至启蛰初日	
2000	4000	…	180000	182000	184000	

① 《隋书·律历志中》。

傅仁均戊寅历"推日食分术"[1]也给出与张胄玄大业历相类似的描述，其节气的分段法和变化幅度均与大业历相一致。它只不过是大业历相应方法的翻版而已。

李淳风麟德历也载有日食食分大小改正之法，其术曰：

> 朔交，月在内道，入冬至毕(定)雨水，及秋分毕大雪，皆以五百五十(八)[二]为食差。入春分，日损六分，毕芒种，入夏至，日益六分，毕白露。以食差减去交分，不足减者，反减食差，为不食分。其不食分，自小满毕小暑，加时在午正前后七刻外者，皆减一时；三刻内者，加一时。大寒毕立春，交前五时外、大暑毕立秋，交后五时外者，皆减一时；五时内者，加一时。诸加时食差应减者，交后减之，交前加之；应加者，交后加之，交前减之。不足减者，皆既；加减入不食限者，或不食。月在外道，冬至初日，无食差。自后日益六分，毕于雨水。入春分，毕白露，皆以五百(二)[五]十二为[食]差。入秋分，日损六分，毕大雪。以[食]差加去交分，为食分。以减后准，余为不食分。十五约食差，以[减]百四，为定法。其不食分，如定法而一，以减(十五)[三十]，余得日食分。[2]

自冬至毕雨水(即至春分)、秋分毕大雪(即至冬至)、春分毕芒种(即至夏至)、夏至毕白露(即至秋分)，均为 91.31 日，每日增或损 6 分，若以 92 日计，则共增或损 552 分。故术文中前云 558 为食差，而后云 522 为食差，前者个位数误，而后者十位数误，两者均应改作 552 为食差。依之，可作表 1－26，即为麟德历日食食差表。

由上术文，并虑及后准$=1553\frac{93.5}{300}\approx 104\times 15$，可列出关于日食食分计算的如下算式：



对于交前而言：

$$\text{日食食分}=30-\frac{\text{后准}-(\text{去交分}-\text{食差})}{104+\frac{\text{食差}}{15}}\approx 15-\frac{15\times\text{去交分}}{\text{后准}+\text{食差}} \qquad (1-22)$$

对于交后而言：

$$\text{日食食分}=30-\frac{\text{后准}-(\text{食差}+\text{去交分})}{104-\frac{\text{食差}}{15}}\approx 15-\frac{15\times\text{去交分}}{\text{后准}-\text{食差}} \qquad (1-23)$$

---

① 《旧唐书·历志一》。

② 《新唐书·历志二》。



表 1－26　麟德历日食食差表

<table>
<tr><td rowspan="2">月在内道</td><td>冬至初日到春分初日</td><td>春分后1日</td><td>春分后2日</td><td>…</td><td>春分后91日</td><td>夏至初日</td><td>夏至后1日</td><td>夏至后2日</td><td>…</td><td>夏至后91日</td><td>秋分初日到冬至初日</td></tr>
<tr><td>552</td><td>546</td><td>540</td><td>…</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>12</td><td>…</td><td>546</td><td>552</td></tr>
<tr><td rowspan="2">月在外道</td><td>冬至初日</td><td>冬至后1日</td><td>冬至后2日</td><td>…</td><td>冬至后91日</td><td>春分初日到秋分初日</td><td>秋分后1日</td><td>秋分后2日</td><td>…</td><td>秋分后91日</td><td>冬至初日</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>12</td><td>…</td><td>546</td><td>552</td><td>546</td><td>540</td><td>…</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">其他改正</td><td rowspan="3">…</td><td colspan="3">大寒初日到惊蛰初日</td><td rowspan="3">…</td><td colspan="2">小满初日到大暑初日</td><td colspan="3">大暑初日到处暑初日</td><td rowspan="3">…</td></tr>
<tr><td>交前5日外</td><td colspan="2">交前5日内</td><td>距午正>7刻</td><td>距午正<3刻</td><td colspan="2">交后5时外</td><td>交后5时内</td></tr>
<tr><td>－1时</td><td colspan="2">＋1时</td><td>－1时</td><td>＋1时</td><td colspan="2">－1时</td><td>＋1时</td></tr>
</table>

设食差＝0，又去交分＝后准时，日食食分应等于0，故知上术文中最后一句“以减十五，余得日食分”当有误，需改“十五”为“三十”。

由表1－26可见，李淳风已经注重描述月在内道或外道时，日食食分节气改正值大小的不同，并最先对这项改正用食差命名。我们知道，当月在内道时，冬至（或夏至）时，因月亮视差的影响，将使日食食分增大（或减小），式（1－22）正可表达这种状况；当月在外道时，冬至（或夏至）时，因月亮视差的影响，将使日食食分减小（或增大），式（1－23）也正可表达这种状况。可是，李淳风却给出月亮在黄白交点前后两个算式描述之，这表明李淳风在因节气不同所生成的月亮视差对日食食分大小影响的问题上，依然处于含糊不清的境地。



表1－26中“其他改正”栏系指某节气时段内日月相会时距午正前后刻数多少，以及日月距黄白交点远近对日食必全食限（“不食分”）的影响。从小满初日到大暑初日，当距午正前后刻数为3～7刻时，“不食分”不增不减；当月在外道（内道），距午正大于7刻时，“不食分”需减去（加上）1时。因为其时月亮天顶距较距午正为3～7刻时来得大，月亮视差将使日月相对位置拉远（靠近），故“不食分”需缩小（扩大）；当月在外道（内道）、距午正小于3刻时，“不食分”需加上（减去）1时，因为其时月亮天顶距较距午正3～7刻时来得小。虽然月亮视差也将使日月相对位置拉远（靠近），但数量上要小些，故“不食分”可扩大（需缩小）。由此可见，麟德历的这些论述是合理的。

在大衍历中，一行首先给出了节气对日食食分大小影响的食差表，其横向列二十四节气（定气），纵向有“增损差”（每一节气食差的增损量）和“差积”[1]（每一节气的食差值，即“增损差”的累积值），其数值可引载于表1－27中。

表1－27　大衍历日食食差表

定气	冬至	小寒	大雪	大寒	小雪	立春	立冬	雨水	霜降	惊蛰	寒露	春分	秋分	清明	白露	谷雨	处暑	立夏	立秋	小满	大暑	芒种	小暑	夏至
增损差	增10	增15	损10	增20	损15	增25	损20	增30	损25	增35	损30	增40	损35	增45	损40	增50	损45	增55	损50	增60	损55	增65	损60	损65
差积	积0	积10		积25		积45		积70		积100		积135		积175		积220		积270		积325		积385		积450

在应用表1－27求算任一时日的食差值时，大衍历应用了不等间距二次差内插法的公式。

大衍历术日食食分的方法是先判别在“阴历食”（日月在内道）或在“阳历食”（日月在外道）。对于“阴历食”而言，食差对于日食食分大小的改正值为$\frac{-差积}{143}\left(或-\frac{差积}{152}\right)$；对于“阳历食”而言，改正值为$\frac{差积}{90}\left(或\frac{差积}{146}\right)$。这些都是与月亮视差对日食食分大小的影响相符合的。

四、月食食分大小的节气改正表

刘焯皇极历月食食分计算法中，还最先给出了节气改正一项，其术曰：

> 望在分后，以去夏至气数（$K_{至}$）三之；其分前，又以去气数（$K_{分}$）倍而加分后者。……九十六而一。[2]

这段术文实际上是一份月食食分大小的节气改正表，依之，可作表1－28。

---

① 《新唐书·历志四下》。

② 《隋书·律历志下》。

表 1－28　皇极历月食食分的节气改正日分值

节气	$3K_{至}+2K_{分}$	节气	$3K_{至}+2K_{分}$	节气	$3K_{至}+2K_{分}$	节气	$3K_{至}+2K_{分}$
冬至	48	春分	18	夏至	0	秋分	18
小寒	43	清明	15	小暑	13	寒露	21
大寒	38	谷雨	12	大暑	14	霜降	24
立春	33	立夏	19	立秋	15	立冬	27
雨水	28	小满	6	处暑	16	小雪	30
惊蛰	23	芒种	3	白露	17	大雪	33

皇极历月食食分取 15 分制，表 1－28 中所列各值的分母为 96。由表 1－28 知，当月食发生在冬至前后时，节气改正项较大（以冬至为最大），g 应较大；当月食发生在夏至前后时，节气改正项较小（以夏至为 0），g 应较小。而由图 1－7 知，当太阳在近地点附近（冬至前后）时，地球影锥截面较大，g 应较大。这说明刘焯虽然已经虑及了太阳所处位置不同对月食食分大小的影响，可惜他未能予以正确地描述。

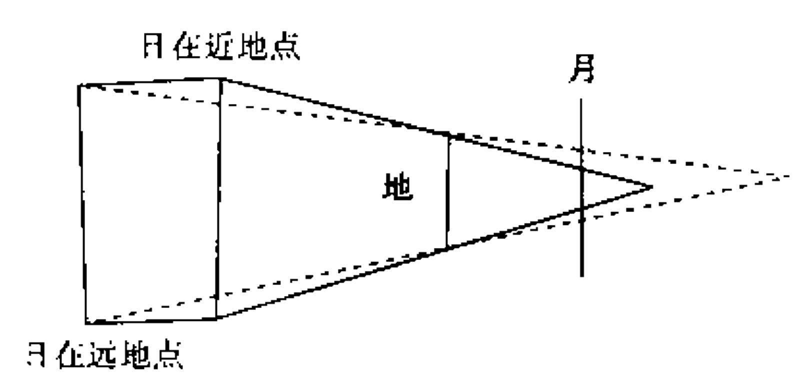


图 1－7　太阳在远近地点对月食食分影响示意图

张胄玄大业历月食食分节气改正术曰：

> 春后交、秋先交、冬后交，皆去不食余一时，不足去者，食既。余以三万二百三十五为法，得一为不食分。……以减十五，余为食分。[①]

依之可得月食分的算式为：

$$月食食分=15-\frac{不食余-\Delta}{30235} \qquad (1-24)$$

式中 Δ 即节气改正值。由之可知，大业历以为春、秋、冬三季月食食分可能增

① 《隋书·律历志中》。

大$\frac{\Delta}{30235}$，这同图1－7所示不合，而且以月亮在黄白交点先后作为又一判据，亦不合理，所以，大业历所设定的该项改正是不妥当的。

傅仁均戊寅历也给出月食食分的节气改正，其术曰：

望去交分（M），冬先后交皆去不食分二时；春先交，秋后交，去半时；春后交，秋先交，去二时，夏则依定，不足减者，既。乃以三万六千一百八十三为法而一，以减十五，余为月食分。[1]

依之可得：

$$\text{月食食分}=15-\frac{M-\Delta}{36183} \qquad (1-25)$$

李淳风麟德历的月食食分大小节气改正法是：

望去交前后定分（M），冬，减二百二十四；夏，减五十四；春，交后减百，交前减二百；秋，交后减二百，交前减百。不足减者，食既。有余者，以减后准$\left(1553\ \frac{93.5}{300}\right)$，百四而一，得月食分（$g_{月}$）。[2]

依之可得：

$$g_{月}=\frac{1553\ \frac{93.5}{300}-(M-\Delta)}{104}\approx 15-\frac{M-\Delta}{104} \qquad (1-26)$$

上二式中Δ均为月食食分的节气改正值。式（1－25）、式（1－26）同式（1－24）均无本质的区别，戊寅历和麟德历月食食分的节气改正存在与大业历完全相同的弊病。刘焯、张胄玄、傅仁均和李淳风关于月食食分节气改正的尝试都是不成功的。自一行大衍历以后，月食食分大小的节气改正法被取消不用，这反倒是一种明智的抉择。



五、食分与全部见食时间关系表

在求得交食的食甚时刻以后（皇极历以月食的定望时刻即等于食甚时刻），刘焯还发明了计算初亏时刻（C）和复圆时刻（D）的方法。其术曰：

准其食分十五分为率，全以下各为衰。十四分以上，以一为衰，以尽于五（分），每因前衰，每降一分，积衰增二，以加于前。以至三分，每积增四，（二分每增四），二分增六，一分增十九。皆累算各为衰（L）。三百为率，各衰（L）减之，各以其残乘朔日法（1242），皆率而一，所得为食衰数（F）。其率全，即以朔

---

[1] 《新唐书·历志一》。

[2] 《新唐书·历志二》。



日法为衰数。以衰数加减食余(E),其减者为起(即 C),加者为讫(即 D)。[①]

这里 E 即指食甚时刻,而欲将 F 化为刻数时,需以"朔辰一百三半"除之。依术文则有:

$$C=E-\frac{F}{103.5},D=E+\frac{F}{103.5}$$

$$F=\frac{(300-L)\times 1242}{300} \qquad (1-27)$$

$$全部见食刻数=D-C=\frac{2F}{103.5}$$

L 是与食分大小有关的数值。当食分等于 15 时,L 应等于 0,代入上式得 $F=1242$,"其率全,即以朔日法为衰数"正指此。关于 L 的计算,术文中"以尽于五分"的"分"应为衍文,因下文已有指食分而言的"以至三分"之说,而"以尽于五"系指当食分为十四分时以五为衰。又,"二分每增四"亦应为衍文,因下文已说"二分增六",这一点前人业已指出[②]。依之,可列出表 1—29。

表 1—29　皇极历食分与全部见食时间关系表

食分	积衰增值	衰	累衰	全部见食刻数	食分	积衰增值	衰	累衰	全部见食刻数
1	19	54	283	1.4	9	2	15	60	19.2
2	6	35	229	5.7	10	2	13	45	20.4
3	4	29	194	8.5	11	2	11	32	21.4
4	2	25	165	10.8	12	2	9	21	22.3
5	2	23	140	12.8	13	2	7	12	23.0
6	2	21	117	14.6	14	2	5	5	23.6
7	2	19	96	16.3	15	0	0	0	24
8	2	17	77	17.8					




由表 1—29 知,皇极历所得绝大多数全部见食时刻均偏大,这说明刘焯在这方面的探索还是十分粗疏的,但他毕竟迈出了可贵的第一步。

其他历法均未给出此类表格,而以直接推算初亏、复满时刻等代替之。

---

① 《隋书·律历志下》。

② 《隋书·律历志下》校勘记二十。

六、太阳天顶距大小与八尺表晷长关系表

为推算全国各地的昼夜漏刻长度、晷长和食差等值，一行在大衍历中给出了太阳天顶距大小与八尺表影长之间存在的数值关系表，它是以文字描述的方式表达的，其术文曰：

南方戴日之下，正中无晷。自戴日之北一度，乃初数千三百七十九。自此起差，每度增一，终于二十五度，计增二十六分。又每度增二，终于四十度，[增五十六分]。[起四十一度]，又每度增六，终于四十四度，增(六)[八]十[分]。[又起四十五度，增一百四十八]。又每度增二，终于五十度，[增一百五十八分]。[起五十一度]，又每度增七，终于五十五度，[增一百九十三分]。[起五十六度]，又每度增十九，终于六十度，增[二]百(六)[八]十[八分]。[又起六十一度，增四百四十八]。又每度增三十三，终于六十五度，[增五百八十分]。又每度增三十六，终于七十度，[增七百六十分]。又每度增三十九，终于七十二度，[增八百三十八分]。[又度]增二百六十。又度增四百四十。又度增千六十。又度增千八百六十。又度增二千八百四十。又度增四千。又度增五千三百四十。[至于八十度]。各为每度差。因累其差，以递加初数，满百为分，分十为寸，各为每度晷差。又累其晷差，得戴日之北每度晷数。①

依术文之意，可列出表1－30②。

有人认为该表是一份正切函数表，而且是世界上最早的正切函数表③。

实际上，严格地说此表并非纯正的正切函数表，而是为解决特定的天文学问题而编制的数值表格，其天文和数学含义应为$C=8\times \mathrm{tg}Z$。

应用表1－30，以及二十四节气阳城太阳视赤纬和晷长表，一行可用之推求任一地点的二十四节气晷长表④，亦可用之推求任一地点的二十四节气昼夜漏刻和食差表。也就是说，表1－30是一行为推求九服晷长、漏刻和食差而设定的起中介作用的专用天文、数学表格。

由表1－30知，大衍历夏至时“黄道去极度”为67.40度，而“极去戴日度五十六及分八十二半”⑤，则可知阳城冬至时太阳的天顶距为67.40－56.825＝10.575

---

① 《新唐书·历志四上》及《高丽史》卷五〇。
② 曲安京：《大衍历晷影差分表的重构》，《自然科学史研究》，1997年，第3期。
③ 刘金沂，赵澄秋：《唐代一行编成世界上最早的正切函数表》，《自然科学史研究》，1986年，第4期。
④ 陈美东：《一行》。见杜石然，主编：《中国古代科学家传记》(上集)，科学出版社，1992年，第364～365页。
⑤ 《新唐书·历志四上》。

表 1—30　大衍历太阳天顶距(Z)与八尺表晷长(C)关系表

戴日北度 Z	每度晷差增数 A(分)		每度晷差 $B=\sum A$(分)	每度晷长 $C=\sum B$(分)	$C-8\mathrm{tg}Z$(尺)
0	每度增1	1	1379	0	0.01
1		2	1380	1379	
…		…	…	…	
24		25	1679	35396	
25		26	1704	37075	
26	每度增2	28	1730	38779	0.05
27		30	1758	40509	
…		…	…	…	
39		54	2250	64025	
40		56	2304	66275	
41	每度增6	62	2360	68579	0.04
42		68	2422	70939	
43		74	2490	73361	
44		80	2564	75851	
45	度增68	148	2644	78415	0.02
46	每度增2	150	2792	81059	0.01
47		152	2942	83851	
48		154	3094	86793	
49		156	3248	89887	
50		158	3404	93135	
51	每度增7	165	3562	96539	0.06
52		172	3727	100101	
53		179	3899	103828	
54		186	4078	107727	
55		193	4264	111805	
56	每度增19	212	4457	116069	0.12
57		231	4669	120526	
58		250	4900	125195	
59		269	5150	130095	
60		288	5419	135245	

戴日北度 Z	每度晷差增数 A(分)		每度晷差 $B=\sum A$(分)	每度晷长 $C=\sum B$(分)	$C-8\mathrm{tg}Z$(尺)
61	度增160	448	5707	140664	0.14
62	每度增33	481	6155	146371	0.16
63		514	6636	152526	
64		547	7150	159162	
65		580	7697	166312	
66	每度增36	616	8277	174009	0.24
67		652	8893	182286	
68		688	9545	191179	
69		724	10233	200724	
70	每度增39	760	10957	210957	
71		799	11717	221914	0.21
72	度增260	838	12516	233631	
73		1098	13354	246147	0.07
74	度增440	1538	14452	259501	0.11
75	度增1060	2598	15990	273953	0.36
76	度增1860	4458	18588	289943	0.67
77	度增2840	7298	23046	308531	0.98
78	度增4000	11298	30344	331577	1.16
79	度增5340	16638	41642	361921	1.01
80			58280	403563	0.23
81				461843	1.56

度，以此为引数，依表 1—30 可得晷长为 1.4779 尺，与表 1—11 所示大衍历夏至晷长值正合。同理可知，表 1—11 所示大衍历夏至前后八个节气(春、秋分略超过允

许范围，其原因待考)的晷长值，均与由表 1－30 算得者相吻合(大衍历“黄道去极度”的分值取 20、35 等整数，小有差异者均在±5 分的允许范围内)。如表 1－30 中(C－8*tg*Z)栏所示：当Z≤55 度时，各区段的平均误差在0.01尺到 0.06 尺之间，其中以 Z≤25 度和 Z＝46－50 度间为最佳，平均误差为 0.01 尺，其总平均误差为 0.03 尺。这是一行 Z－C 表相当成功的部分；在 55 度<Z≤65 度区间，各区段的平均误差在 0.12 尺到 0.16 尺之间，而总平均误差为 0.14 尺，一行 Z－C 表的偏差已开始加大；在 65 度<Z≤74 度区间，各区段的平均误差在 0.07 尺到 0.24 尺之间，而总平均误差为 0.20 尺，一行 Z－C 表的位置又有所增加；在 75 度≤Z≤81 度，各度的误差在 0.23 尺到 1.56 尺之间，而是平均误差为 0.85 尺，一行 Z－C 表的偏差大增，已不可用。这些情况表明，一行对于 Z≤55 度时，Z－C 关系的理解与把握是成功的，而对于 55 度<Z≤74 度区间的 Z－C 关系则已渐无把握，而对于Z>74 度以后的 Z－C 关系更不清楚。



第二章 历表的公式化

在第一章中，我们已介绍了中国古代历法中先列出历表，再依表格计算法推求某种天文量的传统方法。本章则要讨论该传统方法的延伸与发展，即不再列出历表，也不再采用内插法做进一步的计算，而是设定一特定的算式以直接计算各有关天文量。这种方法的最初尝试见于唐代郭献之的五纪历中，该历最先用于日食食差的计算，徐承嗣正元历则继而用之。随后，曹士蔿在符天历中更创用了一种崭新的算式以计算太阳中心差。这些都开创了历表公式化的新方向。此后，经由唐代徐昂、边冈，五代王朴，北宋王处讷、吴昭素、史序、宋行古、周琮、皇居卿、姚舜辅，金代赵知微，元代王恂、郭守敬等人的相继努力，先后把历表的公式化推广到日食时差、气差和刻差、黄赤道度差、太阳视赤纬、昼夜漏刻长度、晷长、月亮极黄纬、交食初亏和复圆时刻、黄白道度差和赤白道度差、月亮和五星中心差、月食食既和生光时刻等历法课题，而且把算式从一次函数式推进到二次、三次、四次乃至五次函数式，从而形成了既便捷又保持相当高的精度，更具数理与天文意义的计算系统，把中国古代历法的代数学体系推向高峰。本章依这类算式出现的先后，对历表公式化的历史状况作一介绍。

第一节 日食气差、刻差算式



一、五纪历和正元历日食食差算式

在第一章第十节中，我们已经提及唐代一行大衍历的日食食差计算法，其日食食差表是以二十四节气为横向栏目的，欲求每一时日的日食食差值可依表用不等间距二次差内插法推求之。而郭献之在五纪历中则直接给出了影响日食食分大小的每日日食食差的计算法，其术曰：

> 太阳每日食差：月在阴历，自秋分后、春分前，皆以四百五十七(三百七十三)为食差；入春分后，日损五(四)分；入夏至初日，损不尽者七[二](六[九])；乃自后日益五(四)分，[入秋分初日，益不尽者二(九)]。月在阳历，自春分后、秋分前，亦以四百五十七(三百七十三)为食差；入秋分后，日损五(四)分；入冬至初日，损不尽者七(六)；乃自后日益五(四)分，

［入春分初日，益不尽者二（九）］。各得朔日所入定数。[1]

徐承嗣正元历日食食差术与五纪历大体相同，仅具体数值稍异［见上引文（ ）内所示］。依术文意，当月在阴历时，五纪历（正元历）春分后 91 日的日食食差应为 2（或 9），而夏至食差应为 0，故夏至初日应损 2（或 9），现传本术文“人夏至初日，损不尽者七（六）”，应据改。又，“乃自后日益五（四）分”之后，应添加“人秋分初日，益不尽者二（九）”之句。同理，当月在阳历时，亦应做相应改动。依此可得二历法日食食差的算式分别为：

五纪历：

$$每日食差=457-5D_1 \quad (2-1)$$

$D_1 \leqslant 91.31$。当月在阴历时，D_1 为定朔时刻与春分的时距；当月在阳历时，D_1 为定朔时刻与秋分的时距。

又，

$$每日食差=5D_2 \quad (2-2)$$

$D_2 \leqslant 91.31$。当月在阴历时，D_2 为定朔时刻与夏至的时距；当月在阳历时，D_2 为定朔时刻与冬至的时距。

又，当月在阴历时，秋分到春分的日食食差均为 457；当月在阳历时，春分到秋分的日食食差亦均为 457。

正元历：

$$每日食差=373-4D_1 \quad (2-3)$$

$D_1 \leqslant 91.31$。当月在阴历时，D_1 为定朔时刻与春分的时距；当月在阳历时，D_1 为定朔时刻与秋分的时距。

又，

$$每日食差=4D_2 \quad (2-4)$$

$D_2 = 91.31$。当月在阴历时，D_2 为定朔时刻与夏至的时距；当月在阳历时，D_2 为定朔时刻与冬至的时距。

又，当月在阴历时，秋分到春分的日食食差均为 373；当月在阳历时，春分到秋分的日食食差亦均为 373。

上述各食差值，五纪历是以 1340 为分母，正元历则以 1095 为分母，所以，可以说正元历所述各食差值基本上是同五纪历等价的$\left(如\frac{457}{1340}\approx\frac{373}{1095}，等等\right)$。而五纪历日食食差值的设定，是在一行大衍历的基础上有所更动。五纪历和正元历令月在阴历时，秋分初日到春分初日的食差均同；月在阳历时，春分初日到秋分初日的

---

[1] 《新唐书·历志五》。

食差也均同，这显然不符合因节气变化导致的月亮视差对日食食分大小影响的实际，所以，他们对大衍历所做的这一更动是极不成功的。但是，他们将日食食差表公式化的尝试却具有重大的意义，虽然其设定的算式还仅仅是一次函数式。

二、宣明历气差、刻差、加差算式及其对宋初历法的影响

徐昂宣明历首创日食四差（时差、气差、刻差和加差）之法，其中时差是由定朔时刻到食甚时刻的改正值，而气差、刻差和加差则是与日食食分大小有关的改正值，它们实际上就是对日食食分大小产生影响的日食食差值的变种。宣明历气差、刻差和加差的术文分别为[①]：

> 二至之初，气差二千三百五十，距二至前后（D_2），每日损二十（六）[五、小分八十二]，至二分而空。以日出没辰刻距午正刻数（K）约其朔日气差（Q'_1），以乘食甚距午正刻数（J），所得以减气差，为定数（Q_1）。春分后，阴历加之，阳历减之。秋分后，阴历减之，阳历加之。
>
> 二至初日，无刻差。自后每日益差二、小分十。起立春至立夏，起立秋至立冬，皆以九十四分有半为刻差。自后日损差分二、小分十，至二至之初，损尽。以朔日刻差（Q'_2）乘食甚距午正刻数（J），为刻差定数（Q_2）。冬至后食甚在午正前、夏至后食甚在午正后，阴历以减，阳历以加；冬至后食甚在午正后、夏至后食甚在午正前，阴历以加，阳历以减。
>
> 又立冬初日后，每气增差十七，至冬至初日，得五十一。自后，每气损十七，终于大寒，损尽。若食甚在午正后，则每刻累益其差，阴历以减，阳历以加。应加减差，同名相从，异名相销，各为食差。以加减去交分，为定分。

依之，宣明历气差（Q'_1）算式应为：

$$Q'_1 = 2350 - 25.82D_2 \qquad (2-5)$$

$D_2 \leqslant 91$，当 $91 \leqslant D_2 \leqslant 91.31$ 时，Q'_1 均为 0。D_2 为定朔时刻与二至的时距。春、秋分后 91 日至二至，Q'_1 均等于 2350（上术文中，从二至到二分均损 2350，其间历 91 日余，若每日损 26，需损 2366 以上，设每日损 26 无误，又以 91 日计，则应损 2366；若 2350 无误，则每日损 25、小分 82，暂取后者为准）。

宣明历刻差（Q'_2）算式应为：

$$Q'_2 = 2.1D_2 \qquad (2-6)$$

$D_2 \leqslant 45$，$45 \leqslant D_2 \leqslant 45.66$ 时，刻差均为 94.5。D_2 为定朔时刻与二至的时距。

① 《新唐书·历志六上》。

又，

$$Q'_2=94.5-2.1D_3 \tag{2-7}$$

$D_3 \leqslant 45$，$45 \leqslant D_3 \leqslant 45.66$ 时，Q'_2 均为 0。D_3 为定朔时刻与立夏或立冬的时距。又，立春（或立秋）到立夏（或立冬）期间，Q'_2 都等于 94.5。

宣明历加差值则可列如表 2－1。

表 2－1　宣明历和仪天历加差数值表

节气	立冬	小雪	大雪	冬至	小寒	大寒	立春	立春到立冬
宣明历	0	17	34	51	34	17	0	0
仪天历	0	20.44	40.88	61.32	40.88	20.44	0	0

欲求任一日的加差值，可依上表以一次差内插法计算之。由之可见，宣明历加差的计算仍取传统的历表和表格计算法，而对于气差和刻差则取公式算法，但还保留历表和表格计算法的某些特征，其所给算式存在非连续的部分，如气差算式对于 $91 \leqslant D_2 \leqslant 91.31$ 时，刻差算式对于 $45 \leqslant D_2(D_3) \leqslant 45.66$ 时，采用了与历表常用的"依平"相类似的处理方法，这正是从历表和表格计算法向历表公式化的过渡中所留存的痕迹。

宣明历所给气差、刻差、加差之和即为食差，它们均与日月相会时所值的节气以及与午正时刻的时距有关，也就是与月亮的天顶距大小有关，所以，该三差应是月亮视差对于日食食分大小影响的反映。

由气差术文可知：

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right) \tag{2-8}$$

当 $J=K$（日出没时，月亮天顶距等于 90°）时，$Q_1=0$。这就是说，无论在何节气，也无论月亮在阳历（外道）或阴历（内道），当月亮处于地平方位时，月亮视差对日食食分大小的影响均为 0，这是与实际情况相悖的。当 $J=0$（正午时，月亮天顶距较小），$Q_1=Q'_1$，而从二分后 91 日到二至 Q'_1 均为 2350，这就是说，当月亮处于中天时，无论月亮在阳历或阴历，从二分后 91 日到二至，月亮视差对日食食分大小的影响都是相同的，这也与实际情况相背离。由此看来，宣明历的气差改正是不妥当的。

又由刻差术文知：

$$Q_2=Q'_2 \cdot J \tag{2-9}$$

即刻差定数的大小与日月相会时距午正的时刻成正比，这一点是符合月亮视差对日食食分大小影响的效应的，但在二至时，Q'_2 均等于 0，则不与此效应符合，



而且宣明历以食甚在午正前或午正后作为 Q_2 为正或负值的判据，这一判据是似是而非的，所以，其刻差改正从总体上看也是不成功的。

而由加差术文可见，也以食甚在午正前、后，作为加差值正负的判据，其加差改正的不成功也可想而知。

质言之，徐昂宣明历气差、刻差和加差三差对于日食食分大小的改正是不成功的。可是，它们对后世历家却产生了巨大的影响。

北宋初王处讷应天历和吴昭素乾元历也用徐昂宣明历的气差和刻差法，分别名曰赤道差和黄道差、离差和晷差，并取消了加差法。而史序仪天历仍沿用气差、刻差和加差，只不过将前二差分别称作赤道食差和黄道食差。这三种历法也都以特定算式来计算每日气差和刻差值。

王处讷应天历"赤道差"(Q_1)术曰：

> 置入盈缩历日及分(D_2)，如九十一日以下，返减之，为初限日；以上者，用减一百八十二日半，余为末限日及分，四因之，用减三百(七)[六]十四，为泛差(Q'_1)。以乘距中分(J)，如半昼分(K)而一，用减泛差，为赤道定分(Q_1)。盈初缩末内减外加、缩初盈末内加外减。[1]

术文中泛差相当于宣明历的气差，赤道定分相当于宣明历的气差定数，盈初缩末和缩初盈末分别指秋分和春分，距中分(或距午分)即食甚时刻与午正的时距，半昼分即太阳出入时刻与午正的时距(下同)。

依术文可得：

$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=(364-4D_2)\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-10)$$

D_2 为定朔时刻距二至的日及分数，$D_2 \leqslant 91$，若 $D_2 > 91$，需以 182.5 返减之。春、秋分时，$D_2 = 91$，Q'_1 应等于 0，$91 \times 4 = 364$，故现传本术文中"三百七十四"应据改。

应天历求"黄道差"(Q_2)的术文曰：

> 置其朔入历盈缩日及分(D_2)，如四十五日以上、一百三十七日以下，皆以一千五百(乘)[八]为泛差；如四十五日以下，返减之，余为初限日，一百三十七日以上者减去之，余为末限日及分，以六十七乘，半之，用减泛差，以乘距午分(J)，以元法(10002)收为黄道定分(Q_2)。入盈，以定分午前内减外加、午后内加外减；入缩，以定分午前内加外减、午后内减外加。[2]

依之可得：

---

① 《宋史・律历志二》。

② 《宋史・律历志二》。

当 $45<D_2<137$ 时，

$$Q_2=\frac{1508J}{10002} \quad (2-11)$$

当 $D_2<45$ 时，需以 45 返减之；当 $D_2>137$ 时，需以 137 减去之，

$$Q_2=\frac{J}{10002}\left(1508-\frac{67}{2}D_2\right) \quad (2-12)$$

上二式中，D_2 为定朔时刻与二至的时距，$D_2\leqslant 182$。前已述及，宣明历的刻差在二至时为 0（下面我们就要提及乾元历和仪天历亦同），应天历黄道差在二至时也应为 0。当二至时，$D_2=182$，代入式（2－12），$\frac{67\times 45}{2}=1507.5$（以 1508 计）$\neq$ 1500，则 $Q_2\neq 0$，欲令其等于 0，需将上术文中"一千五百乘"校改为"一千五百八"。

显然，王处讷对 Q_2 与节气关系的描述，同宣明历的相应描述从总体走势到正负判定都是相同的。式（2－11）所表述者，与宣明历从立春（或立秋）到立夏（或立冬）期间的刻差相当；式（2－12）所表述者，则与宣明历从二至到立春或立秋及从立夏或立秋到二至期间刻差的变化状况相当。只是王处讷所认定的黄道差的大小与徐昂有所不同。关于 Q_1 的描述，王处讷也与徐昂所述大体相同。

吴昭素乾元历"离差"（Q_1）术曰：

> 计春、秋二分后（日加入气日）［之气］，以十五乘，［加入气日］（D_1），在九十［一］以下，以九十（一）乘，退为泛差；九十一以上去之，余以九十（一）乘，退一等，以减八百一十九，为泛差；二分气内置入气日，以九十（一）乘，退为泛差，以半昼刻（K）而一，以乘距午分（J），用加减泛差，为离差（Q_1）……春分后阴加阳减，秋分后阴减阳加。[①]

依术文意，可引出以下二式：

当 $D_1<91$ 时，

$$Q_1=90D_1\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-13)$$

当 $D_1>91$ 时，需以 91 减去之，

$$Q_1=\left(819-\frac{90D_1}{10}\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-14)$$

式中 D_1 为定朔时刻距二分的时距，$D_1\leqslant 182$。由上术文可推知，春、秋分时 Q_1 应为 0。当春、秋分时，$D_1=0$ 或 182，分别代入上二式 Q_1 正得 0。故上术文中三处"九十一乘"均应校改为"九十乘"。由上二式可知，吴昭素以为二至前后对称时日的泛差值，二至前应为二至后的 10 倍，这同徐昂、王处讷的相关描述是不大相同

① 《宋史·律历志二》。



的。但关于离差值的计算法及其正负的判定则与徐昂、王处讷无异。

乾元历求“晷差”(Q_2)术曰：

置入气日，以距冬至之气，以十五乘之，以所入气日通之，以一百八十二日以下为入阳历，以上者去之，为入阴历。置入历分(D)，在四十五以下，以三十七乘，五除，退一等，为泛差；在四十五日以上、一百三十七日以下，只用三十三、秒三十为泛差；一百三十七日以上者去之，余以三十七乘，五除，退一位，用减三十二、秒三十，为泛差。皆以距午分(J)乘，为晷差(Q_2)。[1]

依之可得：

当 $D<45$ 时，

$$Q_2=\frac{37}{50}DJ \tag{2—15}$$

当 $D>137$ 时，需以 137 减去之，

$$Q_2=\left(33.30-\frac{37}{50}D\right)J \tag{2—16}$$

当 $45<D<137$ 时，

$$Q_2=33.30J \tag{2—17}$$

以上 D 均为定朔时刻与冬至的时距，$D<182$，若 $D>182$，需以 182 减去之。由之可见，吴昭素“晷差”算式与徐昂、王处讷的相应算式是相类似的。

接着再来讨论史序仪天历三差的算法，其求“赤道食差”(Q_1)的术文曰：

二分后益差至二至，损差皆二千八百二十六，自后累减至二分空。冬至后日损三十一、小分八十，夏至后日益三十、小分十五。又以宗法(10100)乘积差，各以盈缩初末限分(93.7142 和 88.8811)除之，为日差；乃以末限(春、秋分后)累增、初限(冬、夏至后)累损，各为每日食差(Q'_1)；又以半昼刻数(K)约其日食差，以乘食甚距午正刻(J)，所得以减食差，余为定数(Q_1)。余同乾元。[2]

依之可得：

冬至前后，

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=(2826-31.80D)\left(1-\frac{J}{K}\right) \tag{2—18}$$

$D\leqslant 88.8811$，D 为定朔时刻与冬至的时距。

① 《宋史·律历志二》。

② 《宋史·律历志二》。

夏至前后，

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=(2826-30.15D_4)\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-19)$$

$D_4\leqslant 93.7142$，D_4 为定朔时距与夏至的时距。

仪天历 Q'_1 以 10100 为分母，而宣明历 Q'_1 则以 8400 为分母，$\frac{2826}{10100}\approx\frac{2350}{8400}$（这也正是我们在讨论宣明历气差术文时，以为 2350 无误的主要依据）。由此看来，仪天历赤道食差算式是在宣明历相关算式的基础上稍做修订，将冬至和夏至前后的日数以定气日数入算，并对每日损益数做相应调整。

仪天历求"黄道食差"（Q_2）术曰：

> 二至后（D_2）日益差至立春、立秋，得一百一十三、小分六十二半，立夏、立冬后（D_3）每日损，以宗法（10100）乘之；冬至、立冬后各三气用四十四万二千三百八十四除，夏至、立夏后各三气用二十七万九千八百五十八除，为食差（Q'_2）；以食甚距午正刻（J）乘其日食差，为定差（Q_2）。冬至后，甚在午正东，阴减阳加；甚在午正西，阴加阳减。夏至后即返此。[①]

依之可得以下算式：

（黄道食差）$'=2.525D_2$，$D_2\leqslant 45$，$45\leqslant D\leqslant 45.66$ 时，（黄道食差）$'$ 均为 113.625，D_2 为定朔时刻与二至的时距。又，（黄道食差）$'=113.625-2.525D_3$，$D_3\leqslant 45$，$45\leqslant D_3\leqslant 45.66$ 时，（黄道食差）$'$ 均等于 0，D_3 为定朔时刻与立夏或立冬的时距。又，立春（或立秋）到立夏（或立冬）期间，（黄道食差）$'$ 均为 113.625。至此，若与宣明历的 Q'_2 比较，不难发现两者是相类似的。又虑及 $\frac{2.1}{8400}=\frac{2.525}{10100}$，所以，仪天历的（黄道食差）$'$ 实即宣明历的 Q'_2。当然，仪天历的 Q'_2 是在此基础上有所变化：

$$Q_2=Q'_2J \qquad (2-20)$$

冬至后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{442384}\times 2.525D_2$$

夏至后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{279858}\times 2.525D_2$$

立冬后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{442384}(113.625-2.525D_3)$$

① 《宋史·律历志二》。



立夏后三气，

$$Q'_2=\frac{10100}{279858}(113.625-2.525D_3)$$

立春（或立秋）到立夏（或立冬）期间，Q'_2 均等于 10100×113.625。

由此看来，史序认为冬至前后三气与夏至前后三气的 Q'_2 值是不相同的，后者要较前者为大，这同徐昂等人所述存在明显的差异。但从算式总体上考察，仍不脱徐昂的框架。从仪天历的"加差"术，更可以看到它受宣明历的影响：

> 立冬初日后，每气益差二十、秒四十四，至冬至初日加六十（二）[一]、秒三十二；自后每气损差二十、秒四十四，终于大寒。甚在午正西，即每刻累益其差，阴历加，阳历减。[1]

此术文与宣明历加差的术文十分类似。立冬到冬至、冬至到大寒均历三个节气，每节气损差 20.44，三个节气损益应为61.32，故上术文应据改。依此可将仪天历加差列于表 2－1 中。又虑及宣明历和仪天历加差值的分母分别为 8400 和 10100，遂有$\frac{\text{宣明历加差值}}{8400}=\frac{\text{仪天历加差值}}{10100}$，所以，仪天历加差不过是宣明历加差的翻版而已。

三、崇天历及其后诸历法的气差、刻差算式

下面我们再来介绍后世其他历法的气差和刻差算式。

宋行古崇天历气差定数(Q_1)算式的术文曰：

> 置其朔中积(D)，满二至限(182.62)去之，余在一象(91.31)以下为在初；已上，复减二至限，余为在末。皆自相乘，进二位，满二百三十六除之，用减三千五百三十三，为气差(Q'_1)，以乘距午定分(J)，半昼分(K)而一，所得，以减气差，为定数(Q_1)。[2]

依术文意则有：

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(3533-\frac{100}{236}D^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right)\qquad(2-21)$$

上式中 D 为定朔时刻与冬至的时距。$D<182.62$，若 $D>182.62$，需减去 182.62；又，$D<91.31$，若 $D>91.31$，需以 182.62 返减之。这是一个包含常数项和二次项的函数式，与前述各历法的相关算式均用一次函数式是不相同的。当 $D=0$（冬至时），或 $D=182.62$（夏至时），代入式(2－21)，得$Q'_1=3533$；当 $D=91.31$



[1] 《宋史·律历志二》。

[2] 《宋史·律历志六》。

(春分时),或 $D=273.93$(秋分时),代入式(2—21),得 $Q'_1=0$。这就是说,式(2—21)是表述 Q'_1 在二至时达到极大,而在二分时等于0的二次函数式。对 Q'_1 的这种表述,从总体上与前述宣明历等历法对 Q'_1 的描述并无本质差别,只是新瓶装老酒而已。对于 Q_1 算式的总体估价,亦当作如是观。

崇天历刻差定数(Q_2)算式的术文为:

置其朔中积(D),满二至限(182.62)去之,余[置于上],列二至限于下,以上减下,余以乘上,进二位,满二百三十六除之,为刻差(Q'_2),以乘距午定分(J),四因之,枢法(10590)而一,为定数(Q_2)。[1]

依之可列出下式:

$$Q_2=\frac{4}{10590}Q'_2J \tag{2—22}$$

$$Q'_2=\frac{100}{236}(182.62-D)D \tag{2—23}$$

式中,J、D 等的含义同式(2—21)。上术文中,置某某于上,列某某于下,以上减下,余以乘上云云,是唐代曹士蒍在符天历中首创、边冈在崇玄历中表述为先相减后相乘法(详见本章第二节)又一种典型的表述方式,这种表述方式在后世历法中广为采用。它所表述的是包括有一次项和二次项的函数式。当 $D=0$(冬至时),或 $D=182.62$(夏至时),代入式(2—23),得 $Q'_2=0$;当 $D=91.31$(春分时),或 $D=273.93$(秋分时),代入式(2—23),得 $Q'_2=3533$。这就是说,式(2—23)是表述 Q'_2 在二至时为0,在二分时达到极大的二次函数式。对 Q'_2 的这种表述,与前述宣明历等历法对 Q'_2 的描述有较大的不同。如,宋行古并不认为从立春(或立秋)到立夏(或立冬)期间的 Q'_2 均等,而认为在此期间,Q'_2 值是以春分(或秋分)为极大值,循式(2—23)所示的二次曲线变化的。而且宋行古还认为 Q'_2 的大小与 Q'_1 的大小处于同一个量级,这也与徐昂等人的描述大不相同。可是,宋行古对 Q'_2 的这些新描述,也不符合月亮视差对日食食分大小影响的实际状况:冬至时影响较大,夏至时影响较小,而二分时居中。所以,宋行古对于 Q'_2 值的描述也是不成功的。但宋行古所给出的气差和刻差算式的两种不同的二次函数式,却对后世相关算式产生了巨大的影响。

对于气差和刻差,周琮明天历分别称之为南北差(Q_1)和东西差(Q_2),其术依次为[2]:

求日食四正食差定数:置其朔加时定日(D),如半周天(182.6282)以

① 《宋史·律历志六》。
② 《宋史·律历志八》。



下者为在盈，以上者去之，余为在缩。视之如在初限（盈初限 60.875、缩初限 121.75）以下者为在初；以上者，复减二至限（182.625），余为在末。置初、末限度及分，置于上位，列二百四十三度半于下，以上减下，余以下乘上，以一百六乘之，满三千九十三除之，为东西食差泛数（Q'_2），用减五百八，余为南北食差泛数（Q'_1）。

其求南北食差定数者，乃视午前、后分（J），如四分法之一（9750）以下者复减之，余以乘泛数（Q'_1）；若以上者即去之，余以乘泛数，皆满九千七百五十除之，为南北差定数（Q_1）。

其求东西食差定数者，乃视午前、后分（J），如四分法之一（9750）以下者以乘泛数（Q'_2）；以上者，复减半法（19500），余乘泛数，皆满九千七百五十除之，为东西差定数（Q_2）。

依术文意，可列出以下诸算式：

$$Q_1=\frac{1}{9750}Q'_1J \tag{2-24}$$

$$Q'_1=508-\frac{106}{3093}(243.5-D)D \tag{2-25}$$

$$Q_2=\frac{1}{9750}Q'_2J \tag{2-26}$$

$$Q'_2=\frac{106}{3093}(243.5-D)D \tag{2-27}$$

式中 D 为定朔时刻与冬至的时距，若 $D<182.6282$，为在盈限，若 $D>182.6282$，需以 182.6282 返减之，余为在缩限。对于盈限而言，当 $D<60.875$ 时，为在初限；当 $D\geqslant60.875$ 时，需以 182.625 返减之，余为在末限。对于缩限而言，当 $D<121.75$ 时，为在初限；当 $D\geqslant121.75$ 时，需以 182.625 返减之，余为在末限。J 的含义为食甚与午正时刻的时距。式（2－24）和式（2－26）是一包括常数项、一次和二次项的函数式，这与前述各历法的相关算式不同，而且它们也与定朔日太阳出没时刻与午正的时距（K）无关，这又是重要的区别之一。又由式（2－24）和式（2－26）知，Q_1 和 Q_2 的大小与 J 成正比，这同月亮视差对日食食分大小影响的效应是相符的。



当 $D=0$（冬至时），或 $D=182.6282$（夏至时），代入式（2－25），得 $Q'_1=508$；当 $D=60.875$（雨水时），或 $D=243.5032$（处暑时），代入式（2－25），得 $Q'_1=0$。这就是说，式（2－24）是表达 Q'_1 在二至时达到极大值，而在雨水或处暑时为 0 的二次函数式。它与崇天历所描述的 Q'_1 变化的不同之处仅在于，将 $Q'_1=0$ 从春分推前两个节气（雨水），从秋分向前推两个节气（处暑）。当 $D=0$（冬至时），或 $D=182.6282$（夏至时），代入式（2－27），得 $Q'_2=0$；当 $D=60.875$（雨水时），或 $D=$

243.5032(处暑时),代入式(2－27),得 $Q'_2=508$。即式(2－26)是表述 Q'_2 在二至时为0,而在雨水或处暑时为极大值的二次函数式。同理,它与崇天历所描述的 Q'_2 变化的差异仅在于,将 Q'_2 为极大值时,从二分分别推前至雨水或处暑。周琮对于 Q'_1 和 Q'_2 的描述做这样的调整,并未突破宋行古所设置的总体框架。

皇居卿观天历气差定差(Q_1)算式的术文曰:

> 置其朔盈、缩限度及分(D_2),自相乘,进二位,盈初、缩末(指冬至后盈初、夏至后缩末限日88.91)一百九十七而一,盈末、缩初(指夏至后缩初、冬至后盈末限日93.71)二百一十九而一,皆用减四千一十,为气泛差(Q'_1)。以乘午前、后分(J),如半昼分(K)而一,所得,以减[气]泛差,为定差(Q_1)。[①]

依术文意,可列出下式:

当在冬至后盈初、夏至后缩末(冬至前后)时,$D_2<88.91$,

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(4010-\frac{100}{197}D_2^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-28)$$

当在夏至后缩初、冬至后盈末(夏至前后)时,$D_2<93.71$,

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(4010-\frac{100}{219}D_2^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \quad (2-29)$$

式中 D_2 为定朔时刻与二至的时距。式(2－28)、式(2－29)和式(2－21)并无本质的不同,皇居卿只是将宋行古所述 $Q'_1=0$ 的时日从平春、秋分改为定春、秋分。

观天历刻差定差(Q_2)算式的术文是:

> 置其朔盈、缩限度及分(D_2),与半周天(182.63)相减相乘,进二位,二百九而一,为刻泛差(Q'_2)。以乘午前、后分(J),如三千七百半而一,为定差(Q_2)。[②]



依此可得:

$$Q_2=\frac{1}{3700.5}Q'_2J$$

$$Q'_2=\frac{100}{209}(182.63-D_2)D_2 \quad (2-30)$$

式中 D_2 的含义与式(2－29)同。该算式回复到宋行古所给的函数形式上去是显而易见的。

姚舜辅纪元历气差定数(Q_1)算式术文是:

---

① 《宋史·律历志十一》。

② 《宋史·律历志十一》。



置日食甚行积度及分(D_5)，满二至限(182.6218)去之，余在象限(91.3109)已下为在初；已上，复减二至限，余为在末。皆自相乘，进二位，满三百四十三而一，所得，用减二千四百三十，余为气差(Q'_1)，以午前、后分(J)乘之，如半昼分(K)而一，以减气差，为气差定数(Q_1)。①

依术文意，遂有：

$$Q_1=Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right)=\left(2430-\frac{100}{343}D_5^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-31)$$

式中，D_5 为食甚时刻与冬至的时距，$D_5<182.6218$，若 $D_5>182.6218$，需减去182.6218；又，$D_5<91.3109$，若 $D_5>91.3109$，需以 182.6218 返减之。若将式(2－21)和式(2－31)作比较，虑及该二式 Q_1 值的分母分别为 10590 和 7290，则$\frac{3533}{10590}$与$\frac{2430}{7290}$之差小于 3×10^{-4}，$\frac{100}{236\times10590}$与$\frac{100}{343\times7290}$之差小于 2×10^{-8}，这说明式(2－31)与式(2－21)实际上是等价的。

纪元历刻差定数(Q_2)术曰：

置日食甚日行积度及分(D_5)，满二至限(182.6218)去之，余[置于上]，列二至限于下，以上减下，余以乘上，进二位，满三百四十三而一，所得，为刻差(Q'_2)；以午前、后分(J)乘而倍之，如半法(3645)而一，为刻差定数(Q_2)。②

依之可得：

$$Q_2=\frac{2}{3645}Q'_2J \qquad (2-32)$$

$$Q'_2=\frac{100}{343}(182.6218-D_5)D_5$$

式中 D_5 含义同式(2－31)。将式(2－22)与式(2－32)相比较，$\frac{400}{236\times10590}$与$\frac{200}{3645\times343}$之差小于 8×10^{-8}，亦可见式(2－32)与式(2－22)是等价的。

姚舜辅 Q_1 和 Q_2 算式为南宋诸历沿用不弃。而金代赵知微重修大明历气差定数(Q_1)算式的术文为：

置日食甚日行积度及分(D_5)，满中限(182.6218)去之，余在象限(91.3109)以下，为初限；以上，复减中限，为末限。皆自相乘，进二位，如四百七十八而一，所得，用减一千七百四十四，余为气差恒数(Q'_1)，以午

① 《宋史・律历志十三》。

② 《宋史・律历志十三》。

前、后分(J)乘之，半昼分(K)除之，所得，以减恒数为定数(Q_1)。[1]

依之，可列出下式：

$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right) = \left(1744-\frac{100}{478}D_5^2\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \tag{2-33}$$

式中 D_5 的含义同式(2－31)。若将式(2－21)与式(2－33)比较，又虑及二式 Q_1 值分母分别为 10590 和 5230，则有$\frac{3533}{10590}$与$\frac{1744}{5230}$之差小于 2×10^{-4}，$\frac{100}{236\times10590}$与$\frac{100}{478\times5230}$之差小于 2×10^{-8}，故式(2－33)与式(2－21)实际上也是等价的。

重修大明历刻差定数(Q_2)算式的术文为：

置日食甚日行积度及分(D_5)，满中限(182.6218)去之，余与中限相减相乘，进二位，如四百七十八而一，所得，为刻差恒数(Q'_2)。以午前、后分(J)乘之，日法四分之一(1307.5)除之，所得为定数(Q_2)。[2]

依此可得：

$$Q_2 = \frac{1}{1307.5}Q'_2 J \tag{2-34}$$

$$Q'_2 = \frac{100}{478}(182.6218-D_5)D_5$$

式中 D_5 含义同上。将式(2－34)与式(2－22)及式(2－32)比较，$\frac{400}{236\times10590}$与$\frac{100}{478\times1307.5}$之差小于 5×10^{-8}；$\frac{200}{3645\times343}$与$\frac{100}{478\times1307.5}$之差小于 4×10^{-8}。可见，式(2－34)同式(2－22)及式(2－32)应该说都是等价的。

元代耶律楚材的气差和刻差算式与重修大明历全同。

郭守敬授时历也给出有关算式，称气差为南北差，称刻差为东西差，与周琮明天历的名称相同。

授时历南北差定差(Q_1)算式的术文曰：

视日食甚入盈缩历定度(D_6)，在象限(91.314375)已下，为初限；已上，用减半岁周(182.62125)，为末限。以初、末限度自相乘，如一千八百七十而一，为度，不满，退除为分秒，用减四度四十六分，余为南北泛差(Q'_1)。以距午定分(J)乘之，以半昼分(K)除之，以减泛差为定差(Q_1)。[3]

依此可得：

---

① 《金史·历志下》。
② 《金史·历志下》。
③ 《元史·历志四》。



$$Q_1 = Q'_1\left(1-\frac{J}{K}\right) = \left(4.46-\frac{D_6^2}{1870}\right)\left(1-\frac{J}{K}\right) \qquad (2-35)$$

式中，D_6 为食甚时刻与二至的时距，$D_6 < 91.314375$，若$D_6 > 91.314375$，需以182.62125返减之。

授时历东西差定差(Q_2)算式的术文是：

视日食甚入盈缩历定度(D_6)，与半岁周(182.62125)相减相乘，如一千八百七十而一，为度，不满，退除为分秒，为东西泛差(Q'_2)，以距午定分(J)乘之，以日周四分之一(2500)除之，为定差(Q_2)。[①]

依之则有：

$$Q_2 = \frac{1}{2500}Q'_2 J = \frac{JD_6}{2500\times1870}(182.62125 - D_6) \qquad (2-36)$$

式中，D_6 的含义和界定均同式(2—35)。由之可见，授时历 Q_1 和 Q_2 算式仍取用与宋行古崇天历相同的函数形式。

综上所述，关于月亮视差对于日食食分大小改正值的计算，自唐代郭献之五纪历开始了公式化的尝试，徐承嗣正元历则承用了五纪历的方法。徐昂在宣明历中，首创将该改正值辟为气差、刻差和加差三项加以计算，对于气差和刻差也给出了公式化的算式，而且它关于气差和刻差对日食食分大小影响的基本观念，对后世产生了巨大的影响。北宋以后各历法(除仪天历外)均只用气差和刻差二法。北宋初年王处讷应天历、吴昭素乾元历和史序仪天历的相关算式均在继承徐昂算式的基础上，小作调整，而自宋行古崇天历以后才发生较大的变化。

关于气差定数(或定差)算式，宋行古应用的自相乘二次函数式，为姚舜辅、赵知微等人继而用之，可见影响之大。周琮南北食差定数算式与之不同，它是由东西食差定数算式派生出来的，其函数形式属先相减、后相乘的类型。就函数形式而言，皇居卿和郭守敬等人的气差定差算式亦采用宋行古的形式，但设定了不同的系数，这是皇居卿、郭守敬等人认定的气差定数大小与宋行古不同所致。此外，皇居卿认为气差定数大小因盈缩限不同而异，这也是其算式与宋行古算式的差异所在。

关于刻差定数(或定差)算式，宋行古应用先相减、后相乘的二次函数形式，这为周琮、皇居卿、姚舜辅、赵知微和郭守敬等人沿用不弃，其中姚舜辅、赵知微算式实际上是宋行古算式的翻版，而周琮、皇居卿和郭守敬等人的算式则是取用了不同的系数，这是因为他们认定的刻差定数(或定差)的大小与宋行古所认定者有所不同。

由上述气差和刻差定数(或定差)算式可知，中国古代历家认为气差和刻差的



① 《元史·历志四》。

大小是与日食定朔(或食甚)时日月的时角有关,又与日食发生所值的季节有关。时角不同意味着月亮的天顶距不同,季节不同也意味着月亮的天顶距各异,所以,气差和刻差应是与月亮视差有关的改正值,当无疑问。可惜,中国古代历家从总体上并未对此做出成功的描述,甚或以食甚发生于午正前或后作为气差和刻差(还有加差)为正或负值的判据,这更是不正确的。关于上述算式精度的定量分析,是一个十分复杂的问题,尚有待进一步的研究。

第二节　日月五星中心差算式

一、太阳中心差算式

1964 年,日本学者中山茂在日本天理图书馆发现了唐代曹士蒍符天历的残本。该残本列有一表格,载冬至以后每经 1 度(从 1 度到 182 度)太阳实际行度(V)与平均行度(M,以太阳每日运行 1 度计)之差,称为“盈缩度分”,以及“盈缩度分”的累积值,即($V-M$),称“差积度分”。在此表格之末附有一段说明文字。经中山茂研究,这一段说明文字表述的是如下计算公式:①

$$V-M=\frac{M}{3300}(182-M) \qquad (2-37)$$

还需指出的是,M 为所求日太阳距冬至的平均行度值(下同),在应用式(2-37)时,当 $M<182$ 度时为盈历,而当 $M>182$ 度时为缩历(需以 182 度减去之)。无论在盈、缩历,$M<91$ 度,若 $M>91$ 度,则需以 182 度返减之。所谓盈历(或疾历)是指其时$V-M$ 为正值;而缩历(或迟历)是指其时 $V-M$ 为负值。$V-M$ 即为所求日太阳实行度与平行度之差(下同)。

依式(2-37)对残本表载值进行核算,除两处有小误外②,其余均相吻合。这可以证明式(2-37)是可信的。式(2-37)便是中国古代最早出现的太阳中心差算式,而残本所示的表格当是依此算式计算列出的,它不但在形式上与传统的日躔表不同(它每隔 1 度给出一组差值,而传统日躔表则以二十四节气为单位),而且在内容上也与传统日躔表有本质的差别(传统日躔表给出的是具有 24 个奇点的变化曲线,而它给出的则是无奇点的连续变化的二次曲线),这也正是历表及表格计算法同公式化算法重要的差别之一。

---

① 中山茂:《符天历在天文学史上的地位》,载日本《科学史研究》71 号,1964 年。

② 当 M 为 52 度和 130 度时,表载差积度分小分值一为 84,一为 85,据式(2-37)算应为 85;当 M 为 32 度和 150 度时,表载盈缩度分小分为 57,据式(2-37)算应为 60。



符天历之所以既给出如式(2－37)所示的算式，又给出由之派生的新型表格，大约是为适应传统的应用表格进行计算的习惯，而且在应用新型表格进行计算时只需采用一次差内插法，既较方便又可保持必要的精度，所以也不失为一种有效的方法。这种以公式为基础的表格计算法，在近现代数学、天文学等学科的许多问题的计算中，仍是一种广泛应用的方法，从这个意义上看，曹士蒍乃是应用这类计算法的先驱者。

第一位继承并发展曹士蒍发明的太阳中心差算式者是唐末的边冈。边冈在崇玄历中列有传统的日躔表，并用表格计算法以推求节气、朔望等的时刻。而在推求五星运动从常合日到定合日的改正值时，即考虑太阳运动不均匀性对五星定合时刻的影响时，边冈则给出了形式和内容都不相同的算法：

> 视定积(M)如半交(181.8682)已下，为在盈；已上，去之，为在缩。所得，令半交度先相减，后相乘，三千四百三十五除，为度($V-M$)。①

依此可列出下式：

$$V-M=\frac{1}{3435}(181.8682-M)M \qquad (2-38)$$

式中，$M<181.8682$ 度，若 $M>181.8682$ 度，需以 181.8682 度减去之。

从形式上看，式(2－38)与式(2－37)相同是显而易见的，边冈只是在具体数值上有所修正而已。由上引术文知，边冈将曹士蒍所首创的二次函数以“先相减，后相乘”的术语来描述，这一术语遂成为被广泛应用的描述此类二次函数的专用术语之一。还需指出的是，崇玄历的日躔表和依式(2－38)计算而得的相应表格是不相吻合的，也就是说其日躔表不是由式(2－38)计算而得的。显然，边冈认为依传统的日躔表及表格计算法求得的太阳运动不均匀性改正值需精细些，故用之于气朔等的计算，而依式(2－38)算得的改正值要粗略些，故用之于对太阳运动不均匀性改正精度的要求不必太高的五星定合时刻的计算。由此我们看到了在同一部历法中，两种不同的计算太阳中心差的方法并存不悖的例子。



随后，太阳中心差算式又见于北宋史序的仪天历中，该算式的术文有如下述：

> 以宗法(10100)乘盈缩积(24543)，以其限分(897699.5或946785.5)除之，为限率分；倍之，为初、末限平率(E)；日分(即宗法)乘之，亦以限分除之，为日差(F)；半之，加减初、末限平率，在初者减初加末，在末者减末加初，为初、末定率；乃以日差累加减限初、末定率，初限以减，末限以加，为每日盈缩定分($V-M$)。②

① 《新唐书·历志六下》。

② 《宋史·律历志一》。

依之可列出以下算式：

$$V-M=\frac{1}{10100}\left[M\left(E-\frac{1}{2}F\right)-\frac{M(M-1)}{2}F\right] \qquad (2-39)$$

对于冬至后盈初（$M<88.8811$ 日）和夏至后缩末（$M>93.7412$日，需以182.62日返减之）时，

$$E=\frac{24543\times10100\times2}{897699.5};F=\frac{10100}{897699.5}E$$

对于夏至后缩初（$M<93.7412$ 日）和冬至后盈末（$M>88.8811$日，需以182.62日返减之）时，

$$E=\frac{24543\times10100\times2}{946785.5};F=\frac{10100}{946785.5}E$$

若将这两组 E 与 F 分别代入式（2－39）可得：

对于盈初、缩末：

$$V-M=\frac{M}{3250.9699}(177.7623-M) \qquad (2-40)$$

对于缩初、盈末：

$$V-M=\frac{M}{3616.2144}(187.4823-M) \qquad (2-41)$$

虽然史序采用了如式（2－39）所示的相当繁杂的太阳中心差算式表述法，但式（2－40）和式（2－41）乃是其算式的实质性形式，它们与式（2－37）的形式是相同的。考察该二式中所用系数与式（2－37）和式（2－38）稍有不同，但仍不难看到受式（2－37）和式（2－38）影响的迹象。当然，史序并非简单地袭用式（2－37），而是在太阳视运动重新研究的基础上，参照曹士蔿的方法加以总结的。

北宋周琮明天历关于太阳中心差算式的术文是：

> 各置朔、弦、望所入盈缩度及约分（M），如在象度分（91.3109）以下者为在初；已上者，覆减二至限（182.6218），余为在末。置初、末度分于上，列二（至）[百]于下，以上减下，余以下乘上，为积数，满四千一百三十五除之为度，不满，退除为分，命曰盈缩差度及分（$V-M$）。①

依术文意，其算式应为：

$$V-M=\frac{M}{4135}(200-M) \qquad (2-42)$$

式中，$M<182.6218$ 时，为盈历；若 $M>182.6218$，为缩历（需以 182.6218 减去之）。无论在盈、缩历，$M<91.3019$，若 $M>91.3019$，需以 182.6218 返减之。

---

① 《宋史·律历志七》。



北宋皇居卿观天历也给出了太阳中心差算式，其术曰：

求每日盈缩分（$V-M$）：置入二至后全日（M），各在初限$\left(冬至后盈初 88\frac{10958}{12030}，夏至后缩初 93\frac{8552}{12030}\right)$已下，为初限；已上，用减二至限$\left(182\frac{7480}{12030}\right)$，余为末限。列初、末限日及分于上，倍初、末限日及约分于下，相减相乘。求盈缩分者，在盈初、缩末，以三千二百九十四除之；在盈末、缩初，以三千六百五十九除之，皆为度，不满，退除为分秒。①

依术文意，其算式应分别为：

对于冬至后盈初$\left(M<88\frac{10958}{12030}\right)$、夏至后缩末$\left(M>93\frac{8552}{12030}，需以 182\frac{7480}{12030}返减之\right)$时：

$$V-M=\frac{M}{3294}(177.8218-M) \qquad (2-43)$$

对于夏至后缩初$\left(M<93\frac{8552}{12030}\right)$和冬至后盈末$\left(M>88\frac{10958}{12030}，需以182\frac{7480}{12030}返减之\right)$时：

$$V-M=\frac{M}{3659}(187.4218-M) \qquad (2-44)$$

将式(2－40)、式(2－43)、式(2－41)和式(2－44)加以比较，不难看出它们十分相似，可以说后二式是参照前二式稍做修订而得的，只是对于算式的表述，皇居卿采用了较史序简明的方式。

上述五种历法取用的太阳中心差算式同属一种类型，给出的是一个包括一次项和二次项的二次函数式。太阳中心差算式的另一种类型则见于元代郭守敬等人的授时历中，其术曰：

视入历盈者，在盈初缩末限(88.909225)已下，为初限，已上，返减半岁周(182.62125)，余为末限；缩者，在缩初盈末限(93.712025)已下，为初限，已上，返减半岁周，余为末限。其盈初缩末者，置立差三十一，以初末限(M)乘之，加平差二万四千六百，又以初末限乘之，用减定差五百一十三万三千二百，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒；缩初盈末者，置立差二十七，以初末限乘之，加平差二万二千一百，又以初末限乘之，用减定差四百八十七万六百，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除

① 《宋史·律历志十》。

为分秒，即所求盈缩差(V－M)。[①]

依术文意，其算式应分别为：

对于冬至后盈初($M<88.909225$)和夏至后缩末($M>93.712025$，需以182.62125返减之)时，

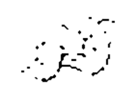
$$V-M=[5133200-(24600+31M)M]M\times10^{-8} \qquad (2-45)$$

对于夏至后缩初($M<93.712025$)和冬至后盈末($M>88.909225$，需以182.62125返减之)时，

$$V-M=[4870600-(22100+27M)M]M\times10^{-8} \qquad (2-46)$$

这是应用三次差内插法而得的太阳中心差算式，是包含一次项、二次项和三次项的函数式，它们是王恂、郭守敬等人对招差法的应用与发展。

以上便是中国古代历法中太阳中心差算式的基本情况，它们所达到的精度可做如下简要介绍：令 $M=91$ 代入式(2－37)、$M=90.9341$ 代入式(2－38)、$M=88.8815$代入式(2－40)或 $M=93.74115$代入式(2－41)、$M=91.3019$ 代入式(2－42)、$M=88.9109$代入式(2－43)或 $M=93.7109$ 代入式(2－44)、$M=88.909225$代入式(2－45)或 $M=93.712025$ 代入式(2－46)，可分别算得曹士蒍、边冈、史序、周琮、皇居卿和郭守敬等人所取用的太阳中心差的最大值为 148′.4、142′.4、143′.7、141′.9、141′.9 和 142′.0[②]。而自曹士蒍至郭守敬所处的年代，太阳中心差最大值应在 118′.3 至 116′.9 之间变动，可见边冈太阳中心差最大值的精度较曹士蒍所取值有所提高，其后多数历法所取值的精度又较边冈略有改进。这些太阳中心差算式所表达的太阳实行度值与相应理论值的平均误差均大略保持在相应年代日躔表的水平之上。



二、月亮和五星中心差算式

最先给出月亮和五星中心差算式者是北宋的周琮。他在明天历中分别给出下述术文[③]。

对于月亮运动迟疾改正的算式，其术曰：

置所求月行入迟(速)[疾]度(M)，如在象度(92.0927)以下，为在初；以上，覆减中度(184.1854)，余为在末。其度余用约分，百为母。置初、末度于上，列二百一度九分于下，以上减下，余以下乘上，为积数，满一千九百七十六除为度，不满，退除为分，命曰迟疾差度[(V－M)′]。

---

① 《元史・历志三》。

② 陈美东：《我国古代的中心差算式及其精度》，《自然科学史研究》，1986 年，第 4 期。

③ 《宋史・律历志八》。



依其意，算式可列为：

$$(V-M)'=\frac{M}{1976}(201.09-M) \quad (2-47)$$

式中，当$M<184.1854$时，为疾历；当$M>184.1854$时，为迟历（需以184.1854减去之）。无论在迟、疾历，$M<92.0927$，若$M>92.0927$，需以184.1854返减之。

这里还要特别指出的是：依式(2－47)计算而得的迟疾差度是指月亮实行度与月亮的平行度之差，而：

$$\text{月亮日平行度}(G)=\frac{\text{回归年长度或恒星年长度}}{\text{恒星月长度}}$$

在本文开头，已经指出中心差是指真近点角与平近点角之差，对于月亮而言：

$$\text{每日平近点角的变动值}(H)=\frac{\text{回归年长度或恒星年长度}}{\text{近点月长度}}$$

所以，依式(2－47)算得的值，与我们所说的月亮中心差是有区别的，它们之间应存在如下关系：

$$V-M=(V-M)'+\frac{M(G-H)}{G} \quad (2-48)$$

对于木、土二星运动中心差算式，其术曰：

木、土二星，置其星其段入历度分(M)，如半周天(182.6282)以下者，为在盈；以上者，减去半周天，余为在缩。置盈、缩度分，如在一象(91.3141)以下者，为在初限；以上者，覆减半周天，余为在末限。置初、末限度及分于上，列半周天于下，以上减下，[余]以下乘上，木进一位，土九因之。皆满百为分，分满百为度，命曰盈缩定差(V－M)。

依术文意，其算式应分别为：

木星：

$$V-M=M(182.6282-M)\times10^{-3} \quad (2-49)$$

土星：

$$V-M=9M(182.6282-M)\times10^{-4} \quad (2-50)$$

上两式中，无论在盈、缩历，$M<91.3141$，若$M>91.3141$，需以182.6282返减之。

对于火星运动中心差算式，其术曰：

其火星，置盈缩度分(M)，如在初限以下者，为在初；以上者，覆减半周天，余为在末。以四十五度六十五分半为盈初、缩末限度，以一百三十六度九十六分半为缩初、盈末限度分。置初、末限度于上，盈初、缩末三因之。列二百七十三度九十三分于下，以上减下，余以下乘上，以一十二乘

之，满万为度，不满，百约为分，命曰盈缩定差$(V-M)$。

依其意，该算式应为：

$$V-M=12M(273.93-M)\times 10^{-4} \qquad (2-51)$$

上式中，对于盈初、缩末，$M<45.655$ 时，需以 3 乘之。对于缩初、盈末，$M<136.965$，若 $M>136.965$ 时，需以 182.6282 返减之，余数再乘以 3。

周琮曾明言：对于五星，"今则别立盈缩，与旧异"[①]，但现传本明天历中却不见金、水二星中心差算式的记载，这当是经文脱落所致。由已知算式看，周琮均采用了比较简明的形式，对于算式的表述则继承了曹士蔿的方式，但又较曹士蔿的表述更为完善和明确。周琮的明天历是我国古代在计算日、月、五星盈缩改正时，全面采用中心差算式的第一部历法。可惜，周琮的重要尝试未被其后大多数历法家所采用。

元代郭守敬等人授时历也给出月亮和五星的中心差算式，关于月亮运动迟疾改正的计算，其术曰：

> 置迟疾历日及分(N)，以十二限二十分乘之，在初限(84)以下为初限，以上，覆减中限(168)，余为末限。置立差三百二十五，以初末限(M_n)乘之，加平差二万八千一百，又以初末限乘之，用减定差一千一百一十一万，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即迟疾差$[(V-M)']$。[②]

依术文意，其算式应为：

$$(V-M)'=[11110000-(28100+325M_n)\times M_n]M_n\times 10^{-8} \qquad (2-52)$$

上式中，$M_n=12.2N$（M_n 与 M 之间的关系则为：$M=\frac{13.36875}{12.2}M_n$），当 $M_n<168$ 时，为疾历，当 $M_n>168$ 时，为迟疾（需以 168 减去之）。无论在迟、疾历，$M_n<84$，若 $M_n>84$，需以 168 返减之。

与上述理由相同，其月亮中心差的真正算式应与式(2—48)同。

对于五星运动中心差的计算，其术曰：

> 置入历度及分秒(M)，在历中(182.62875)以下，为盈；以上，减去历中，余为缩。视盈缩历，在九十一度三十一分四十三秒太以下，为初限；以上，用减历中，余为末限。
>
> 其火星，盈历在六十度八十七分六十二秒半以下，为初限；以上，用减历中，余为末限。缩历在一百二十一度七十五分二十五秒以下，为初限；

① 《宋史·律历志八》。

② 《元史·历志二》。



以上，用减历中，余为末限。

　　置各星立差，以初末限乘之，去加减平差，得，又以初末限乘之，去加减定差，再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即所求盈缩差$(V-M)$。[①]

依上术文，兼及五星的立、平、定三差值，则可列出五星的中心差算式。

木星：

　　盈缩立差二百三十六加，平差二万五千九百一十二减，定差一千八十九万七千。

$$V-M=[10897000-(25912+236M)\times M]M\times 10^{-8} \qquad (2-53)$$

金星：

　　盈缩立差一百四十一加，平差三减，定差三百五十一万五千五百。

$$V-M=[3515500-(3+141M)M]\times M\times 10^{-8} \qquad (2-54)$$

水星：

　　盈缩立差一百四十一加，平差二千一百六十五减，定差三百八十七万七千。

$$V-M=[3877000-(2165+141M)M]M\times 10^{-8} \qquad (2-55)$$

如上三式中，当$M<182.62875$时，为盈历；当$M>182.62875$时，为缩历（需以182.62875减去之）。无论在盈、缩历，$M<91.314375$，若$M>91.314375$，需以182.62875返减之。以下式(2—56)至(2—59)中的M亦同此，只是对于盈、缩历需分别依式计算。

土星：

　　盈立差二百八十三加，平差四万一千二十二减，定差一千五百一十四万六千一百。缩立差，三百三十一加，平差一万五千一百二十六减，定差一千一百一万七千五百。

对于盈历：

$$V-M=[15146100-(41022+283M)\times M]M\times 10^{-8} \qquad (2-56)$$

对于缩历：

$$V-M=[11017500-(15126+331M)\times M]M\times 10^{-8} \qquad (2-57)$$

火星：

　　盈初缩末立差，一千一百三十五减，平差八十三万一千一百八十九减，定差八千八百四十七万八千四百。缩初盈末立差八百五十一加，平差

① 《元史·历志四》。

三万二百三十五负减，定差二千九百九十七万六千三百[1]。

对于盈初($M<60.87625$)缩末($M>121.7525$，需以182.62875返减之)时：

$$V-M=[88478400-(831189-1135M)\times M]\times M\times 10^{-8} \quad (2-58)$$

对于缩初($M<121.7525$)盈末($M>60.87625$，需以182.62875返减之)时：

$$V-M=[29976300-(-30235+851M)\times M]\times M\times 10^{-8}$$

$$=[29976300+(30235-851M)\times M]\times M\times 10^{-8} \quad (2-59)$$

授时历是我国古代继明天历之后，全面采用中心差算式计算视太阳、月亮和五星盈缩改正值的一部历法，只是它们的形式较唐宋时期更加完善了。

第三节　交食时差算式

一、宣明历、崇玄历日食时差算式及其影响

唐代徐昂在宣明历中首创日食时差改正的公式算法，日食时差乃是由月亮视差所引致的从定朔时刻到食甚时刻的改正值。其术曰：

> 凡日食，以定朔日出入辰刻距午正刻数(K)，约百四十七，为时差。视定朔小余(I)如半法(4200)以下，以减半法，为初率；以上，减去半法，余为末率。以乘时差，如刻法(84)而一，初率以减，末率倍之，以加定朔小余，为食定余(I'_1 或 I'_2)。月食，以定望小余为食定余。[2]

依术文意，可列出以下两式：

当 $I<4200$ 时，



$$I'_1=I-\frac{(4200-I)K}{84\times 147} \quad (2-60)$$

当 $I>4200$ 时，

$$I'_2=I+\frac{2(I-4200)K}{84\times 147} \quad (2-61)$$

上式中，K 为定朔之日太阳出入时刻与午正时刻的时距的分值(下同)，该值随节气不同在 30 刻(2520 分)到 20 刻(1680 分)之间变动；I 为定朔时刻的分值(下同)；$|4200-I|$ 为定朔时刻与午正时刻的时距；I'_1 为定朔在午前时的食甚时刻，I'_2 为定朔在午后时的食甚时刻(下同)。即徐昂认为从定朔到日食食甚时刻改正的绝对值在夏至时($K=2520$)为最大，在冬至时($K=1680$)最小，定朔时刻在夜半时(I

① 《元史·历志四》。

② 《新唐书·历志六上》。



$=0$)最大,在午正时($I=4200$)最小。我们知道,定朔在夏至(或冬至)时,月亮的天顶距较小(或大),月亮视差所导致的时差改正绝对值应较小(或大),所以,徐昂关于 K 的影响的描述是不正确的。又,定朔时刻愈接近午正,月亮的天顶距应愈小,所以,徐昂关于 I 的影响的描述是大体正确的。

此外,由式(2—60)和式(2—61)知,徐昂认为定朔发生在午前($I<4200$)或午后($I>4200$)时,时差改正值的大小和正负都是不相同的,午前为负值、午后为正值,而且当距午正前后分相同时,午后时差改正绝对值为午前的 2 倍。我们知道,时差改正值的正负,决定于定朔时月亮在太阳之南(内道或阴历)还是之北(外道或阳历),而与午前或午后无关。时差改正值的大小则与月亮天顶距的大小成正比例,当距午正前后分相同时,时差改正值应大小相当。由此看来,徐昂的时差改正,虽然是关于月亮视差对日食发生时刻影响的认真且重要的思考,可是从总体上看,他并未给出正确的描述。

在上引文中,徐昂认为月食时定朔时刻即为月食的食甚时刻,这一点则是正确的论述。

必须指出的是,自隋代刘焯皇极历和张胄玄大业历开始,便已有关于交食时刻改正的种种方法,徐昂在前人的这类探讨的基础上,给出了如上所述的新方法。

唐末边冈在崇玄历中则给出了日食时差的新算式:

> 凡定朔约余(I)距午前、后分(J_1 和 J_2),与五千先相减,后相乘,三万除之(即时差 Q'),午前以减,午后倍之(即时差 Q''),以加约余,为日食定余(I'_1 或 I'_2)。①

依术文意则有:

$$I'_1=I-Q'=I-\frac{(5000-J_1)J_1}{30000} \tag{2—62}$$

$$I'_2=I+Q''=I+\frac{2(5000-J_2)J_2}{30000} \tag{2—63}$$

式中,$I<5000$ 分,需以 5000 返减之,为距午前分 J_1,用式(2—62)计算;$I>5000$ 分,需减去 5000 分,为距午后分 J_2,用式(2—63)计算。将此二式与式(2—60)和式(2—61)比较可见,边冈取消了 K 值对日食时差的影响,亦即不考虑因节气不同对日食时差的影响,此举虽不尽善,却避免了徐昂虑及节气不同造成的日食时差改正的负面作用。又由式(2—62)和式(2—63)知,当 J_1(或 J_2)$=0$ 或 5000 时,Q'和 Q''均等于 0,当 J_1(或 J_2)$=2500$ 时,Q'和 Q''均达极大值。这就是说,当定朔时刻愈接近午正时,日食时差改正愈小,而当定朔发生在地平附近时,日食时差改正值较大,这同月亮视差对日食时刻影响的效应是相吻合的。而且,边冈以二次

① 《新唐书·历志六下》。

函数式表述时差在其间的变化，也颇具特色。可是，在关于时差改正值正负的判别，以及关于时差改正值午前、午后大小不同等问题上，边冈仍因循徐昂之说不改，使时差改正从总体上还处于似是而非的境地。

北宋宋行古崇天历也给出时差算式，其术曰：

置定朔小余（I，1 刻＝105.9 分），如半法（5295）以下覆（加）[减]半法，余为午前分（J_1）；以上，减去半法，余为午后分（J_2）。置午前、后分于上，列半法于下，以上减下，以下乘上，午前以三万一千七百七十除，午后以一万（三）[五]千八百八十五除之，各为时差（Q'或Q''）。午前以减、午后以加定朔小余，各为食定小余（I'_1 或 I'_2）。①

依此可列出下式：

$$I'_1 = I - Q' = I - \frac{(5295 - J_1)J_1}{31770} \tag{2-64}$$

$$I'_2 = I + Q'' = I + \frac{(5295 - J_2)J_2}{15885} \tag{2-65}$$

式中，若 $I<5295$，需以 5295 返减之，得 J_1，用式（2－64）；若 $I>5295$，需以 5295 减去之，得 J_2，用式（2－65）。将式（2－64）和式（2－65）分别与式（2－62）和式（2－63）比较，$\frac{5295}{31770}=\frac{5000}{30000}$。又，时差改正绝对值大小午后亦为午前的 2 倍，也以距午前、后作为判别时差改正值正、负的标准，故该二式实即式（2－62）和式（2－63）的翻版。31770 之半为 15885，所以，上术文中“三”应为“五”之误。

北宋皇居卿亦有时差算式，其术文为：

置定朔小余（I，1 刻＝120.3 分），如半统法（6015）以下，[覆减半统法]（J_1），与半统法相减相乘，如三万六千九十而一，为时差（Q'），以减；如半统法以上，减去半统法（J_2），余亦与半统法相减相乘，如一万八千四十五而一，为时差（Q''）。午前以减，午后以加。皆加减定朔小余，为日食甚小余（I'_1 或 I'_2）。②

依之可得：

$$I'_1 = I - Q' = I - \frac{(6015 - J_1)J_1}{36090} \tag{2-66}$$

$$I'_2 = I + Q'' = I + \frac{(6015 - J_2)J_2}{18045} \tag{2-67}$$

式中，若 $I<6015$，需以 6015 返减之，得 J_1，用式（2－66）；若 $I>6015$，需减去

① 《宋史·律历志六》。

② 《宋史·律历志十一》。



6015，得 J_2，用式(2－67)。同理可证该二式亦为式(2－62)和式(2－63)的翻版。

二、纪元历及其后诸历法的交食时差算式

北宋姚舜辅日食时差算式的术文是：

> 视泛余(I，1 刻＝72.9 分)，如半法(3645)以下，[用减半法]，为中前(J_1)；列半法于下，以上减下，余以乘上，如一万九百三十五而一，所得，为差(Q')，以减泛余，为食甚定余(I'')，用减半法，为午前分(J'_1)；如泛余在半法以上，减去半法，为中后(J_2)，列半法于下，以上减下，余以乘上，如日法(7290)而一，所得，为差(Q'')，以加泛余，为食甚定余(I'_2)，乃减去半法，为午后分(J'_2)。①

依之可得：

$$I'_1 = I - Q' = I - \frac{(3645 - J_1)J_1}{10935} \qquad (2-68)$$

$$I'_2 = I + Q'' = I + \frac{(3645 - J_2)J_2}{7290} \qquad (2-69)$$

$$J'_1 = 3645 - I'_1$$

$$J'_2 = I'_2 - 3645$$

式中，若 $I<3645$，需以 3645 返减之，得 J_1，用式(2－68)计算；若 $I>3645$，需减去 3645，得 J_2，用式(2－69)计算。J'_1 和 J'_2 分别为食甚时刻距午正前、后刻分值(下同)。将式(2－68)、式(2－69)和式(2－62)、式(2－63)相比较可知，$\frac{3645}{10935}=\frac{5000}{30000}\times 2$，$\frac{3645}{7290}=\frac{5000}{30000}\times 3$，则可见式(2－68)和式(2－69)也受边冈时差算式的影响，只是姚舜辅认为，当定朔距午前、后分相同时，时差改正绝对值午后为午前的 1.5 倍，而不是边冈等人所认定的 2 倍。这一修正仅是小补而已，并未真正改变自徐昂、边冈以来对于时差改正概念模糊以致不正确的问题。

边冈、宋行古、皇居卿等人与徐昂一样也都以为定望时刻即月食食甚时刻，而姚舜辅不以为然，在纪元历中，他还给出了所谓月食时差的算式，其术文曰：

> 月食者，视泛余(I_3，1 刻＝72.9 分)，如半法(3645)以上，减去半法，余(J_3)在一千八百二十二半以下，自相乘；以上者，覆减半法，余(J_3)亦自相乘，如三万而一，所得(Q_3)，以减泛余，为食甚定余(I'_3)。如泛余不满半法，在日出分(K_1)三分之二已下(J'_3)，列于上位；已上者，用减日出分，余(J''_3)

① 《宋史·律历志十三》。

倍之，亦列于上位，乃四因三约日出分，列之于下，以上减下，余以乘上，如一万五千而一，所得(Q'_3 或 Q''_3)，以加泛余，为食甚定余(I''_3 或 I'''_3)。①

依之可得：

当 $I_3>3645$ 时，需以 3645 减去之，所得若小于 1822.5，即为 J_3；所得若大于 1822.5，还需以 3645 返减之，得 J_3，

$$I'_3=I_3-Q_3=I_3-\frac{J_3^2}{30000} \qquad (2-70)$$

当 $I_3<\frac{2}{3}K_1$ 时，即为 J'_3，

$$I''_3=I_3+Q'_3=I_3+\frac{(\frac{4}{3}K_1-J'_3)J'_3}{15000} \qquad (2-71)$$

当 $3645>I_3>\frac{2}{3}K_1$ 时，需以 K_1 返减之，得 J''_3，

$$I'''_3=I_3+Q''_3=I_3+\frac{(\frac{4}{3}K_1-2J''_3)2J''_3}{15000} \qquad (2-72)$$

式中，I_3 为定望时刻的分值；K_1 为定望之日太阳出地平时刻的分值；I'_3 为定望发生在午后时的月食食甚时刻；I''_3 为定望发生在小于$\frac{2}{3}K_1$ 时的月食食甚时刻；I'''_3 为定望发生在大于$\frac{2}{3}K_1$ 与午正前之间时的月食食甚时刻；J_3 为定望距午正后或子夜前的刻分值；J'_3 为定望距子夜后的刻分值(即定望刻分值)；J''_3 为定望距日出时刻前、后的刻分值。由此看来，姚舜辅把月食时差的大小、正负同这些庞杂的量值相联系，实无明确的天文学意义可言。



南宋诸历法均沿用姚舜辅的日、月食时差计算法。

关于时差，金代赵知微重修大明历亦分别给出适用于日食和月食的算式。其日食时差的术文为：

视泛余(I，1 刻=52.3 分)，如半法(2615)以下，[覆减半法]，为中前分(J_1)；半法以上，去半法，为中后分(J_2)。取中前、后分，与半法相减相乘，倍之，万约为分，曰时差(Q)。中前，以时差减泛余为定余(I'_1)，覆减半法，余为午前分(J'_1)。中后，以时差加泛余为定余(I'_2)，减去半法，为午后分(J'_2)。②

---

① 《宋史·律历志十三》。

② 《金史·历志下》。



依此，可列出下式：

$$I'_1 = I - Q = I - \frac{(2615 - J_1)J_1}{5000} \qquad (2-73)$$

$$I'_2 = I + Q = I + \frac{(2615 - J_2)J_2}{5000} \qquad (2-74)$$

$$J'_1 = 2615 - I'_1$$

$$J'_2 = I'_2 - 2615$$

式中，若 $I<2615$，需以 2615 返减之，得 J_1；若 $I>2615$，需减去 2615，得 J_2。式(2－73)和式(2－74)的函数形式显然也受到边冈相应算式的影响，但赵知微认为当定朔距午正前、后分值相等时，日食时差的改正值大小是相同的，这才纠正了徐昂以来认为其时日食时差改正值午后是午前的 2 倍或 1.5 倍的不正确见解。可是，赵知微也认为日食时差改正值午前为负，午后为正，这依然是似是而非的。

重修大明历月食时差算式的术文曰：

> 视泛余(I_3，1 刻＝52.3 分)，在日入后、夜半前者，如日法(5230)四分之三(3922.5)以下，减去半法(2615)，为酉前分(J_4)，四分之三以上，覆减日法，余为酉后分(J_5)。又视泛余在夜半后、日出前者，如日法四分之一(1307.5)以下，为卯前分(J_6)，四分之一以上，覆减半法，余为卯后分(J_7)，其卯、酉前、后分，自相乘，四因，退位，万约为分(Q_3)，以加泛余为定余(I'_3)。①

依术文意可得：

$$I'_3 = I_3 + Q_3 = I_3 + \frac{4J_4^2(\text{或 } J_5^2 \text{ 或 } J_6^2 \text{ 或 } J_7^2)}{100000} \qquad (2-75)$$



式中，I_3 为定望时刻的分值；Q_3 为月食时差改正值；I'_3 为月食定望时刻。当 $2615<I_3<3922.5$ 时，需减去 2615，得 J_4，称酉前分，实指距午正后分；当 $I_3>3922.5$ 时，需以 5230 返减之，得 J_5，称酉后分，实指距子夜前分；当 $I_3<1307.5$ 时，即为 J_6，称卯前分，实指距子夜后分，亦即定望时刻；当 $1307.5<I_3<2615$ 时，需以 2615 返减之，得 J_7，称卯后分，实指距午正前分。式(2－75)与姚舜辅算式显然不同，式中 J_4、J_5、J_6 和 J_7 的含义与姚舜辅算式有同有异，多少受到姚舜辅的影响。

元代耶律楚材庚午历取用赵知微的以上算式。

郭守敬等人的授时历给出的日食时差算式的术文曰：

> 视定朔分(I，1 刻＝10000 分)，在半日周(5000)以下，覆减半周，为中

① 《金史·历志下》。

前(J_1);以上,减去半周,为中后(J_2)。与半周相减、相乘,退二位,如九十六而一,为时差(Q),中前以减,中后以加,皆加减定朔分,为食甚定分(I'_1或I'_2)。以中前、后分各加时差,为距午定分(J'_1或J'_2)。[1]

依之可得:

$$I'_1=I-Q=I-\frac{(5000-J_1)J_1}{9600} \qquad (2-76)$$

$$I'_2=I+Q=I+\frac{(5000-J_2)J_2}{9600} \qquad (2-77)$$

$$J'_1=5000-I'_1$$

$$J'_2=I'_2-5000$$

式中各值的含义以及算式的形式与赵知微算式全同,又$\frac{5000}{9600}\approx\frac{2604}{5000}$,可见郭守敬日食时差算式只是在赵知微算式的基础上对数量小做修改,并无本质的差异。

授时历月食时差算式术曰:

视定望分(I_3)在日周四分之一(2500)以下,为卯前(J_6);以上,覆减半周(5000),为卯后(J_7);在四分之三(7500)以下,减去半周,为酉前(J_4);以上,覆减日周(10000),为酉后(J_5)。以卯、酉前、后分自乘,退二位,如四百七十八而一,为时差(Q)。子前以减,子后以加,皆加减定望分,为食甚定分(I'_3或I''_3)。[2]

依术文意可列出下式:

$$I'_3=I_3-Q_3=I_3-\frac{J_4^2\text{ 或 }J_5^2}{47800} \qquad (2-78)$$

$$I''_3=I_3+Q_3=I_3+\frac{J_6^2\text{ 或 }J_7^2}{47800} \qquad (2-79)$$

式中I'_3和I''_3分别为定望刻分值小于或大于5000时的月食食甚刻分值。其他各值的含义均与式(2—75)相同。式(2—78)和式(2—79)与式(2—75)的函数形式亦同,两者的主要差别是郭守敬以定望发生在子夜前或后判别月食时差值的正负。

综上所述,日食时差算式系由唐代徐昂所创,其算式对后世历法产生很大影响。而唐末边冈以先相减、后相乘法给出日食时差新算式,并摒弃徐昂引入的、起反作用的节气不同对日食时差改正的影响后,更为后世绝大多数历法所承用,其影响更为深远。徐昂、边冈、宋行古、皇居卿等人的日食时差算式均以为当定朔距午

---

① 《元史·历志四》。
② 《元史·历志四》。



前、后分相同时，午后时差改正绝对值为午前的2倍。定朔距午前、后分相同，是说其时月亮的天顶距大体相同。日食时差是月亮视差造成的，而月亮视差的大小决定于月亮天顶距的大小，即当月亮天顶距相同时，日食时差的大小亦应相同。所以，徐昂等人的上述描述是不正确的。而北宋周琮明天历以为日食时差等于0，自然也是不正确的。姚舜辅日食时差算式将徐昂等人所说的2倍修正为1.5倍，虽有所改良，但也不确当。直到赵知微和郭守敬等人，日食时差算式才调整到正确的状态上。而所有这些历法都以定朔发生在午前或午后判别日食时差改正值为正或为负，这使日食时差改正的后果处于一种含糊不清的，偶或有益，偶或有害的状况。

关于月食时差，徐昂、边冈、宋行古、周琮和皇居卿等人都认为应等于0，这应是正确的。但从姚舜辅到郭守敬等人均给出月食时差算式，由这些算式看，月食时差并无明确的天文学依据，这大约是姚舜辅等人的误解所致。

第四节　黄赤道、黄白道和赤白道度差算式

一、黄赤道度差算式

最早给出特定算式以计算黄赤道度差者，是唐末的边冈，他在崇玄历中，是这样描述这一算式的：

> 凡冬至赤道日度及约余（C），以减其宿全度，乃累加次宿皆为距后积度，满限九十一度三十一分三十七小分去之，余，半以下为初，以上以减限为末，皆百四十四乘之，退一等，以减千三百一十五，所得以乘初末度分为差；又通初末度分与四千五百六十六先相减后相乘，千六百九十除之，以减差为定差，再退为分，至后以减，分后以加距后积度为黄道积度，宿次相减，即其度也，以冬至赤道日度及约余，依前求定差减之为黄道日度（F）。①

依此，该算式可列于下：

$$F-C=\frac{1}{10000}\left[\left(1315-\frac{144}{10}C\right)\cdot C-\frac{C}{1696}(4566-C)\right] \qquad (2-80)$$

式中C为从冬至点起算的赤道度，F为与之相应的黄道度（下同）。$C<45.65685$，若$C>45.65685$，需以91.3137返减之。若$C>182.6274$，需以182.6274减去之，若$C>91.3137$，需以182.6274返减之。

式（2－80）由先相减、后相乘法构造的两个函数之差组成，其实质也就是先相

① 《新唐书·历志六下》。

减、后相乘法的应用，只是在表达形式上小有不同而已。虽然式(2—80)尚显繁杂，但边冈率先开拓此法于黄赤道度差的计算，是功不可没的。

北宋宋行古在崇天历中也给出了黄赤道度差算式，其术曰：

各置赤道宿入初、末限度及分(C)，用减一百二十五，余以初、末限度及分乘之，十二除为分，分满百为度，命曰黄赤道差及分(F—C)。[①]

由此可得：

$$F-C=\frac{C}{1200}(125-C) \qquad (2-81)$$

式中，C为从二至起算的赤道度(下同)，$C<45.66$，若$C>45.66$，需以91.31返减之。若$C>91.31$，需以182.62返减之。这是一个十分简明的算式。严敦杰指出，式(2—81)是以唐代一行大衍历的黄赤道度变换法为依据设定的[②]。因为式(2—81)又可表达为：

$$F-C=\frac{C}{5}\left[\frac{12}{24}+\frac{\frac{C}{5}-1}{2}\left(-\frac{1}{24}\right)\right] \qquad (2-82)$$

式(2—81)正与本书第一章第八节中提及的大衍历黄赤道度变换法基本吻合，两者的差异仅在于，大衍历以$C=45$为限，而宋行古令$C=45.66$为限。

北宋周琮明天历所给黄赤道度差算式表述为：

各置赤道宿入初、末限度及分(C)，用减一百一十一度三十七分，余以乘初、末限度及分，进一位，以一万约之，所得，命曰黄赤道差及分(F—C)。[③]

其算式即为：



$$F-C=\frac{10C}{10000}(111.37-C) \qquad (2-83)$$

式中，$C<45.655$，若$C>45.655$，需以91.31返减之。若$C>91.31$，需以182.62返减之。

北宋皇居卿观天历用以下术文表述其黄赤道度差算式：

各置赤道宿入初、末限度及分(C)，三之，为限分，用减四百，余以限分乘之，一万二千而一为度，命曰黄赤道差(F—C)。[④]

这就是：

---

① 《宋史·律历志五》。

② 严敦杰：《中国古代的黄赤道差计算法》，《科学史集刊》，1958年，第1期。

③ 《宋史·律历志七》。

④ 《宋史·律历志十》。



$$F-C=\frac{3C}{12000}(400-3C) \quad (2-84)$$

式中，$C<45.65545$，若 $C>45.65545$，需以 91.3109 返减之。若 $C>91.3109$，需以 182.6218 返减之。

北宋姚舜辅纪元历也给出黄赤道度差算式，其术曰：

以冬至加时赤道日度及分秒(C)，减一百一度，余以冬至加时赤道日度及分秒乘之，进位，满百为分，分满百为度，命曰黄赤道差($F-C$)。[1]

依之可得：

$$F-C=\frac{10C}{10000}(101-C) \quad (2-85)$$

式中 C 值的界定与式(2－84)相同。这是已知赤道度求黄赤道度差。姚舜辅还不止于此，在纪元历中他还给出已知黄道度返求相应的赤道度的算式，其术曰：

以所求日午中黄道积度(F)，入至后初限、分后末限度及分秒(43.1287)，进三位，加二十万二千五十少，开平方除之，所得，减去四百四十九半，余(H_1)在初限者，直以二至赤道日度($C_{至}$)加而命之；在末限者，以减象限，余以二分赤道日度($C_{分}$)加而命之，即每日午中赤道日度(C)。以所求日午中黄道积度(F)，入至后末限、分后初限度及分秒(48.2822)，进三位，用减三十万三千五十少，开平方除之，所得，以减五百五十半，余(H_2)在初限者，直以二分赤道日度加而命之；在末限者，以减象限，余以二至赤道日度加而命之，即每日午中赤道日度(C)。[2]

依术文意可列出以下诸式：

当 $F<43.1287$，又当 $H_1<43.1287$ 时，

$$C=C_{至}+H_1=C_{至}+\sqrt{1000F+202050.25}-449.5 \quad (2-86)$$



当 $F>91.3109$ 时，需先以 91.3109 返减之，所得 $F>43.1287$ 时，还需以 91.3109返减之，又当 $H_1>48.2822$ 时，

$$\begin{aligned}C&=C_{分}+91.3109-H_1\\&=C_{分}-\sqrt{1000F+202050.25}+540.8109\end{aligned} \quad (2-87)$$

当 $F>91.3109$ 时，需先以 91.3109 返减之，所得 $F<43.1287$，又当 $H_2<48.2822$时，

$$\begin{aligned}C&=C_{分}+H_2\\&=C_{分}-\sqrt{303050.25-1000F}+550.5\end{aligned} \quad (2-88)$$

① 《宋史·律历志十二》。
② 《宋史·律历志十二》。

当 $F>43.1287$ 时，需以 91.3109 返减之，又当 $H_2>43.1287$ 时，

$$C=C_{至}+91.3109-H_2$$
$$=C_{至}+\sqrt{303050.25-1000F}-459.1891 \quad (2-89)$$

上诸式中 $C_{至}$、$C_{分}$ 分别指自二至或二分起算的赤道日度值。

周琮、皇居卿和姚舜辅的黄赤道度差算式也具有简明的特点，它们与边冈、宋行古的黄赤道度差算式同属于先相减、后相乘法的类型。

令 $C=5$、10、15、20、25、30、35、40、45 分别代人式(2－80)、式(2－81)、式(2－83)、式(2－84)和式(2－85)，算得诸 $F-C$ 值，并与相应的 $F-C$ 的理论值比较，可知边冈、宋行古、周琮、皇居卿四家算式的平均误差均为 0.05 度，均仅与一行大衍历黄赤道度差变换法算得的 $F-C$ 值的精度持平。而姚舜辅算式的平均误差为 0.026度，精度较前四历家算式有较大提高。姚舜辅算式为南宋诸历法，以及金代赵知微重修大明历和元代耶律楚材庚午历沿用不弃，其影响是巨大的。

在元代郭守敬等人的授时历中，列有“黄赤道率”[①]表，备载从冬夏至或春秋分以后每经 1 度(从 0 度至 91 度)黄赤道度差的数值。授时历经中对于“黄赤道率”表如何推算而得未作记载。据研究[②]，它们是王恂、郭守敬等人大体上应用北宋沈括的弧矢割圆法的公式推求而得的。看来，授时历亦采用公式算法以计算黄赤道度差，只是其算式与前述边冈等人的算式属于不同的类型。由“黄赤道率”表中 $C=$ 5、10、15、20、25、30、35、40、45 时的 $F-C$ 值，与理论值比较，可得平均误差为0.027度，精度仅与姚舜辅算式相当。这是因为沈括公式还只是近似公式，故在精度上未能获得理想的结果。

二、黄白道和赤白道度差算式

黄白道度差和赤白道度差算式，系由北宋宋行古所首创，在崇天历中，他给出了以下术文：

> 各视月所入正交积度(F_3)，满象度及分(90.94 度)去之，若在半象(45.47度)以下者为入初限；以上者，覆减象度，余为入末限，用减一百二十五，余以所入初、末限度及分乘之，满二十四而一为分，分满百为度，所得，为月行与黄道差数(S_3-F_3)。距半交后、正交前，以差数为减；距正交后、半交前，以差数为加。计去冬、夏至以来度数(F_4)，乘黄道所差，九十而一，为月行与赤道差数(S_3-C_0)。[③]

---

① 《元史・历志三》。

② 严敦杰:《中国古代的黄赤道差计算法》,《科学史集刊》,1958 年,第 1 期。

③ 《宋史・律历志五》。



依术文意，可列出以下算式：

$$F_3-S_3=\frac{F_3}{2400}(125-F_3) \quad (2-90)$$

$$S_3-C_0=\frac{F_3F_4}{2400\times 90}(125-F_3) \quad (2-91)$$

式中，F_3 为月亮与黄白交点间的黄道度，S_3 和 C_0 分别为与之相应的白道度和赤道度，F_4 为黄白交点与二至点的黄道度（下同）。$F_3<45.47$，若 $F_3>45.47$，需以 90.94 返减之。若将式（2—90）与式（2—81）比较可知，$F_3-S_3=\frac{1}{2}(F-C)$，即黄白道度差是为黄赤道度差的一半。F_4 在 0 度到 182 度间变动，则式（2—91）同我们在第一章第八节中已经提及的一行大衍历赤白道度差与黄白道度差之间的关系式是相类似的。

北宋周琮明天历也给出黄白道度差和赤白道度差的算式，其术文曰：

各视月所入正交积度（F_3），满象度及分（90.92 度）去之，余者若在半象（45.46 度）以下为在初限；以上，覆减象度及分，为在末限。用减一百一十一度三十七分，余以所入初、末限度及分乘之，退位，半之，满百为度，不满为分，所得，为月行与黄道差数（F_3-S_3）。距半交后、正交前，以差数减；距正交后、半交前，以差加。计去二至以来度数（F_4），乘黄道所差，九十而一，为月行与黄（赤）道差数（S_3-C_0）。[①]

依此则有：

$$F_3-S_3=\frac{F_3}{2000}(111.37-F_3) \quad (2-92)$$

$$S_3-C_0=\frac{F_3F_4}{2000\times 90}(111.37-F_3) \quad (2-93)$$

式中 $F_3<45.46$，若 $F_3>45.46$，需以 90.92 返减之。若将式（2—92）与式（2—83）比较，亦可得上述对崇天历同类算式的分析所得的结论。

北宋皇居卿观天历关于黄白道度差和赤白道度差算式的术文与前二历十分相似：

各视月行所入正交积度（F_3），满交象（90.94 度）去之，若在半交象（45.47 度）以下为初限；以上，覆减交象，余为末限。置初、末限度及分，三之，为限分，用减四百，余以限分乘之，二万四（十）[千]而一为度，命曰月道与黄道差数（F_3-S_3）。距正交后、半交前，以差数加；距半交后、正交前，以差数减。仍计去冬、夏二至已来度数（F_4），乘差数，如九十而一，为月道与赤道差数

① 《宋史·律历志八》。

(S_3-C_0)。[1]

依之可得：

$$F_3-S_3=\frac{3F_3}{24000}(400-3F_3) \tag{2-94}$$

$$S_3-C_0=\frac{3F_3F_4}{24000\times 90}(400-3F_3) \tag{2-95}$$

式中各值的含义和界定均与崇天历算式相同，而且也具有如同上述对崇天历算式的分析所得知的特征[令式(2—94)与式(2—84)相比较]。

北宋姚舜辅纪元历的黄白道度差算式的术文曰：

各置黄道宿度及分秒(F_3)，满交象度及分(90.9486度)去之，在半交象(45.4748度)以下为初限；以上，以减交象度，余为入末限。……各以所入初、末限度及分，减一百一度，余以所入初、末限度及分乘之，半而退位为分，分满百为度，命为月道与黄道泛差(F_3-S_3)。[2]

依此可列出下式：

$$F_3-S_3=\frac{F_3}{2000}(101-F_3) \tag{2-96}$$

式中$F_3<45.4748$，若$F_3>45.4748$，需以90.9486返减之，若将式(2—96)和式(2—85)比较，亦可知纪元历黄白道度差是为黄赤道度差的一半。

纪元历的赤白道度差算式与前述三历小有变化，其术曰：[3]

凡日以赤道内为阴、外为阳；月以黄道内为阴、外为阳。故月行正交，入夏至后宿度内为同名，入冬至后宿度内为异名。

其在同名者，置月行与黄道泛差(F_3-S_3)，九因八约之，为定差(N_1)，半交后、正交前以差减；正交后、半交前以差加。仍以正交度距秋分度数(F_5)乘定差，如象限(90.9486度)而一，所得，为月道与赤道定差(S_3-C_0)，前加者为减，减者为加。



其在异名者，置月行与黄道泛差(F_3-S_3)，七因八约之，为定差(N_2)；半交后、正交前以差加，正交后、半交前以差减，仍以正交度距春分度数(F_6)乘定差，如象限而一，所得，为月行与赤道定差(S_3-C_0)，前加者为减，减者为加。

依术文意，可得：

当日在赤道内、月在黄道内，或日在赤道外、月在黄道外，即所谓同名时，

---

[1] 《宋史·律历志十》。

[2] 《宋史·律历志十二》。

[3] 《宋史·律历志十二》。



$$N_1=\frac{9}{8}(F_3-S_3)$$

$$S_3-C_0=\frac{N_1F_5}{90.9486}=\frac{9F_5F_3(101-F_3)}{8\times90.9486\times2000} \quad (2-97)$$

当日在赤道内、月在黄道外，或日在赤道外、月在黄道内，即所谓异名时，

$$N_2=\frac{7}{8}(F_3-S_3)$$

$$S_3-C_0=\frac{N_2F_6}{90.9486}=\frac{7F_6F_3(101-F_3)}{8\times90.9486\times2000} \quad (2-98)$$

式中，F_3、S_3、C_0 的含义同式(2－91)所示。F_5 和 F_6 分别为黄白交点距秋分或春分点的黄道度。若将式(2－97)和式(2－98)同式(2－91)等比较可知，姚舜辅赤白道度差算式是在宋行古等人相关算式的基础上，有所改进。同名时，赤白交角等于黄赤交角加上黄白交角，而异名时，赤道交角则等于黄赤交角减去黄白交角，故在同名时，赤白道度差理应大于在异名之时，姚舜辅以上述两算式分别计算赤白道度差，正反映了这种状况。

姚舜辅的黄白道度差和赤白道度差算式均为南宋各历法，以及金代赵知微重修大明历和元代耶律楚材庚午历沿用不弃，可见其影响之深远。

纵观上述各历法的黄白道度差和赤白道度差算式，无不采用先相减、后相乘法，此为宋行古在崇天历中所创用，其后各历法只是在系数设定上有所不同，这些系数的设定则与各历法黄赤道度差算式有关，即取其半为是。而关于赤白道度差的计算，上述各历法(除纪元历外)则深受一行大衍历的影响。

元代郭守敬等人授时历则给出了黄道、赤道、白道度间彼此转换的算式，其术依次为：[①]



> 置初、末限度(W_1)，以十四度六十六分乘之，如象限(91.314375)而一，为定差……以二十四乘定差，如十四度六十六分而一，所得，交在冬至后名减，夏至后名加，皆加减九十八度，为定限度及分秒(V_1)。

依之可得：

$$V_1=98\pm\frac{24W_1}{91.314375} \quad (2-99)$$

式中，W_1 为黄白交点同冬至点间的黄道宿度，当 $W_1<182.62135$时，为冬至后；$W_1>182.62135$ 时，需减去 182.62135，余为夏至后。又，$W_1<91.314375$ 为在初限，若 $W_1>91.314375$，需减去 91.314375，余为入末限。

---

① 《元史·历志二》。

又术曰：

置定限度(V_1)，与初、末限(W_1)相减、相乘，退位为分，为定差，以差加减正交后赤道积度(C_0)，为月离白道定积度(S_3)。

依此则有：

$$S_3 = C_0 \pm \frac{1}{1000}(V_1 - W_1)W_1 \tag{2-100}$$

式中，S_3 为月亮距黄白交点的白道度；C_0 为月亮距黄白交点的赤道度，可由授时历"黄赤道率"表求得。而 W_1、V_1 的含义同式(2－99)。

第五节　太阳视赤纬算式

一、崇玄历太阳视赤纬算式及其影响

最先给出太阳视赤纬算式的，也是唐末的边冈。在崇玄历中，边冈给出了如下的术文：

又计二至加时已来至其日昏后夜半日数及余(n)。冬至后为息，夏至后为消。如一象(91.3131)以下，为初；以上，返减二至限(182.6262)，余为末。令自相乘，进二位，以消息法(1667.5)除为分，副之。与五百先相减后相乘，千八百而一，以加副，为消息数。以象积(480)乘之，百约为分，再退为度(g_1)。春分后，以加六十七度四十分；秋分后，以减百一十五度二十分，即各其日黄道去极(f)。[1]

据术文，可列出如下算式：

$$g_1 = \left[\frac{100n^2}{1667.5} + \frac{\left(500 - \frac{100n^2}{1667.5}\right)\left(\frac{100n^2}{1667.5}\right)}{1800}\right] \times \frac{480}{10000}$$

$$= \frac{184}{50025}n^2 - \frac{16}{50025 \times 3335}n^4$$

式中，$n \leqslant 91.3131$，若 $n > 91.3131$，需以 182.6262 返减之。此处的 n 是指二至以后的太阳实行度(距二至的黄道度，下同)。

对于春分后的时日(当日夜半时)，

$$f = 67.40 + g_1$$

则

$$\delta = 23.9141 - g_1 \tag{2-101}$$

---

[1] 《新唐书·历志六下》。



对于秋分后的时日(当日夜半时),

$$f=115.20-g_1$$

则

$$\delta=-23.8859+g_1 \qquad (2-102)$$

这里边冈所给出的算式是一个包括常数项、二次项和四次项的高次函数式,显然与前述的先相减、后相乘法不同。在术文中,边冈引进了令 n"自相乘"的量值,而且又应用了先相减、后相乘法,所以,不妨称之为自相乘、先相减、后相乘法,是边冈的创新之法,它是一个包含二次和四次项的函数式。

北宋史序在仪天历中所给出的太阳视赤纬的算法是:[①]

> 求每日晷漏损益数:置入前后限损益日数及分(a),如初象以下为在上限;以上者,返减前限(182.622275),余为下限。皆自相乘之,其分半以下乘,半以上收之;以一百通日,内其分,乃乘之;所得,在冬至后初象、夏至后次象(88.8811),以升法(156428)除之;若冬至后次象、夏至后初象(93.7412),以平法(174003)除之,皆为分,不满,退除为小分;所得,置于上位,又别置五百五分于下,以上减下,[余]以[下]乘上;用在升法者,以二千八百五十除之;用在平法者,以五千五百五十二除之,皆为分,不满,退除为小分,所得,以加上位,为其日损益数(g_2 和 g_3)。

依此,可列出如下公式:

对于冬至后初象、夏至后次象,

$$g_2=\frac{10000a^2}{156428}+\frac{\left(505-\dfrac{10000a^2}{156428}\right)\left(\dfrac{10000a^2}{156428}\right)}{2850}$$

$$=\frac{167750}{2229099}a^2-\frac{125000}{2229099\times39107}a^4$$

式中,$a\leqslant88.8811$,若 $a>88.8811$,需以 182.622275 返减之。

对于冬至后次象、夏至后初象,

$$g_3=\frac{10000a^2}{174003}+\frac{\left(505-\dfrac{10000a^2}{174003}\right)\left(\dfrac{10000a^2}{174003}\right)}{5552}$$

$$=\frac{1261875}{20126347}a^2-\frac{6250000}{20126347\times522009}a^4$$

式中,$a\leqslant93.7412$,若 $a>93.7412$,需以 182.622275 返减之。

在求得 g_2、g_3 后,欲求每日黄道去极度,其术曰:

① 《宋史·律历志二》。

若春分后，置损益差，以五十乘之，以一千五十二除之为度，不满，以一千四十二除之为分，以加六十七度三千八百四十五。若秋分后，置损益差，以五十乘之，以一千六十二除之为度，不满，以一千五十退除为分，以减一百一十五度二千二百二十二分，即得黄道去极度(f)。

对于春分后的时日，

$$f=67.3845+\frac{50}{1052}g_2(\text{或 }g_3)$$

则

$$\delta=23.9296-\frac{50}{1052}g_2(\text{或 }g_3) \tag{2-103}$$

对于秋分后的时日，

$$f=115.2222+\frac{50}{1062}g_3(\text{或 }g_2)$$

则

$$\delta=-23.9081+\frac{50}{1062}g_3(\text{或 }g_2) \tag{2-104}$$

式(2－103)和式(2－104)所示的函数形式与式(2－101)和式(2－102)是相同的，当然它们的常数项及二次项、四次项的系数是各异的。另外，史序所取 a 值是指所求日与冬、夏至时刻间的时距，而不是指这一时段内太阳的实行度数，这与边冈所取 n 值的含义是完全不一样的。应该说史序算式是在边冈法的基础上衍生出来的，但不是简单的承袭，而是有所变化，它也不失为一种新的尝试。唯其算式反而显得繁杂，这是它不为后世历家所采纳的原因之一。自崇天历以后的诸家历法均继承边冈法，均取太阳的实行度作为引数。

北宋崇天历求太阳视赤纬的算式，宋行古是这样表述的：

求每日消息定数：以所入气日及加其气下中积(n)，一象(91.31)以下，自相乘；以上者，用减二至限(182.62)，余亦自相乘，皆五因之，进二位，以消息法(7873)除之，为消息常数。副置常数，用减五百二十九半，余乘其副，以二千三百五十除之，加于常数，为消息定数。

置其消息数，十六乘之，以三百五十三除为度(g_4)，不满，退除为分。所得，在春分后加六十七度三十一分，秋分后减一百一十五度三十一分，即每日黄道去极度及分(f)。[1]

依术文可知：

---

[1] 《宋史・律历志五》。



$$g_4=\left[\frac{500n^2}{7873}+\frac{\left(529.5-\frac{500n^2}{7873}\right)\left(\frac{500n^2}{7873}\right)}{2350}\right]\times\frac{16}{353}$$

$$=\frac{460720}{130620943}n^2-\frac{80000}{130620943\times 7873}n^4$$

式中，$n\leqslant 91.31$，若 $n>91.31$，需以 182.62 返减之。下面 g_5、g_6 的 n 值亦如此。

对于春分后的时日，

$$f=67.31+g_4$$

则

$$\delta=24.0041-g_4 \tag{2—105}$$

对于秋分后的时日，

$$f=115.31-g_4$$

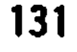
则

$$\delta=-23.9959-g_4 \tag{2—106}$$

北宋周琮明天历的相应算法为：

求每日消息定数：置所求日中日度分(n)，如去二至限(182.62)以下者为在息，以上者去之，余为在消。又视入消息度，如一象(91.31)以下者为在初；以上者，覆减二至限，余为在末。其初、末度自相乘，以一万乘而再折之，满消息法(10689)除之，为常数。乃副之，用减一千九百五十，余以乘副，满八千六百五十除之，所得，以加常数，为所求消息定数。

置其日消息定数，以四因之，满三百二十五除之为度(g_5)，不满，退除为分，所得，在春分后，加六十七度三十一分；在秋分后，减一百一十五度三十一分，即为所求日黄道去极度及分(f)。[①]



据此，可列出如下算式：

$$g_5=\left[\frac{10000n^2}{4\times 10689}+\frac{\left(1950-\frac{10000n^2}{4\times 10689}\right)\left(\frac{10000n^2}{4\times 10689}\right)}{8650}\right]\times\frac{4}{325}$$

$$=\frac{84800}{24039561}n^2-\frac{20000}{24039561\times 10689}n^4$$

对于春分后的时日(当天中午时)，

$$f=67.31+g_5$$

则

① 《宋史·律历志八》。

$$\delta = 24.0041 - g_5 \qquad (2-107)$$

对于秋分后的时日(当天中午时),

$$f = 115.31 - g_5$$

则

$$\delta = -23.9959 + g_5 \qquad (2-108)$$

北宋皇居卿观天历的相应算式亦大同小异,其术曰:

求每日午中消息定数:置定积日及分(n),在一象(91.31)以下自相乘,以上,用减二至限(182.62),余亦自相乘,七因,进二位,以消息法(9703)除之,为消息常数,副置之,用减六百一半,余以乘其副,以二千六百七十除之,以加常数,为消息定数。……置其日消息定数,十六乘之,满四百一除之为度(g_6),不满,退除为分。春分后,加六十七度三十一分;秋分后,减一百一十五度三十一分,即每日午中黄道去极度及分(f)。[①]

依此可知其算式应为:

$$g_6 = \left[\frac{700n^2}{9703} + \frac{\left(601.5 - \frac{700n^2}{9703}\right)\left(\frac{700n^2}{9703}\right)}{2670}\right] \times \frac{16}{401}$$

$$= \frac{1221360}{346290367}n^2 - \frac{784000}{346290367 \times 29109}n^4$$

对于春分后的时日(当天中午时),

$$f = 67.31 + g_6$$

则

$$\delta = 24.0041 - g_6 \qquad (2-109)$$

对于秋分后的时日(当天中午时),

$$f = 115.31 - g_6$$

则

$$\delta = -23.9959 + g_6 \qquad (2-110)$$

细察 g_4、g_5 和 g_6 三算式的各系数,不难发现它们之间仅有十分微小的差异:n^2 项系数之差小于 10^{-6},n^4 项系数之差小于 10^{-10},则 g_4、g_5 和 g_6 三者之间的差远小于 0.01。所以,崇天、明天和观天三历的太阳视赤纬计算公式完全可视为等价的。换句话说,明天和观天二历的算式是因袭崇天历而来的,周琮和皇居卿只是不愿承因袭之名,对系数的表观稍做变化而已。又,这三家历法的算式所取函数形式与边冈法也完全相同,所以它们都是边冈算式的直接承继者。

① 《宋史·律历志十》。

二、纪元历太阳视赤纬算式

到北宋姚舜辅纪元历，推求太阳视赤纬值的算式才又发生了重大的变革。其术曰：

> 求每日赤道内外度：置所求日午中日行积度及分(n)，如不满二至限(182.6218)，在象限(91.3109)以下为冬至后度；象限以上，用减二至限，为夏至前度。如满二至限去之，余在象限以下，为夏至后度；象限以上，用减二至限，为冬至前度。并置之于上，列象限于下，以上减下，余以乘上，冬至前后五百一十七而一，夏至前后四百而一为度，不满，退除为分，以加二至前后度，所得，用减象限，余置于上，列二至限于下，以上减下，余以乘上(其度分秒者皆以百通，然后乘之)，退一位，如三十四万八千八百五十六而一为秒，满百为分，分满百为度，即所求日黄道在赤道内外度及分(δ)。①

依之，可列算式如下：

对于冬至前后的时日(当天中午时)，设：

$$m_1=91.3109-\left[\frac{(91.3109-n)n}{517}+n\right]$$

则：

$$-\delta=\frac{(182.6218-m_1)m_1\times 10^8}{348856\times 10^5}$$

$$\delta=-23.90+\frac{608.3109^2n^2-1216.6218n^3+n^4}{517^2\times 348.856} \tag{2-111}$$

对于夏至前后的时日(当天中午时)，设：

$$m_2=91.3109-\left[\frac{(91.3109-n)n}{400}+n\right]$$

则：

$$\delta=\frac{(182.6218-m_2)m_2\times 10^8}{348856\times 10^5}$$

$$=23.90-\frac{491.3109^2n^2-982.6218n^3+n^4}{400^2\times 348.856} \tag{2-112}$$

上两式中，$n\leqslant 91.3109$，若 $n>91.3109$，需要 182.6218 返减之。

姚舜辅算式是一个包括常数项及二、三、四次项的函数式，显然它较边冈等人

① 《宋史·律历志十二》。

的算式有了新的发展。南宋诸历皆取用姚舜辅算式，可见其影响是很大的。

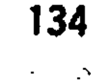
在授时历中，列有“黄道出入赤道内外、去极度及半昼夜分”的数值表格，它以冬、夏至为起点，每隔一黄道度（共计 91.31 度）给出一个黄道出入赤道内外度、内外差、去极度等数值，其中内外差为相邻两黄道度时黄道内外度之差。推求每日黄道内外度、去极度的方法是：

> 置所求日晨前夜半黄道积度，满半岁周去之，在象限以下，为初限；以上，覆减半岁周，余为入末限；满积度去之，余以其段内外差乘之，百约之，所得，用减内外度，为出入赤道内外度，内减外加象限，即所求去极度及分秒。①

这就是说，欲推求任一日夜半时的太阳视赤纬值，可使用上述表格，以一次差内插法求算之。那么，从表面上看，这是一种表格计算法，诚然，授时历的表格是将一象限分为 92 段，而前述传统的表格仅将一象限分成 6 段，这是一个较大的差异，这一差异说明授时历的表格计算法要比传统的表格计算法精细得多。

问题的关键在于：授时历的表格所示各数值的求得，是应用了相当于球面三角法中求解直角三角形的方法②，这是一种新颖的公式计算法，是与边冈、姚舜辅等人所采用的方法截然不同的，尽管它们同属于公式计算法的范畴。

据研究③，边冈太阳视赤纬算式的平均误差为 0°.09，其法初立，便接近达到一行大衍历太阳视赤纬表格计算法的水平。史序算式的平均误差却大到 0°.45，这显然与他取 a 为引数而不是取 m 为引数有重要关系。后世历家未接受史序算式是不无理由的。宋行古、周琮和皇居卿算式的平均误差分别为 0°.23、0°.20 和0°.21，其大小很接近，只要顾及上述我们对此三家算式的分析，这种状况是毫不足怪的。它们都是边冈算式的直接继承者，可惜它们都没有超越前者，究其原因，主要是由于式(2－105)至式(2－110)均取黄赤交角为 24 度造成的。而这一时代黄赤交角值理应为 23.9 度，边冈取用的正是该值。



姚舜辅是一个不拘泥于现状的革新者，他给出了与众不同的新算式，其平均误差为 0°.11，达到了与边冈算式不相上下的精度水平。姚舜辅算法的出现，结束了边冈以后太阳视赤纬算式的精度所处的徘徊以致退却的局面。郭守敬等人算式的平均误差亦为 0°.11，未获突破，这是由于郭守敬等人应用的会圆术弧矢公式误差较大，并且以 $\pi=3$ 入算④等原因造成的。

---

① 《元史·历志四》。

② 钱宝琮，主编：《中国数学史》，科学出版社，1964 年，第 213 页。

③ 陈美东：《中国古代太阳视赤纬计算法》，《自然科学史研究》，1987 年，第 3 期。

④ 钱宝琮，主编：《中国数学史》，科学出版社，1964 年，第 214 页。



第六节　昼夜漏刻长度算式

昼夜漏刻长度与太阳视赤纬值之间存在有机的关系，中国古代历家早就有所认识，在第一章第五节中，我们已经提及，汉和帝永元十四年（102）霍融就指出"漏刻以日长短为数，率日南北二度四分而增减一刻"[①]，这一认识为后世历家所倚重，产生了深远影响。唐末边冈在创立太阳视赤纬算式的同时，也创立了昼夜漏刻长度算式，两算式之间存在相类似的因子，这正是基于这一认识而设定的。边冈在崇玄历中是这样描述昼夜漏刻长度算式的：

以消息数（G），春分后加一千七百五十二，秋分后以减二千七百四十八，即各其日晷漏母也。……凡晷漏，百为刻。不满，以象积（480）乘之，百约为分，得夜半定漏（L_0）。[②]

依术文意，对于春、秋分后分别用下列两式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0&=\frac{1}{100}(1752+G)\\ L_0&=\frac{1}{100}(2748-G)\end{aligned}\right\}\qquad(2-113)$$

其中 G 即式（2－101）和式（2－102）中的 $g_1\times\frac{10000}{480}$，则

$$G=\frac{460}{6003}n^2-\frac{8}{4004001}n^4$$

式中 L_0 为夜漏刻长度之半。n 的含义自然与式（2－101）相同。又，式（2－113）同式（2－101）和式（2－102）具有完全相同的函数形式。

由式（2－113）和式（2－101）、式（2－102）可知，春、秋分后 L_0 和 δ 之间的关系为：

$$L_0=22.5\pm\frac{\delta}{4.8}\qquad(2-114)$$

这正是霍融当年所描述的两者间的数量关系。

在北宋史序的仪天历中，关于昼夜漏刻长度算式的术文是：

各以其日损益差（g_2 或 g_3），自春分初日以后加一千七百六十八，自秋分初日以后减二千七百七十七，各得其日晷漏母，又曰晨分。……置其

① 《续汉书·律历志中》。
② 《新唐书·历志六下》。

日晨分，以刻法(101)除之为刻，不满为分，即所求日夜半定漏(L_0)。①

依术文意，对于春、秋分后分别用下列二式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{101}[1768 + g_2(\text{或 } g_3)] \\ L_0 &= \frac{1}{101}[2777 - g_2(\text{或 } g_3)] \end{aligned}\right\} \qquad (2-115)$$

式中，g_2、g_3 即式(2－103)和式(2－104)中的 g_2、g_3。

由式(2－115)和式(2－103)、式(2－104)可知，春分到夏至、夏至到秋分、秋分到冬至、冬至到春分时，L_0 和 δ 之间的关系分别为：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= 22.49 - \frac{\delta}{4.80} \\ L_0 &= 22.51 + \frac{\delta}{4.80} \\ L_0 &= 22.47 - \frac{\delta}{4.76} \\ L_0 &= 22.53 + \frac{\delta}{4.76} \end{aligned}\right\} \qquad (2-116)$$

史序显然认为在上述四个不同时段中，昼夜漏刻长度同太阳视赤纬之间的关系，并不遵循统一的规律，而是小有差异。但从总体而言，还是不离霍融当年所述，只是做了些微修订而已。

北宋宋行古的崇天历也给出了昼夜漏刻长度算式，其术文曰：

以每日消息定数(G_1)，春分后加一千八百五十三少，秋分后减二千九百一十二少，各为每日晨分。

置晨分，进一位，以刻法(1059)除为刻，不满为分，即每日夜半定漏(L_0)。②



依此，对于春、秋分后分别用下列二式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{10}{1059}(1853.25 + G_1) \\ L_0 &= \frac{10}{1059}(2912.25 - G_1) \end{aligned}\right\} \qquad (2-117)$$

式中，G_1 即前述式(2－105)和式(2－106)中的 $g_4 \times \frac{353}{16}$，则：

$$G_1 = \frac{28795}{370031}n^2 - \frac{5000}{370031 \times 7873}n^4$$

① 《宋史・律历志五》。

② 《宋史・律历志五》。



北宋周琮明天历的昼夜漏刻长度算式可表述如次：

以消息定数(G_2)，春分后加六千八百二十五，秋分后减一万七百二十五，余为所求日晨分。

置其日晨分，以刻法(390)除之为刻，不满为分，即所求日夜半定漏(L_0)。[1]

依术文意，对于春、秋分后分别用下列二式表示：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{390}(6825+G_2) \\ L_0 &= \frac{1}{390}(10725-G_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2-118)$$

式中，$G_2 = g_5 \times \frac{325}{4}$，$g_5$ 即式(2—107)和式(2—108)中的 g_5，则：

$$G_2 = \frac{530000}{1849197}n^2 - \frac{125000}{1849197 \times 10689}n^4$$

北宋皇居卿观天历的相应算式的术文有如下述："置其日消息定数(G_3)，春分后加二千一百[五]少，秋分后减三千三百八少，各为其日晨分。"又，"置晨分，进一位，如刻法而一为刻，不满为刻分，即每日夜半定漏(L_0)"，其"刻法一千[二]百三"。[2]

据研究[3]，上术文中需做必要补正，依之，对于春、秋分后则有如下算式：

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \frac{10}{1203}(2105.25+G_3) \\ L_0 &= \frac{10}{1203}(3308.25-G_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2-119)$$

式中 G_3 即式(2—109)和式(2—110)中的 $g_6 \times \frac{401}{16}$，

则：

$$G_3 = \frac{76335}{863567}n^2 - \frac{49000}{863567 \times 29109}n^4$$

又据研究表明[4]，式(2—117)和式(2—118)同式(2—119)基本上是等价的，这就是说周琮和皇居卿实际上是依据宋行古算式推出各自的算式的，依此三算式计算的偏离将不大于 0.01 刻。

此外，由式(2—115)和式(2—103)、式(2—104)；式(2—117)和式(2—105)、式(2—106)；式(2—118)和式(2—107)、式(2—108)均可推得 L_0 和 δ 之间的关系如

① 《宋史·律历志八》。

② 《宋史·律历志十》。

③ 陈美东，李东生：《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》，《自然科学史研究》，1990 年，第 1 期。

④ 陈美东，李东生：《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》，《自然科学史研究》，1990 年，第 1 期。

式(2－114)所示。由此看来，宋行古、周琮和皇居卿算式又都是遵循边冈的思路和方法，小做修正而推得的。

如果说自崇玄历到观天历的二百年间，昼夜漏刻长度算式均大同小异，那么，姚舜辅的纪元历(1106)关于漏刻的公式计算法则有了重大的改革，其术文曰：

置所求日黄道去赤道内外度及分(即太阳视赤纬 δ)，以三百六十三乘之，进一位，如二百三十九而一，所得，以加减一千八百二十二半，赤道内以减，赤道外以加，为所求日日出分。

置日出分，倍之，进一位，满刻法(729)为刻，不满为分，即所求日夜刻(L_1)。①

依术文意：

$$L_1=\frac{20}{729}\left(1822.5-\frac{3630\delta}{239}\right) \qquad (2-120)$$

式中 L_1 即指夜漏刻长度。δ 即如前述式(2－111)和式(2－112)所示者。式(2－120)为南宋诸历所采用，其影响是很大的。其实式(2—120)又可改写为：

$$L_1=50-\frac{\delta}{2.4} \qquad (2-121)$$

这说明姚舜辅还是沿袭霍融当年关于漏刻长度与太阳视赤纬之间数量关系的认识，即便姚舜辅已经知道黄赤交角不再是 24 度，而是 23.9 度，在式(2－120)中也未做相应的调整。其实，边冈算式也有与此完全相同的弊病，因为边冈也已认为黄赤交角应为 23.9 度②。

在郭守敬等人的授时历中，则列有"黄道出入赤道内外，去极度及半昼夜分"③数值表，其中"半昼夜分"就是我们所要讨论的漏刻表，该表以冬至或夏至为起点，每隔一黄道度(从 0 度到 91 度和 91.3 度)给出一个半昼夜漏刻分值(1 刻＝10000 分)，共计 93 个数值。在该表中还有"昼夜差"一栏，它等于相邻两黄道度间半昼夜漏刻之差。欲求任一日的半昼夜分，其方法是：

置所求入初末限，满积度，去之，余以昼夜差乘之，百约之，所得，加减其段半昼夜分，为所求日半昼夜分。

由此可知，在应用上述表格时是以一次差内插法进行计算的。它与表格计算法相类似，但该表格较前代历法的相应表格精细得多，所以虽用的是一次差内插法也较前为优。更重要的是，该表格所列各数值，是应用了相当于球面三角中求解直角三角

---

① 《宋史·律历志十二》。

② 陈美东：《试论我国古代黄赤交角的测量》，《科技史文集》第 3 辑，上海科学技术出版社，1980 年。

③ 《元史·历志四》。



形的方法[①]，即一种既具实测基础，又由较严密的数学公式计算而得的。由于授时历的昼夜漏刻长度算式比较繁杂，为便于日常的计算，郭守敬等人在这里显然采取了公式计算为基础的表格计算法。

据研究[②]，边冈昼夜漏刻长度算式的平均误差为4.6分钟，创法伊始便达到了其前表格计算法所达到的较高水平。而史序昼夜漏刻长度算式的平均误差为7.9分钟，精度明显下降，究其所以然，应与前已述及的史序太阳视赤纬算式误差较大的原因相同。宋行古、周琮和皇居卿昼夜漏刻长度算式的平均误差分别为6.2、4.9和4.9分钟。如上所述，这三家算式基本上是等价的，之所以宋行古算式的平均误差大于周琮和皇居卿算式，是因为宋行古算式是用于河南登封阳城（地理纬度$\phi=34°.4047$）的，而后二者是用于河南开封俊仪（$\phi=34°.8125$）的。姚舜辅算式的平均误差为3.8分钟，较以前诸算式的精度都要高，可见姚舜辅的改革基本上是成功的。而更大的成功则属于郭守敬等人所采用的算式，其平均误差仅0.7分钟，达到了中国历史上最高的精度水平。

第七节 晷长算式

一、崇玄历、仪天历、崇天历晷长算式

最先发明晷长算式的，也是唐末的边冈，他在崇玄历中对该算式作如下表述：

各计其日中入二至加时已来日数及余（A），如初限[③]以下，为后；以上，以减二至限（182.62225日），余为前，副之。各以乘数[④]乘之，用减初、末差[⑤]，所得，再乘其副，满百万为尺，不满为寸、为分。夏至[前][⑥]后，则退一等，皆命曰晷差。冬至前后[⑦]，以减冬至中晷（12.7150尺）；夏至前后[⑧]，以加夏至中晷（1.4780尺），为每日阳城中晷（B）。与次日相减，后多曰息，后少曰消。以冬、夏至午前、后约分乘之，万而一，午（前）[后][⑨]息减、消加，午（后）[前]息加、消减中晷，为定数（H）也。凡冬至初日，有减无加；夏至初



① 钱宝琮，主编：《中国数学史》，科学出版社，1964年，第213页。
② 陈美东，李东生：《中国古代昼夜漏刻长度的计算法》，《自然科学史研究》，1990年，第1期。
③ 冬至前限、夏至后限59日；夏至前限、冬至后限123.62225日。
④ 冬至前限、夏至后限乘数15；夏至前限、冬至后限乘数4。
⑤ 冬至前限、夏至后限差2195；夏至前限、冬至后限差4880。
⑥ []中为脱字，应补上，下同。
⑦ 指冬至前限和夏至后限。
⑧ 指夏至前限和冬至后限。
⑨ ()中字为[]中字之误，下同。

日，有加无减。①

依术文意，冬至前限、夏至后限时，

$$B=12.7150-(2195-15A)A^2\times10^{-6} \qquad (2-122)$$

夏至前限、冬至后限时，

$$B=1.4780+(4880-4A)A^2\times10^{-7} \qquad (2-123)$$

它们均为含有常数项、二次项和三次项的函数式。

当冬至后 $A<59$ 日时，用式(2－122)计算；夏至后 $A>123.62225$ 日时，需返减 182.62225日，亦以式(2－122)计。当冬至后 $A>59$ 日时，需返减 182.62225 日，用式(2－123)计；夏至后$A<123.62225$ 日时，亦用式(2－123)计算。

又，式(2－122)和式(2－123)中，A 是指所求日午中(50 刻)与二至时刻(设为 N 刻)之间的时距加上日躔盈缩改正后的定日数及分。以此代入式(2－122)或式(2－123)算得者，应是所求日(50－N)刻时的晷长值。所以，还需进一步推算所求日 50 刻时的晷长，即所谓定数 H。

为此，要先求出所求日与次日中晷相减之数(S)。而崇玄历是以$\frac{|50-N|}{100}\times$ 10000 为二至午前、后的约分值，所以需除以一万(万而一)，始得二至午前、后的日数值，此亦即所求日午前、后的日数值(P)。设所求日与次日间中晷长度的变化是均匀的，则$P\cdot S$就是由 B 推算 H 的修正值。当 $N<50$ 刻时(午前)，对夏至后而言，因其晷影渐长(后多曰息)，则 $H=B+PS$(息加)；对冬至后而言，因其晷影渐短(后少曰消)，则 $H=B-PS$(消减)。而当 $N>50$ 刻时(午后)，同理，对夏至后而言，$H=B-PS$(息减)；对冬至后而言，$H=B+PS$(消加)。若所求日为冬至初日，该日午前、后晷影均渐短，$H\equiv B-PS$(有减无加)。若为夏至初日，该日午前、后晷影均渐长，$H\equiv B+PS$(有加无减)。还要指出的是：崇玄历由 B 求 H 的方法，只是沿用了一行大衍历的成法而已。

北宋史序晷长算式的术文为：

> 置入冬、夏二至后来日数及分(A_1)，以所入象②日数下盈缩分盈减缩加之，为其日定积(A_2)；又以减其象小余(K)，为夜半定积及分(A_3)，以隔位除一。用若夜半定积及分(A)在二至上限以下者，为入上限之数；以上者，以返减前限日及约余(182.622275 日)，为入下限日及分。若冬至后上限、夏至后下限(均为 59 日)，以十四乘之，所得，以减上、下限差分(2130)，为定差法；以所入上、下限日数再乘之，所得，满一百万为尺，不满

---

① 《新唐书·历志六下》。

② 冬至后初象、夏至后次象 88.8811 日，夏至后初象、冬至后次象 93.7412 日。



为寸及分，以减冬至晷影(12.7150尺)，余为其日中晷景常数(B_1)也。若夏至后上限、冬至后下限(均为123.622275日)，以三十五乘之，[所得，退一等]，以[减]上、下[限]差分(4812)，为定[差]法；以入上、下限日数再乘之，退一等，满一百万为尺，不满尺为寸及分，用加夏至晷景(1.4784尺)，即得其日中晷景常数(B_2)。[1]

依此，冬至后上限、夏至后下限时，

$$B_1 = 12.7150 - (2130 - 14A)A^2 \times 10^{-6} \qquad (2-124)$$

夏至后上限、冬至后下限时，

$$B_2 = 1.4784 + (4812 - 3.5A)A^2 \times 10^{-7} \qquad (2-125)$$

这里式(2－125)是依我们对上术文做了补正后列出的，而做这种补正的理由可参见有关论文[2]。

式(2－124)和式(2－125)所适用的A值大小和界定，分别与式(2－122)和式(2－123)类同，所稍异者，需以182.622275和123.622275分别代替182.62225和123.62225。

术文中A_1为所求日与二至时刻(N_1)之间的整日积分数；A_2是A_1加日躔盈缩改正后的定积分数；而$A_3 = A_2 - N_1$，这里N_1亦称为"其象小余"，则A_3即为所求日夜半与二至时刻间的定积分数。[3]

又由于仪天历中的A_1、日躔盈缩改正值、N_1等均是用宗法(10100)为分母的积分值表示的，若要化作以万为分母的定日数及分，则需"以隔位除一"，即令$\frac{A_3}{10100} = A$，此即为所求日夜半与二至时刻间的定日数及分。

于是，由式(2－124)和式(2－125)算得的B值是所求日夜半时的晷长，还要进一步推求该日午中时的晷长，即所谓"阳城中晷景定数"，其术曰：

求晷景每日损益差：以其日晷景与次日晷景相减(得S)，其日景长于次日晷景为损，短于次日晷景为益。

求阳城中晷景定数(H)：置五千分，以其日晷景定数损益差乘之，所得，以万约之为分，冬至后用减，夏至后用加。冬至一日有减无加，夏至一日有加无减。[4]

---

① 《宋史·律历志二》。

② 陈美东：《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》，《自然科学史研究》，1985年，第3期。

③ 严格地说，由于N_1值并未加日躔盈缩改正，故A_3仅是上二者之间定积分数的约值。但虑及该改正值较小，姑可视A_3为上二者之间的定积分数。

④ 《宋史·律历志二》。

这同大衍历、崇玄历的处理原则是一致的。由于仪天历算得的 B 值适当夜半之时，其 $P\equiv\frac{5000}{10000}$，于是，对冬至后而言，$H=B-\frac{S}{2}$；对夏至后而言，$H=B+\frac{S}{2}$。这样看来，仪天历由 B 求 H 的方法，较大衍历、崇玄历要稍简便些。

接着，我们再来讨论宋行古崇天历的晷长算式，其术曰：

置入二至初、末限定日及分(A)，如冬至后初限、夏至后末限(62 日)者，以初、末限日及分减一百四十六，余退一等，为定差；又以初、末限日及分自相乘，以乘定差，满六千六百四十五为尺，不满，退除为寸分，命曰晷差；以晷差减冬至晷数(12.7150 尺)，即其日阳城午中晷景定数(H_1)。如冬至后末限、夏至后初限者(120.62 日)，以初、末限日及分减一千二百一十七，余再退，为定差；亦以初、末限日及分自相乘，以乘定差，满二万四千九百三十余(此"余"字当衍)为尺，不满，退除为寸分，命曰晷差；以晷差加夏至晷数(1.4780 尺)，即其日阳城中晷定数(H_2)。[1]

由此，冬至后初限、夏至后末限时，

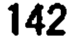
$$H_1=12.7150-\frac{(146-A)A^2}{66450}$$

$$\approx 12.7150-(2197.14-15.05A)A^2\times 10^{-6} \qquad (2-126)$$

夏至后初限、冬至后末限时，

$$H_2=1.4780+\frac{(1217-A)A^2}{2493000}$$

$$\approx 1.4780+(4881.67-4.01A)A^2\times 10^{-7} \qquad (2-127)$$



令式(2－126)和式(2－122)，式(2－127)和式(2－123)比较知，它们之间是极近似的，可以说式(2－126)和式(2－127)是由式(2－122)和式(2－123)稍加变化而得的。但崇天历也不无改革，这主要表现在 A 值的推求上：

各计入二至后日数(A')，乃如半日之分五十(得 A'')，又以二至约分(N)减之，即入二至后来午中日数及分(A''')。

置 A'''，以其日午中入气盈缩分(盈)[缩]加(缩)[盈]减之，各如初限以下为在初限；以上，覆减二至限，余为入末限定日及分(A)。[2]

此中，A' 为所求日到二至时刻(即约分 N 刻)间的整日数；$A''=A'+0.5$ 日，为所求日 $N+50$ 刻到二至 N 刻间的日数及分；$A'''=A''-N$，即为所求日午中到二至时刻的日数及分。A 则为 A''' 加日躔盈缩改正后的定日数及分。查崇天历"求定气

① 《宋史·律历志五》。

② 《宋史·律历志五》。



日"的术文为：

以其气下盈缩分盈减缩加常气约余为定气。[①]

可证现传本上术文中"盈"、"缩"二字需互换。

又，当冬至后 $A<62$ 日时，用式(2－126)，夏至后 $A>120.62$ 日时，需返减182.62 日，亦用式(2－126)计算。当冬至后 $A>62$ 日时，需返减 182.62 日，用式(2－127)；夏至后 $A>120.62$ 日时，亦用式(2－127)计算。

如上所述，崇玄历的 A 值未加入二至约余的修订，而仪天历的 A 值未考虑夜半与午中时刻间的修订(其 A 值尚存在的另一个弊病已如上述)，使得由 B 求 H 时，不得不引进所求日与次日晷影变化均匀的假设，并用一次差内插法，且 P 值也未加入日躔盈缩的改正，使整个计算过程显得不够严密和比较繁杂。崇天历的 A 值，对上述两项的修订进行在先，又统一做了日躔盈缩的改正，代入式(2－126)和式(2－127)便可直接求得所求日午中的晷长值(H)，比起崇玄历、仪天历先求 B 再求 H 的旧程序来，收到了既便捷又严谨的效果。这是崇天历晷长计算法的优越性所在。

二、明天历和纪元历晷长算式

边冈、史序和宋行古晷长算式同属一种类型。而周琮则在明天历中给出了一种新型的晷长算式，其术曰：

求岳台晷景午中定数：置所求午中积数，如初限(冬至后初限 45.62 日，夏至后初限 137 日)以下者为在初；以上者，覆减二至限(182.62 日)，余为在末。其在冬至后初限、夏至后末限(45.62 日)者，以入限日(M)减一千九百三十七半为泛差；仍以入限日分乘其日盈缩积("积"应为"差"之误)，五因百约("百约"二字应为衍文)之，用减泛差，为定差；乃以入限日分自相乘，以乘定差，满一百万为尺，不满为寸、为分及小分，以减冬至常晷(12.85 尺)，余为其日午中晷景定数。若所求入冬至后末限(137 日)、夏至后初限者，乃三约入限日分，以减四百八十五少，余为泛差；仍以盈缩差减极数(2.4)，余者若在春分后、秋分前者，直以四约之("约"和"之"两字间应补"百乘"二字)，以加泛差，为定差；若春分前、秋分后者，以去二分日数及分(91.31 日)乘之，满六百("百"字应为衍文)而一，以减泛差，余为定差；乃以入限日分自相乘，以乘定差，满一百万为尺，不满为寸为分及小分，以加夏至常晷(1.57 尺)，即为其日午中晷景定数(B)。[②]

① 《宋史·律历志五》。

② 《宋史·律历志八》。

以上术文中的"午中积数"的求算法是：

计入二至后来日数，以二至约余减之，仍加半日之分，即为入二至后来日午中积数及分。[1]

而"盈缩差"的计算法即如前述式(2－42)所示。

依据上述做了必要订正后的术文，可以列出如下三个计算每日午中晷长(B)的算式：

对于冬至后初限($M<45.62$ 日)和夏至后末限($M>137$ 日，需以 182.62 日返减之)：

$$B=12.85-\left[(1937.5-M)-\frac{5(200-M)M^2}{4135}\right]M^2\times10^{-6}$$

$$=12.85-\left(1937.5M^2-M^3-\frac{200}{827}M^4+\frac{1}{827}M^5\right)\times10^{-6} \quad (2-128)$$

对于冬至后末限、春分后(91.31 日$<M<$182.62 日，需以 182.62 日返减之)和夏至后初限、秋分前($M<$91.31 日)：

$$B=1.57+\left[\left(485.25-\frac{M}{3}\right)+\frac{100}{4}\times\left(2.4-\frac{(200-M)M}{4135}\right)\right]M^2\times10^{-6}$$

$$=1.57+\left(545.25M^2-\frac{3827}{2481}M^2+\frac{5}{827}M^4\right)\times10^{-6} \quad (2-129)$$

对于冬至后末限、春分前(45.62 日$<M<$91.31 日，需以 182.62 日返减之)和夏至后初限、秋分后(91.31 日$<M<$137 日)：

$$B=1.57+\left\{\left(485.25-\frac{M}{3}\right)-\frac{1}{6}\left[2.4-\frac{200-(182.62-M)}{4135}\times(182.62-M)\right]\times(M-91.31)\right\}M^2\times10^{-6}$$

$$=1.57+(510.09274M^2-1.213548M^3+0.01034059M^4-0.0000403063M^5)\times10^{-6} \quad (2-130)$$

依入限日分 M 的大小，有选择地应用如上三式中的一个算式，便可算得任一时日午中晷长值。如上三式是包含有常数项，二、三、四次项，以至五次项的函数式，是中国古代历法中出现的最高次项的算式。

北宋皇居卿在观天历中取用了与周琮完全相同的晷长算法。

北宋姚舜辅对每日午中晷长算式重加研究，又出新法，在纪元历中，载有其术：

求岳台晷影午中定数：冬至后初限、夏至后末限(62.20 日)，以百通日，内分，自相乘，为实，置之；以七百二十五除之，所得，加一十万六百一

---

[1] 《宋史·律历志八》。



十七，并入限分，折半为法，实如法而一为分，不满，退除为小分，其分满十为寸，寸满十为尺，用减冬至岳台晷影常数（12.83 尺），即得所求[日]午中晷影定数。夏至后初限、冬至后末限（120.42 日），以百通日，内分，自相乘，为实，乃置入限分，九因，再折，加一十九万八千七十五为法，其夏至前后，日（指入限日分）如在半限（指二至限之半，等于 91.31 日）以上者，减去半限，余置于上，列半限于下，以上减下，余以乘上，进二位，七十七除之，所得加法为定法，然后除之。实如法而一为分，不满，退除为小分，其分满十为寸，寸满十为尺，以加夏至岳台晷影常数（1.56 尺），即得所求日午中晷影定数（B）。[①]

依术文意，亦可列出如下三个计算每日午中晷长的算式：

对于冬至后初限（$M<62.20$ 日）和夏至后末限（$M>120.42$ 日，需以 182.62 日返减之），

$$B=12.83-\frac{20000M^2}{\left(100617+100M+\frac{10000M^2}{725}\right)\times 100}$$

$$=12.83-\frac{200M^2}{100617+100M+\frac{400}{29}M^2} \qquad (2-131)$$

对于冬至后末限、半限以上（91.31 日$<M<$182.62 日，需以 182.62 日返减之）和夏至后初限、半限以下（$M<$91.31 日），

$$B=1.56+\frac{10000M^2}{\left(\frac{900M}{4}+198075\right)\times 100}=1.56+\frac{4M^2}{7923+9M} \qquad (2-132)$$

对于冬至后末限、半限以下（62.20 日$<M<$91.31 日，需以 182.62 日返减之）和夏至后初限、半限以上（91.31 日$<M<$120.42日），

$$B=1.56+\frac{10000M^2}{\left[\left(\frac{900M}{4}+198075\right)+\frac{(182.62-M)(M-91.31)\times 100}{77}\right]\times 100}$$

$$=1.56+\frac{7700M^2}{13584271.78+44718M-100M^2} \qquad (2-133)$$

上三式中，M 的含义与式（2－128）、式（2－129）、式（2－130）中 M 的含义是相同的，且它们均以日为单位。上三式所取的函数形式与前述各算式完全不同。对这种函数形式，我们一时也还难以给它一个合适的名称，姑且称之为姚舜辅晷长函数，这是姚舜辅独辟蹊径，为晷长计算设计的特定函数。南宋各历法，以及金代赵

① 《宋史·律历志十二》。

知微的重修大明历和元代耶律楚材的庚午历的晷长算式，均沿用姚舜辅法，可见其影响之深远。

还要指出的是，周琮和姚舜辅算式都把一回归年内晷长的计算分为三个不同的段落，分别用三个不同的算式来计算，这显然是周琮等人的创造，而姚舜辅则继而承之。只是周琮晷长计算法分别以 45.62 日和 137 日作为冬至和夏至初、末限的分界点，而姚舜辅晷长计算法则分别以 62.20 日和 120.42 日为分界点，而另一对分界点春分和秋分，同半限实际上是相同的。这种三段分法与算法，是与一回归年内每日晷长变化的实际状况相应的，它较边冈等人晷长计算法的二段分法与算法更为符合实际。

研究表明，边冈晷长算式的平均误差为 0.025 尺，基本保持在取表格计算法的一行大衍历的精度水平上。史序晷长算式的平均误差较大，为 0.038 尺。宋行古晷长算式的平均误差为0.027尺，稍逊于边冈[①]。而周琮晷长算式的平均误差降为 0.019 尺，这说明周琮推出新类型的算式是有效的，姚舜辅晷长算式更开拓了一条超胜前人的成功之路，其平均误差降至 0.011 尺[②]。

第八节　月亮极黄纬算式

首创月亮极黄纬算式者，还是唐末的边冈，他在崇玄历中对该算式表述如下：

如一象(91 度)以下，为在少象；以上者，反减[半]半交(91 度)，余为入老象(d)。皆七十三乘之，退一等。用减千三百二十四，余以乘老、少象度及余，再退为分，副之。在少象三十度以下，老象六十一度以上，[反减九十一度]，皆与九十一先相减后相乘，五十六除，为差。若少象三十度以上，反减九十一度，及老象六十[一]度以下，皆自相乘，百五除，为差。皆以减副，百约为度，即朔望后夜半月去黄道度分(R)。[③]



依术文意，可列出如下二式：

当少象<30 度，与老象>61 度(需以 91 度返减之)时，

$$R=\frac{\left(1324-\frac{73}{10}d\right)}{10000}-\frac{(91-d)}{5600}$$

① 陈美东：《崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用》，《自然科学史研究》，1985 年，第 3 期。

② 陈美东：《皇祐、崇宁晷长计算法之研究》，《自然科学史研究》，1989 年，第 1 期。

③ 《新唐书·历志六下》。



$$=\frac{1}{7\times10^5}(81305d-386d^2) \qquad (2-134)$$

当少象 $d>30$ 度(需以 91 度返减之),与老象 $d<61$ 度时,

$$R=\frac{\left(1324-\frac{73}{10}d\right)}{10000}-\frac{(91-d)^2}{10500}$$

$$=\frac{-1}{21\times10^5}(1656200-314440d+1733d^2) \qquad (2-135)$$

上两式中,d 为所求时日月亮与黄白交点的度距,该度距由所求时日与月亮过黄白交点时日之间的时距推求而得。

五代王朴继边冈而起,在其钦天历中亦用公式计算法,但所用算式与边冈不同:

置入交定日(m),交中(13.60611 日)以下,月行阳道;以上,去之,月行阴道。皆以经法(72)通之,用减九百八十,余以乘之,五百五十六而一,为分,满经法为度。行阳道,在黄道外;行阴道,在黄道内,即所求月去黄道内外度(R)也。①

依此可得:

$$R=\frac{72(980-72m)m}{72\times556}=\frac{1}{139}(245m-18m^2) \qquad (2-136)$$

式中 m 为所求时日与月亮过黄白升交点时日之间的时距。$m<13.60611$ 日,若 $m>13.60611$ 日,则需以 13.60611 日减去之。

北宋宋行古崇天历的公式计算法较边冈法有所改进。其法曰:

置入阴阳历积度及分,如交象(90.94 度)以下,为在少象;以上,覆减半交(181.88 度),余为入老象。置所入老、少象度及分(d),以五因之,用减一千一十,余,以老、少象度及分乘之,八十四而一,列于上位;又置所入老、少象度及分,如半象(45.47 度)以下为在初限;以上,减去半象,余为入末限。置初、末限度及分于上,列半象度及分于下,以上减下,余以乘上,四十而一,所得,初限以减,末限以加上位,满百为度,不满为分,即朔望加时月去黄道度数及分(R)。②

据此可列出如下两式:

当 $d<45.47$ 度时,

$$R=\frac{(1010-5d)}{8400}-\frac{(45.47-d)d}{4000}$$



① 《新五代史·司天考一》。

② 《宋史·律历志六》。

$$=\frac{1}{840000}(91451d-290d^2) \quad (2-137)$$

当 $45.47<d<90.94$ 度时，

$$R=\frac{(1010-5d)}{8400}+\frac{[45.47-(d-45.47)](d-45.47)}{4000}$$

$$=\frac{-1}{840000}(868359-129646d-710d^2) \quad (2-138)$$

应注意，这里宋行古所取交象(90.94 度)和半交(181.88 度)二值是经过缜密考虑的。由于式(2－137)和式(2－138)中的 d 值实际上由所求时日与月亮过黄白交点时日间的时距(m)推求而得的，所以，当 $d=90.94$ 度时，是指 m 等于$\frac{1}{4}$交点月长度(约等于 $d/13.36875=6.8024$ 日)之时。已知经一交点月，黄白交点西退1.4639度$\left[\text{等于 } 27.2122\times\left(\frac{365.2564}{27.2122}-\frac{365.2564}{27.3217}\right)\right]$[①]，则$\frac{1}{4}$交点月，黄白交点西退约 0.37 度。于是，在所求时日，月亮离黄白交点的实际度数应为 $90.94+0.37=91.31$ 度$=\frac{1}{4}$周天度，即当 $d=90.94$ 度时，月亮极黄纬达极大值。其后观天、纪元等历法均仿此。而上述崇玄历取一象为 91 度，可能仅是 90.94 度的约值。

皇居卿观天历(1092)所取计算公式，从形式上看与崇天历大同小异：

> 置入阴阳历积度及分，如交象(90.94 度)以下，为入少象；以上，覆减交中度(181.88 度)，余为入老象(d)，皆列于上，下列交中度，相减相乘，进位，如一百(二)[三]十八而一，为泛差。又视入老、少象度，如半交象(45.47)以下，为初；以上，[交象]去之，余为末，皆二因，退位，初减末加泛差，满百为度，即朔望加时月去黄道度及分(R)。[②]

依之，可列出如下二算式：

当 $d<45.47$ 度时，

$$R=\frac{(181.88-d)}{1380}-\frac{2d}{1000}=\frac{2239}{17250}d-\frac{1}{1380}d^2 \quad (2-139)$$

当 $45.47<n<90.94$ 度时，

$$R=\frac{(181.88-d)d}{1380}+\frac{2(d-90.94)}{1000}$$

$$=\frac{-18188}{100000}+\frac{1154}{8625}d-\frac{1}{1380}d^2 \quad (2-140)$$

---

① 13.36875、27.2122、365.2564 和 27.3217 分别为崇天历的月亮每日平行度、交点月、恒星年和恒星月长度值。

② 《宋史·律历志十一》。

以上各算式均为先相减后相乘法的灵活应用，均为二次函数式，这是它们的共同之处。由于在一象度内月亮极黄纬的变率前大而后小，所以，边冈、宋行古和皇居卿都分别给出了两种不同的二次函数式，希图较好地描述月亮极黄纬变率的实际状况，这当是边冈等三人的共同思路，此中所稍异者，是宋行古和皇居卿在选择变率的转折点时与边冈不同（前者取 $d=45.47$ 度，而后者取 $d=30$ 度时）。王朴的想法则与边冈等三人不同，他更多地是考虑公式的简便性和统一性问题，可是，这样做就要降低其计算精度。

北宋姚舜辅在他的纪元历中，对月亮极黄纬的公式计算法进行了成功的改革，他既实现了公式的统一性，又保持了较高的准确度，其关键是：他不再拘泥于应用二次函数式，而采用了一个四次函数式来描述月亮极黄纬的变化规律。其术文如下：

> 视月入阴阳历积度及分，如交象（90.9486 度）以下，为在少象；以上，覆减交中度（181.8972 度），余为入老象。置所入老、少象度及分（d）于上，列交象度于下，以上减下，余以乘上，五百而一，所得，用减所入老、少象度及分，余[置于上]，列交中度于下，以上减下，余以乘上，满一千三百七十五而一，所得为度，不满，退除为分，即为定朔望加时月去黄道度及分（R）。[①]

据之，可列出如下算式：

$$R=\frac{1}{1375}\left\{181.8972-\left[d-\frac{(90.9486-d)}{500}\right]\right\}\times\left[d-\frac{(90.9486-d)d}{500}\right]$$

$$=\frac{1}{34375\times10^5}(372026500d-763324d^2-8181d^3-10d^4) \qquad (2-141)$$

式中 $d\leqslant 90.9486$ 度。

南宋各历法均依姚舜辅法计算月亮极黄纬值。在赵知微重修大明历和耶律楚材庚午历中，载有彼此相同的“求月去黄道度”[②]术，其叙述文字与纪元历略异，但据之所列出的算式则与式（2－141）全同，可知它们亦沿用了姚舜辅法。

在元代郭守敬等人的授时历中，没有关于计算月亮极黄纬方法的直接记载，如需求算其值，大约可由“每日月离赤道内外度”[③]和“每日黄道出入赤道内外度”[④]二法间接推求之。鉴于授时历未明言及此，其法暂存而不论。

据研究，边冈、王朴、宋行古、皇居卿和姚舜辅月亮极黄纬算式的平均误差分别

---

① 《宋史·律历志十三》。
② 《金史·历志下》，《元史·历志六》。
③ 《元史·历志三》。
④ 《元史·历志四》。

为 0°.37、0°.50、0°.34、0°.45 和 0°.32[1]。这表明边冈的月亮极黄纬计算公式化的尝试是成功的，其精度可与一行大衍历表格计算法的水平相当。其中，王朴算式精度较低，显然与上述的王朴考虑问题的片面性相关。自边冈算式到姚舜辅算式精度的波浪起伏，反映了人们对月亮极黄纬变化规律进行探索的艰苦过程，而姚舜辅算式的精度是为历代最佳者，这正是人们艰苦探索的结晶。

第九节　交食初亏、复圆时刻算式

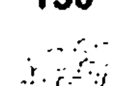
一、崇玄历和钦天历交食初亏、复圆时刻算式

在唐末边冈的崇玄历中还给出了日食初亏、复圆时刻的算式，最先将此类计算公式化，其术文依次是[2]：

在限内者，令限内分(W)自乘，百七十九而一，以减六百三十，余为阴历食差(Y_1)。限外者，置限外分(Z)与五百先相减、后相乘，四百四十六而一，为阴历食差(Y_2)。又限内分亦与五百先相减、后相乘，三百一十三半而一，为阳历食差(Y_3)。

依之可得：

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= 630-\frac{W^2}{179} \\ Y_2 &= \frac{1}{446}(500-Z)Z \\ Y_3 &= \frac{1}{313.5}(500-W)W \end{aligned}\right\} \qquad (2-142)$$



式中所谓限内、限外、限内外分(W、Z)的含义，另有术文给出定义和说明：

置其朔距天正中气积度(T)，以减三百六十五半，余以千乘，满三百六十五度半除为分，曰限心。加二百五十分，为限首(U_1)；减二百五十分，为限尾(U_2)，满若不足，加减一千。退食定余(I')一等，与限首、尾相近者相减，余为限内、外分(W、Z)。其食定余多于限首、少于限尾者，为外；少于限首、多于限尾者，为内。

依之又可列出下式：

$$W=\frac{I'}{10}-U_1$$

---

① 陈美东：《中国古代月亮极黄纬计算法》，《自然科学史研究》，1988 年，第 1 期。

② 《新唐书·历志六下》。



$$Z=\frac{I'}{10}-U_2$$

$$U_1=\frac{(365.5-T)\times1000}{365.5}+250=1250-\frac{1000}{365.5}T$$

$$U_2=\frac{(365.5-T)\times1000}{365.5}-250=750-\frac{1000}{365.5}T$$

式中 T 为定朔时日月与冬至点的距度。I' 即由式(2－62)或式(2－63)算得者。若 $U_1>1000$，需以 1000 减去之；若 U_2 为负值，需加以 1000。当 $U_1<I'<U_2$ 时，为在限外；当 $U_1>I'>U_2$ 时，为在限内。取 $|I'-U_1|$ 和 $|I'-U_2|$ 中的小者为 W 或 Z 值。

在五代王朴钦天历中则给出了日、月食初亏、复圆时刻算式，其术分别为：①

各置泛用分(B')，以平离(963)乘之，其日离程(A_1)而一，为定用分(D_0)，以减朔、望定分(I_0)，为亏初(C'_1)。加之复末(C'_2)。加时常分(Q)，如食甚术推之，得亏初、复末定分(C_1、C_2)。

依之则有：

$$C_1=C'_1+Q=I_0-D_0+Q=I_0-\frac{963B'}{A_1}+Q \qquad (2-143)$$

$$C_2=C'_2+Q=I_0+D_0+Q=I_0+\frac{963B'}{A_1}+Q \qquad (2-144)$$

式中，I_0 为定朔或定望时刻；A_1 为当日月亮实行分值，可由月离表推算而得；Q 为日食时差(月食时 $Q=0$)；而 B' 的推求，钦天历另有术文曰：

日食泛用分($B'_日$)：置距食分(E_1)，一千九百一十二以上，用减四千七百八十，余自相乘，六万三千二百七十二除之，以减六百四十七，为泛用分；九百五十六以(下)[上]，用减一千九百一十二，余以通法(100)乘之，七百三十五而一，以减五百一十七，为泛用分；九百五十六以(上)[下]，以距食分[减之，余]自相乘，二千三百六十二除之，用减三百八十七，为泛用分。

依术文意，可列出以下诸式：

当 $E_1>1912$ 时，

$$B'_日=647-\frac{(4780-E_1)^2}{63272} \qquad (2-145)$$

当 $956<E_1<1912$ 时，

$$B'_日=517-\frac{100(1912-E_1)}{735} \qquad (2-146)$$



① 《新五代史・司天考一》。

当 $E_1<956$ 时，

$$B'_{日}=387-\frac{(956-E_1)^2}{2362} \tag{2-147}$$

式中，E_1 为日食限值同日食甚时日月距黄白交点度分值之差。参阅钦天历"月食泛用分"术文，上术文需做如上更正，式(2－145)、式(2－146)、式(2－147)亦正可自恰。

关于月食泛用分($B'_{月}$)的算式，钦天历又有术文曰：

置距食分(E_2)二千一百四以上，用减五千二百六十，余自相乘，六万九千一百六十九除之，以减七百一十一，为泛用分($B'_{月}$)；一千五十二以上，用减二千一百四(十)，余，七除之，以减五百六十七，为泛用分；一千五十二以下，以距食分减之，余自相乘，二千六百五十四而一，用减四百一十七，为泛用分。

依此则有以下各式：

当 $E_2>2104$ 时，

$$B'_{月}=711-\frac{(5260-E_2)^2}{69169} \tag{2-148}$$

当 $1052<E_2<2104$ 时，

$$B'_{月}=567-\frac{(2140-E_2)}{7} \tag{2-149}$$

当 $E_2<1052$ 时，

$$B'_{月}=417-\frac{(1052-E_2)^2}{2654} \tag{2-150}$$

式中，E_2 为月食限值同定望时日月距黄白交点度分值之差。

$B'_{日}$和 $B'_{月}$ 即式(2－143)和式(2－144)中的 B'，分别就日食或月食而言(下同)。

二、崇天历交食初亏、复圆时刻算式及其影响

北宋宋行古崇天历也给出求算日月食亏初、复满时刻的方法，其术文依次为：[①]

各以定用分(D_0)减食甚小余(I')，为亏初(C_1)；加食甚小余，为复满(C_2)。

即

$$\left.\begin{aligned}C_1&=I'-D_0\\C_2&=I'+D_0\end{aligned}\right\} \tag{2-151}$$

① 《宋史・律历志六》。



式中 I'为食甚小余，可依式(2－64)或式(2－65)算得。D_0 的计算另有术文曰：

置日月食泛用分(B')，以一千三百三十七乘之，以所食日转定分(A_1)除之，即得所求(D_0)。

依之可得：

$$D_0=\frac{1337}{A_1}B' \tag{2-152}$$

式中，A_1 的含义与式(2－143)相同。将式(2－152)代入式(2－151)可见，式(2－151)与式(2－143)、式(2－144)的形式是完全相同的。至于式中的 B'，崇天历又有术文曰：

求日食泛用分：置朔入阴阳历食定分(E_1)，一百约之，在阳历者，列八十四于下；在阴历者，列一百四十于下，各以上减下，余以乘上，进二位，阳历以一百八十五除；阴历以五百一十四除，各为日食泛用分($B'_{日}$)。

依之可得：

当在阳历时(即月亮极黄纬大于一象限时，$E_1<4200$)，

$$B'_{日}=\left[\left(84-\frac{E_1}{100}\right)\frac{E_1}{100}\right]\frac{100}{185} \tag{2-153}$$

当在阴历时(即月亮极黄纬小于一象限时，$E_1<7000$)，

$$B'_{日}=\left[\left(140-\frac{E_1}{100}\right)\frac{E_1}{100}\right]\frac{100}{514} \tag{2-154}$$

式中，E_1 为日食食甚时，日食阳历食限或阴历食限同日月距黄白交点度分值之差。

崇天历求月食泛用分($B'_{月}$)的术文曰：

置望入交前后分(F_1)，退一等，自相乘，交初以九百三十五除，交中以一千一百五十六除之，得数用减刻率(交初以一千一百一十二为刻率，交中以九百为刻率)，各得所求。

依此则有：

在交初时，即定望之际月在黄白交点降交点前后时，

$$B'_{月}=1112-\frac{F_1^2}{93500} \tag{2-155}$$

在交中时，即定望之际月在黄白交点升交点前后时，

$$B'_{月}=900-\frac{F_1^2}{115600} \tag{2-156}$$

式中，F_1 为定望时，月与黄白交点度距的分值。

北宋周琮明天历亦有日月食初亏、复满时刻的算式，其术文依次为[1]：

求日月食亏初、复满时刻：以定用刻分(D_0)减食甚小余(I')，为亏初小余(C_1)，加食甚[小余]，为复满小余(C_2)。

求日月食定用刻分：置日月食泛用刻分(B')，以一千三百三十七乘之，以所直度下月行定分(A_1)除之，所得为日月食定用刻分(D_0)。

求日食泛用刻分：置阴、阳历食分(E_1)于上，列一千九百五十三于下，以上减下，余以乘上，满二百七十一除之，为日食泛用刻分($B'_日$)。

求月食泛用刻分：置去交定分(F_1)，自相乘，交初以四百五十九除，交中以五百四十除之，所得，交初以减二千九百，交中以减三千二百一十五，余为月食泛用刻分($B'_月$)。

依术文意，可列出以下诸式：

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= I' - D_0 \\ C_2 &= I' + D_0 \\ D_0 &= \frac{1337}{A_1}B' \\ B'_日 &= \frac{E_1}{271}(1953 - E_1) \end{aligned}\right\} \tag{2-157}$$

在交初时，

$$B'_月 = 3900 - \frac{F_1^2}{459} \tag{2-158}$$

在交中时，

$$B'_月 = 3315 - \frac{F_1^2}{540} \tag{2-159}$$

以上各算式自变量的含义，以及算式的函数形式均与上述崇天历各算式相同，只是周琮在求 $B'_日$ 时，仅以一式贯之，自然，依 B' 诸式在所得数量上有所不同。

北宋皇居卿观天历计算“求日月食亏初、复满小余”和“求日月食定用分”的方法，与崇天历、明天历也完全相同，而“求日食泛用分”和“求月食泛用分”[2]的术文则稍异，它们分别为：

置日食定分(E_1)，退二位，列于上，在阳历列九十八于下，在阴历列一百五十八于下，各相减、相乘，阳以二百五十而一，阴以六百五十而一，各为日食泛用分($B'_日$)。

置望交前、后分(F_1)，自相乘，退二位，交初以一千一百三十八而一，

① 《宋史·律历志八》。

② 《宋史·律历志十一》。



用减一千二百三，交中以一千二百六十四而一，用减一千八十三，各为月食泛用分($B'_{月}$)。

依此，可列出以下各式：

当在阳历时($E_1<4900$)，

$$B'_{日}=\frac{E_1}{25000}\left(98-\frac{E_1}{100}\right) \tag{2-160}$$

当在阴历时($E_1<7900$)，

$$B'_{日}=\frac{E_1}{65000}\left(158-\frac{E_1}{100}\right) \tag{2-161}$$

当在交初时，

$$B'_{月}=1203-\frac{F_1^2}{113800} \tag{2-162}$$

当在交中时，

$$B'_{月}=1083-\frac{F_1^2}{126400} \tag{2-163}$$

以上各式自变量的含义，以及算式函数形式亦均与宋行古算式相同。

北宋姚舜辅纪元历求日月食亏初、复满时刻的术文依次为：①

置日、月食甚小余(I')，各以定用分(D_0)减之，为亏初(C_1)；加之，为复满(C_2)。

置日、月食泛用分(B')，副之，以食甚加时入转算外损益率(A'_1)乘之，如日法(7290)而一，所得，应朒者依其损益；应朓者，益减、损加其副，即为日食定用分(D_0)。

置交前、后分(F_1)，自相乘，退二位，阳历一百九十八而一，阴历三百一十七而一，所得，用减五百八十三，余为日食泛用分($B'_{日}$)。

置交前、后分(F_1)，自相乘，退二位，如七百四而一，所得，用减六百五十六，余为月食泛用分($B'_{月}$)。

依术文意，可列出以下各式：

$$\left.\begin{aligned}C_1&=I'-D_0\\C_2&=I'+D_0\\D_0&=B'\left(1\pm\frac{A'_1}{7290}\right)=\frac{A_1}{1337}B'\end{aligned}\right\} \tag{2-164}$$

当在阳历时($F_1<3400$)，

① 《宋史·律历志十三》。

$$B'_{日} = 583 - \frac{F_1^2}{19800} \tag{2-165}$$

当在阴历时($F_1 < 4300$),

$$B'_{日} = 583 - \frac{F_1^2}{31700} \tag{2-166}$$

$$B'_{月} = 656 - \frac{F_1^2}{70400} (F_1 < 6800) \tag{2-167}$$

式中各自变量的含义均与上述宋行古崇天历相关算式相同。而 $A_1 = 1337 \pm \frac{A'_1}{7290} \times 1337 = 1337\left(1 \pm \frac{A'_1}{7290}\right)$①,于是 $\frac{A_1}{1337} = \left(1 \pm \frac{A'_1}{7290}\right)$,代入上式可得 $D_0 = \frac{A_1}{1337}B'$。这里 A_1 的含义也与上述宋行古相关算式相同。由之可见,姚舜辅求 D_0 算式的系数乃是宋行古相关算式系数的倒数。姚舜辅求 B' 算式的函数形式亦与宋行古无异,只是求 $B'_{日}$ 时以一式贯之,小有不同。

姚舜辅的这些算式均为南宋诸历法所承用。

金代赵知微重修大明历也载有日月食初亏、复圆时刻算式的术文②。关于日食初亏、复圆时刻算式,其术曰:

> 置日食之大分($C'_{日}$),与三十相减、相乘,又以二千四百五十乘之,如定朔入转算外转定分(A_1)而一,所得,为定用分(D_0),减定余(I'),为初亏分(C_1);加定余,为复圆分(C_2)。

依此可得:

$$C_1 = I' - D_0 = I' - \frac{2450}{A_1}(30 - C'_{日})C'_{日} \tag{2-168}$$

$$C_2 = I' + D_0 = I' + \frac{2450}{A_1}(30 - C'_{日})C'_{日} \tag{2-169}$$

式中 I' 为食甚小余,A_1 的含义同式(2—143)。关于 $C'_{日}$ 的计算另有术文曰:

> 视去交前、后定分(E_1),如二千四百以下,为既前分,以二百四十八除为大分($C'_{日}$)。二千四百以上,覆减五千五百,为既后分,以三百二十除为大分($C'_{日}$)。

依之可得:

当 $E_1 < 2400$ 时,

$$C'_{日} = \frac{E_1}{248} \tag{2-170}$$

---

① 陈美东、张培瑜:《月离表初探》,《自然科学史研究》,1987年,第2期。

② 《金史·历志下》。



当 $E_1>2400$ 时，需以5500返减之，

$$C'_{日}=\frac{E_1}{320} \qquad (2-171)$$

式中，E_1 的含义同式(2－153)。

重修大明历关于月食初亏、复圆算式的术文则为：

置月食之大分($C'_{月}$)，与三十五分相减、相乘，又以二千一百乘之，如定望入转算外转定分(A_1)而一，所得，为定用分(D_0)。加减定余(I')，为初亏(C_1)、复圆(C_2)分。

视去交前、后分(F_1)，一千七百以下者，食甚。以上，覆减五千一百，余以三百四十除为大分($C'_{月}$)。

依之，可列出以下算式：

$$C_1=I'-D_0=I'-\frac{2100}{A_1}(35-C'_{月})C'_{月} \qquad (2-172)$$

$$C_2=I'+D_0=I'+\frac{2100}{A_1}(35-C'_{月})C'_{月} \qquad (2-173)$$

$$C'_{月}=\frac{F_1}{340} \qquad (2-174)$$

式中，I'、A_1、F_1 的含义同式(2－151)和式(2－155)，$F_1<1700$，若 $F_1>1700$，需以5100返减之。

将式(2－170)和式(2－171)分别代入式(2－168)，可得：

$$\left.\begin{aligned}C_1&=I'-\frac{2450}{A_1}\left(30-\frac{E_1}{248}\right)\frac{E_1}{248}\\C_1&=I'-\frac{2450}{A_1}\left(30-\frac{E_1}{320}\right)\frac{E_1}{320}\end{aligned}\right\} \qquad (2-175)$$

由上述宋行古和皇居卿的算式，C_1 值亦可示如该二式相同的函数形式(C_2 值的情况也如此)。这就是说赵知微求算日食 C_1、C_2 公式实际上是沿用宋行古、皇居卿算式的函数形式，但对算式的具体描述过程略作变化：宋行古、皇居卿在求 D_0 时不用，而在求 $B'_{日}$ 时才用先相减、后相乘法，而赵知微在求 D_0 时就先用了先相减、后相乘法，如此而已。对于月食 D_0 值的计算，赵知微也采用了先相减、后相乘法，这同前述各历法均采用自相乘法是不同的。

元代耶律楚材庚午历所载推求交食初亏、复圆时刻的算式与赵知微重修大明历全同。

三、授时历交食初亏、复圆时刻算式

元代郭守敬等人授时历亦载有求交食初亏等时刻的算法。[①] 对于日食而言，其术曰：

置日食分秒($C'_{日}$)，与二十分相减、相乘，平方开之，所得，以五千七百四十乘之，如入定限行度(A_1)而一，为定用分(D_0)，以减食甚定分(I')，为初亏(C_1)；加食甚定分，为复圆(C_2)。

视去交前、后度(F'_1)，各减阴阳历食限(阳历限 6 度，阴历限 8 度)，余如定法(阳历定法 0.6，阴历定法 0.8)而一，各为日食之分秒($C'_{日}$)。

依此可得：

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= I' - D_0 = I' - \frac{5740}{A_1}\sqrt{(20-C'_{日})C'_{日}} \\ C_2 &= I' + D_0 = I' + \frac{5740}{A_1}\sqrt{(20-C'_{日})C'_{日}} \end{aligned}\right\} \qquad (2-176)$$

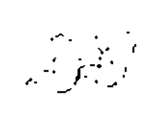
对于阳历而言，

$$C'_{日} = \frac{1}{0.6}(6-F'_1) \qquad (2-177)$$

对于阴历而言，

$$C'_{日} = \frac{1}{0.8}(8-F'_1) \qquad (2-178)$$

式中 A_1 的含义与式(2－143)相同。F'_1 为日食甚时，日月与黄白交点的度距。



郭守敬等人的授时历还给出了月食初亏和复圆时刻的算法，其术依次为：

置月食分秒($C'_{月}$)，与三十分相减、相乘，平方开之，所得，以五千七百四十乘之，如入定限行度(A_1)而一，为定用分(D_0)。以减食甚定分(I')为初亏(C_1)；加食甚定分，为复圆(C_2)。

视去交前、后度(F_1)，用减食限(13.05 度)，余如定法(0.87)而一，为月食之分秒($C'_{月}$)。

依之可得：

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= I' - D_0 = I' - \frac{5740}{A_1}\sqrt{(30-C'_{月})C'_{月}} \\ C_2 &= I' + D_0 = I' + \frac{5740}{A_1}\sqrt{(30-C'_{月})C'_{月}} \end{aligned}\right\} \qquad (2-179)$$

---

① 《元史·历志四》。



$$C'_{月}=\frac{1}{0.87}(13.05-F_1) \qquad (2-180)$$

式中各自变量的含义与式(2－151)、式(2－155)相同。郭守敬等人的这些算式的函数形式也与前述各算式不同，是一种新颖的函数式。

第十节 月食食既和生光时刻算式

一、崇天历、明天历、观天历月食既带食出入时刻算式

月食食既时刻系指月面被地影完全遮掩的初始时刻，而生光时刻则指月面被地影完全遮掩一段时间后刚刚露出光亮的时刻。在北宋宋行古的崇天历中，最先给出一种推求月食既带食出入的算式，已经涉及对这两种时刻计算的问题，但并未指明，北宋周琮明天历和皇居卿观天历亦如此，一直到北宋姚舜辅纪元历才给出了明确的论述，此后才普遍推广开来。

宋行古在崇天历中给出了一种"求月食既内外刻分"的算式，其术曰：

> 置月食交前、后分(F_1)，覆减三千二百，一百约之，列六十四于下，以上减下，余以乘上，进二位，交初以二百九十三除，交中以三百六十(五)[二][①]除，所得，以定用分(D_0)乘之，如泛用分($B'_{月}$)而一，为月食既内刻分(P_1)，覆减定用分，即既外刻分(P_2)。[②]

依之可列出下式：

在交初时，

$$P_1=\frac{D_0}{B'_{月}}\times\frac{100}{293}\left[64-\frac{(3200-F_1)}{100}\right]\frac{(3200-F_1)}{100}$$

$$=\frac{D_0}{293B'_{月}}(10240000-F_1^2) \qquad (2-181)$$

在交中时，

$$P_1=\frac{D_0}{B'_{月}}\times\frac{100}{362}\left[64-\frac{(3200-F_1)}{100}\right]\frac{(3200-F_1)}{100}$$

$$=\frac{D_0}{362B'_{月}}(10240000-F_1^2) \qquad (2-182)$$

---

① 设 $F_1=0$，令式(2－155)和式(2－156)分别代人式(2－181)和式(2－182)，此时交初的 $B'_{月}$ 乘以293(1112×293＝325816)应等于交中的 $B'_{月}$ 乘以 365(900×365＝328500)，328500 远大于 325816，故 293 或 365 两数中必有一误。若改 365 为 362，可得 900×362＝325800；若改 293 为 295 或 296，可得 295×1112＝328040 或 296×1112＝329152，三者中以改 365 为 362 最为接近，故从改。

② 《宋史·律历志六》。

$$P_2 = D_0 - P_1 \tag{2-183}$$

式中 F_1 为定望时，月与黄白交点度距的分值（下同）。D_0、$B'_{月}$ 可由式（2－152）、式（2－155）和式（2－156）求得。这是一组为推求月食既带食出入而设的算式。以定望时刻减去 P_1，即为月食食既时刻；以定望时刻加上 P_2，即为月食生光时刻。可是，在崇天历中并未明确指出这一点。

北宋周琮在明天历中亦给出一组为推求月食既带食出入而设的算式，其术曰：

置月食去交分（F_1），覆减食限三之一（446），余列于上位，乃列三之二（892）于下，以上减下，余以乘上，以一百七十除之，所得，以定用刻分（D_0）乘之，满泛用刻分（$B'_{月}$）除之，为月食既内刻分（P_1）；用减定用刻分，余为既外刻分（P_2）。①

依之可得：

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{D_0}{170B'_{月}}[892-(446-F_1)](446-F_1) \\ &= \frac{D_0}{170B'_{月}}(198916-F_1^2) \\ P_2 &= D_0 - P_1 \end{aligned}\right\} \tag{2-184}$$

式中，D_0、$B'_{月}$ 可由式（2－157）、式（2－158）和式（2－159）求得。

北宋皇居卿观天历为推求月食既带食出入而设的算式的术文为：

置月食交前、后分（F_1），覆减三千七百，退二位，列于上，下列七十四，相减、相乘，进位，如三十七而一，所得，以定用分（D_0）乘之，如泛用分（$B'_{月}$）而一，为既内分（P_1），以减定用分，余为既外分（P_2）。②

依此则有：

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{10D_0}{37B'_{月}}\left[74-\frac{(3700-F_1)}{100}\right](3700-F_1) \\ &= \frac{D_0}{370B'_{月}}(13690000-F_1^2) \\ P_2 &= D_0 - P_1 \end{aligned}\right\} \tag{2-185}$$

式中，D_0、$B'_{月}$ 可由式（2－157）、式（2－162）和式（2－163）求得。将式（2－184）和式（2－185）同式（2－181）、式（2－182）比较可知，周琮和皇居卿显然都继承了宋行古算式的形式。而宋行古算式等从表面上看是依循先相减、后相乘法，而实际上则为自相乘法。这是先相减、后相乘法与自相乘法可以互为转换的有趣事例。

---

① 《宋史·律历志八》。

② 《宋史·律历志十一》。



二、纪元历、重修大明历、授时历月食食既和生光时刻算式

北宋姚舜辅在纪元历中也给出"求月食既内外分"术：

置月食交前、后分(F_1)，自相乘，退二位，如二百四十九而一，所得，用减二百三十一，余以定用分(D_0)乘之，如泛用分($B'_月$)而一，为月食既内分(P_1)，用减定用分，余为既外分(P_2)。①

依之可得：

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{D_0}{B'_月}\left[231-\frac{F_1^2}{24900}\right]\\P_2&=D_0-P_1\end{aligned}\right\}\qquad(2-186)$$

式中 D_0、$B'_月$ 可由式(2－164)和式(2－167)求得。这组算式是直接用自相乘法表述的，此法实与宋行古算式的形式无异。姚舜辅不但用 P_1、P_2 于月食既带食出入问题的计算，而且明确用之于计算月食食既和生光时刻的计算，其术曰：

(置月食甚小余 I')，以既内分(P_1)减之，为初既(C_3)；加之，为生光(C_4)。②

依此则有：

$$\left.\begin{aligned}C_3&=I'-P_1\\C_4&=I'+P_1\end{aligned}\right\}\qquad(2-187)$$

式中 I'为月食食甚时刻，可由式(2－70)、式(2－71)、式(2－72)求得。该算法为姚舜辅所创用，并为南宋诸历法所继承。

金代赵知微在重修大明历中给出了新型的、真正以先相减、后相乘法为准的月食食既和生光时刻的算式，并将它们与月食初亏、复圆时刻的计算统一在一起描述，其术文曰：

月食既者，以既内大分(F_2)与十五相减、相乘，又以四千二百乘之，如定望入转算外转定分(A_1)而一，所得，为既内分(P_1)。用减定用分(D_0)，为既外分(P_2)。置月食定余(I')，减[去]定用分，为初亏(C_1)；因加既外分，为食既(C_3)；又加既内分，为食甚(I')；再加既内分，为生光(C_4)；复加既外分，为复圆(C_2)。③

依术文意，可列出以下一组算式：

---

① 《宋史·律历志十三》。
② 《宋史·律历志十三》。
③ 《金史·历志下》。

$$
\left.\begin{aligned}
C_1 &= I' - D_0 \\
C_3 &= I' - D_0 + P_2 = I' - P_1 \\
I' &= I' - D_0 + P_2 + P_1 = I' \\
C_4 &= I' - D_0 + P'_2 + 2P_1 = I' + P_1 \\
C_2 &= I' - D_0 + 2P_2 + 2P_1 = I' + P_1 + P_2 = I' + D_0
\end{aligned}\right\} \quad (2-188)
$$

式中，

$$
\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{4200}{A_1}(15 - F_2)F_2 \\
P_2 &= D_0 - P_1
\end{aligned}\right\} \quad (2-189)
$$

I'、A_1 的含义同式(2－187)和式(2－143)。而 D_0 的计算另有术文曰：

置月食之大分($C'_月$)，与三十五相减、相乘，又以二千一百乘之，如定望入转算外转定分(A_1)而一，所得，为定用分(D_0)，减定余(I')为初亏分(C_1)；加定余，为复圆分(C_2)。[①]

依之可得：

$$
\left.\begin{aligned}
D_0 &= \frac{2100}{A_1}(35 - C'_A)C'_A \\
C_1 &= I' - D_0 \\
C_2 &= I' + D_0
\end{aligned}\right\} \quad (2-190)
$$

而求 C'_A 和 F_2 的术文曰：

视去交前、后分(F_1)，一千七百以下，食既；以上，覆减五千一百，余以三百四十除为大分(C'_A)……去交分(F_1)在既限(1700)以下，覆减既限，亦以三百四十除，为既内之大分(F_2)。[②]

由此可得：

当 $F_1 > 1700$ 时，需以 5100 返减之(即当入月食限而未入月食既限时)，

$$
C'_A = \frac{F_1}{340} \quad (2-191)
$$

当 $F_1 < 1700$ 时，需以 1700 返减之(即当入月食既限时)，

$$
F_2 = \frac{F_1}{340} \quad (2-192)
$$

式中 F_1 的含义与式(2－155)相同。

元代耶律楚材庚午历所载求月食初亏、食既、食甚、生光和复圆等时刻的算法与重修大明历全同。

---

① 《金史·历志下》。

② 《金史·历志下》。



已知月食既限＝月食限－10×月食定法[①]，则元代郭守敬等人授时历所取月食既限应为：13.05－10×0.87＝4.35度。当$F_1<4.35$度时，授时历又给出月食初亏、食既、食甚、生光和复满时刻的算式，其术曰：

月食既者，以既内分（应指月食既时的月食分秒C'_A）与一十分相减、相乘，平方开之，所得，以五千七百四十乘之，如入定限行度（A_1）而一，为既内分（P_1）；用减定用分（D_0），为既外分（P_2）。以定用分减食甚定分（I'），为初亏；加既外（P_2）为食既（C_3）；又加既内（P_1），为食甚（I'）；再加既内，为生光（C_4）；复加既外，为复圆（C_2）。[②]

依术文意，可列出与式（2－188）完全相同的算式，但式中，

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{5740}{A_1}\sqrt{(10-C'_A)C'_A}\\P_2&=D_0-P_1\\C'_A&=\frac{1}{0.87}(4.35-F_1)\end{aligned}\right\}\qquad(2-193)$$

D_0可依式（2－190）求得。其他自变量的含义亦与式（2－188）相同。

① 陈美东：《中国古代的月食食限及食分计算法》，《自然科学史研究》，1991年，第4期。

② 《元史・历志四》。

第三章 早期推步历法蠡测

第一节 观象授时与推步制定历法

由于和人类的生产、生活及社会的发展密切相关，所以天文历法是自然科学中发展最早的。初期历法情况如何，因文献无征，已不易详考。

《史记·历书》云：

神农以前尚矣。盖黄帝考定星历，建立五行，起消息，正闰馀。于是有天地神祇物类之官，是谓五官。……少皞氏之衰也，九黎乱德，民神杂扰，不可放物，祸灾荐至，莫尽其气。颛顼受之，乃命南正重司天以属神，命火正黎司地以属民，使复旧常，无相侵渎。其后三苗服九黎之德，故二官咸废所职，而闰馀乖次，孟陬殄灭，摄提无纪，历数失序。尧复遂重黎之后不忘旧者，使复典之，而立羲、和之官。明时正度，则阴阳调，风雨节，茂气至，民无夭疫。年耆禅舜，申戒文祖，云"天之历数在尔躬"。舜亦以命禹。由是观之，王者所重也。夏正以正月，殷正以十二月，周正以十一月。盖三王之正若循环，穷则反本。天下有道，则不失纪序；无道，则正朔不行于诸侯。

《史记·历书》是现存最早的历法文献。关于上古历法，太史公在这里只告诉我们，黄帝考定星历，建立五行，起消息，正闰余。颛顼继少皞而有天下，命令南正重、火(北)正黎主管天地事务。后来三苗又效九黎的样子作乱，主管天地的官俱废弃职守，致闰余乖次，历数失序。帝尧时，又起用重黎后人仍守旧业者重掌此事，设立羲、和之官，明时正度。于是阴阳调，风雨节，茂气至，民无夭疫。尧年老禅位于舜，在祖庙告诫他，日月星辰之运行，与民生关系至巨，这责任可在你身上啊。舜禅位禹时也如此教育他。由此可见，历代君王都极重视历法。于夏商周三代，司马迁类似《尚书大传》，记述了有关"三正"的说法，而对远古历法的具体内容，文中却并未涉及。

从出土殷周甲骨卜辞考知，至迟在殷商时期我国已用月有大小、年分平闰的阴阳合历。历法已初具规模和水平。我们在"试论殷代历法的月与月相的关系"中，进一步论证了殷商历法的月是朔望月，历月以新月初现为月首。其时月的开始由观测朏月决定，故月长与朔望月十分相近，月与月相的关系相当明确。

西周文献和铜器铭文中有大量生霸、死霸、朏、既望等月相名称，且其记载总与



历日相连。如"九年正月既死霸庚辰"(卫鼎乙),"十五年五月既生霸壬午"(趞曹鼎),"十二年三月既望庚寅"(走簋),等等。周初召诰记有:

越若来三月惟丙午朏。越三日戊申,太保朝至于洛,卜宅。厥既得卜,则经营。越三日庚戌,太保以庶殷攻位于洛汭。越五日甲寅,位成。越翼日乙卯,周公朝至于洛,则达观于新邑营。越三日丁巳,用牲于郊,牛二。越翼日戊午,乃社于新邑,牛一羊一豕一。越七日甲子,周公乃朝用书,命庶殷,侯甸男邦伯。厥既命殷庶,庶殷丕作。

在一个月之内从丙午到甲子19天,这一大段记事,其纪日顺序完全系之于一个"朏"字。此处之用朏,犹如后世历法的以朔为月首,日序以初一、初二等依次排下去。这清楚表明,至少西周初期还是以新月初现"朏"作为月首,而纪日与月亮观测有密切的关系。要靠月相来确定日序。朔月不可见,只能推算得出。可见殷周历法是根据实测天象决定,而不是事先推步制定的。如斯时已认识朔,历法像后世一样是计算颁行的。这么重视、观测、记录月相就完全是多余和不可理解的了。

出土的殷周甲骨以及西周金文中还未发现与制历有密切关系的"朔"字。在可靠的文献中,最早的"朔"字(作朔日解)出现在《诗·小雅·十月之交》中。这里记载的是公元前8世纪的一次日食,发生的日子是朔日。继后的春秋时代肯定是以朔日作月首了。但直到文公时代(公元前7世纪),国君仍有告月、告朔等活动,说明其时距开始以朔为月首的时代不会太久。很有可能,中国历法是在西周中后期废朏用朔的。

太阳、月亮是人类最早认识的最明亮的天体。太阳出没方位和高度的变化,形成了昼夜长短交替、季节寒来暑往。它又直接关系到作物的种长收藏和人类的生产、生活和社会活动。月亮光度适中,肉眼可以直接观察。人们早就注意到月亮在恒星间的运行。此外,更会观测到月轮有盈亏。月亮从新月(朏)—上弦—望—下弦—残月,逐日之间有着明显的月相变化,且有一定的循环规律,用这个周期来表示一种时间段落是极为自然的。月亮连续两次满轮的时距就是朔望月,即月相变化循环一周的时间。

月亮本身不发光,月相盈亏变化是反射太阳光形成的。月亮迎着太阳的半球被太阳照亮,背着太阳的半球是暗的。月球绕地运行,若走到日地之间,从地球上看,此时日月处在同一经度,叫作朔。该时月亮暗的半球朝向地球,人们看不到它。所以朔只能靠推算得知。殷人对日出日入尚且有祭,自不可能认识月相成因和日月运行规律,当然更不会计算合朔的时日。通过长期观测月相,掌握了它的变化规律和循环周期,才可能认识并确实得出一个较准确的平均的朔望月来作为月长。

到了这个时期，不必依靠观测月相而可事先推算得出平朔，这是科学上的一个进步。历法发展到废朏而用朔作月首，自此进入推步制历的新的历史时期。

在推步制定历法以前，只可能采用以观测日影和某些昏旦星象的南中、伏见推定季节，安排农时，靠目视月相确定月始和日序，依天象而随时调节岁首和年长的历法，这就是《吕氏春秋·贵因》所说的"审天者查列星而知四时"的年代。不论中外，在人类历史上都有这么一个阶段，可能还是一个相当长的时期。通常把这称作观象授时或历法的准备阶段。

殷商、西周历法以及观象授时是历法研究的重要课题。多年来，特别是近几十年，经过学者孜孜探求，在这方面已取得丰硕成果。本书限于篇幅和体例，侧重介绍各制定历的发展、创新和特点，以及历代颁行历法的具体推步。

中国早期推步历法是个什么样子，已很难确知了。本章只能根据文献、文物中的零散材料试作分析和考查。

第二节 《春秋》历日和日食

《春秋》又称《春秋经》，是春秋时期鲁国史官撰写的编年史。《春秋》是其时各国史书的通名。周天子和各大诸侯国都编有这种历史书，但只有这一部鲁国《春秋》留存了下来。它是我国现存最早的一部编年史。

《春秋》记述了自鲁隐公元年（前 722）至哀公十四年（前 481）共 242 年这段历史时期的许多事件，涉及许多诸侯国。同时它又保存了其时丰富的天文历法资料，如年月四时、历日干支、朔晦闰月、彗孛流陨、日食、星名、视朔告朔、郊社祭祀，等等。本节对春秋日食合历情况试作讨论。

《春秋》242 年中记录了 37 次日食。其中，经文注明是朔日发生的有 28 次（内有一次缺日干支）；有年月日干支，经文未注明是朔日者 7 次；仅记年月（缺日干支又未注朔）者 2 次。除襄公十五年（前 558）八月丁巳日有食之（未注朔）外，后两种情况都集中在鲁成公以前的春秋前半期。

这些日食的考订对于了解春秋历法、年代，以及对于近代天文学的研究（例如，对地球自转不均匀性的研究）都有一定意义。古今很多历算家都对这 37 次日食做过分析考查，限于时代和方法，仍有未尽之处，有的需做修正。为此，我们依据现代天文方法对它们重新做了计算（表 3－1 列出这 37 次日食曲阜的见食情况）并进而计算了自鲁隐公元年（前 722）至哀公十九年（前 476）247 年间曲阜（鲁国都城）可见的全部日食（见表 3－2）。



表 3－1　《春秋》载日食及曲阜见食情况

日食记载			公元前	儒略日	干支	合朔时分		食分	食甚时分		注
隐三年	二月己巳		720.2.22	1458496	己巳	8	18	0.47	7	18	
桓三年	七月壬辰朔	既	709.7.17	1462659	壬辰	14	34	1.00	15	37	
十七年	十月朔		695.10.10	1467857	庚午	15	0	0.58	15	45	庚午朔
庄十八年	三月		676.4.15	1474619	壬子	16	3	0.68	17	46	壬子
廿五年	六月辛未朔	鼓	669.5.27	1477218	辛未	10	40	0.88	10	01	
廿六年	十二月癸亥朔		668.11.10	1477750	癸亥	11	18	0.72	10	16	
三十年	九月庚午朔	鼓	664.8.28	1479137	庚午	14	50	0.84	15	36	
僖五年	九月戊申朔		655.8.19	1482415	戊申	14	11	0.88	14	52	
十二年	三月庚午		648.4.6	1484837	庚午	16	14	0.26	17	59	
十五年	五月		645.5.2	1485859	壬子						无日食
文元年	二月癸亥		626.2.3	1492810	癸亥	12	19	0.79	12	53	
十五年	六月辛丑朔	鼓	612.4.28	1498008	辛丑	7	27	0.87	6	29	
宣八年	七月甲子	既	601.9.20	1502171	甲子	15	4	0.91	15	42	十月甲子
十年	四月丙辰		599.3.6	1502703	丙辰	7	23	(0.50	6	48)	
十七年	六月癸卯		592.5.8	1501670	癸卯	7	9	0.43	6	0	宣七年六月癸卯
成十六年	六月丙寅朔		575.5.9	1511533	丙寅	13	31	0.96	14	35	
十七年	十二月丁巳朔		574.10.22	1512064	丁巳	9	19	0.66	7	43	
襄十四年	二月乙未朔		559.1.14	1517262	乙未	14	9	0.65	15	17	
十五年	八月丁巳		558.5.31	1517764	丁巳	5	53	(0.35	4	57)	七月丁巳
廿年	十月丙辰朔		553.8.31	1519683	丙辰						日食偏西南曲阜不见
廿一年	九月庚戌朔		552.8.20	1520037	庚戌	13	54	0.69	14	34	
廿一年	十月庚辰朔		552.9.19	1520067	庚辰						无日食
廿三年	二月癸酉朔		550.1.5	1520540	癸酉	10	8	0.91	9	2	
廿四年	七月甲子朔	既	549.6.19	1521071	甲子	13	16	1.01	13	58	
廿四年	八月癸巳朔		549.7.18	1521100	癸巳						无日食
廿七年	十二月乙亥朔		546.10.13	1522282	乙亥	8	49	0.94	7	8	
昭七年	四月甲辰朔		535.3.18	1526091	甲辰	13	21	0.35	14	31	
十五年	六月丁巳朔		527.4.18	1529044	丁巳	11	44	0.93	11	58	
十七年	六月甲戌朔		525.8.21	1529900	癸酉	16	23	0.82	17	34	九月晦癸酉
廿一年	七月壬午朔		521.6.10	1531289	壬午	10	50	0.62	10	11	
廿二年	十二月癸酉朔		520.11.23	1531820	癸酉	12	1	0.59	11	28	
廿四年	五月乙未朔		518.4.9	1532322	乙未	9	5	0.58	8	16	
卅一年	十二月辛亥朔		511.11.14	1535098	辛亥	10	52	0.53	9	56	
定五年	三月辛亥朔		505.2.16	1537018	辛亥	14	3	0.44	15	16	
十二年	十一月丙寅朔		498.9.22	1539793	丙寅	12	5	0.87	11	24	
十五年	八月庚辰朔		495.7.22	1540827	庚辰	12	4	0.51	11	56	
哀十四年	五月庚申朔		481.4.19	1545847	庚申	12	14	0.82	12	43	

表 3—2　曲阜可见而《春秋》未载的日食

	公元前年月日	儒略日	干支	合朔时分		曲阜食分	见食食甚时分	
隐　元　年	722.10.9	1457994	丁未	9	48	0.18	8	12
五　年	718.7.27	1459381	甲寅	15	4	0.27	16	12
七　年	716.6.6	1460061	甲戌	15	19	0.14	16	49
十一年	712.9.18	1461626	己卯	11	17	0.39	9	51
桓　四　年	708.12.31	1463191	甲申	9	4	0.66	7	37
十　年	702.3.5	1465081	甲寅	16	31	(0.60	18	3)
十一年	701.8.17	1465612	乙巳	10	42	0.61	9	36
十五年	697.6.6	1467001	甲寅	6	48	0.45	5	35
十六年	696.5.26	1467355	戊申	8	47	0.00	7	12
庄　九　年	685.3.26	1471312	乙巳	7	51	0.05	7	03
十一年	683.3.5	1472021	甲午	16	26	(0.14	18	4)
十二年	682.8.18	1472552	乙酉	6	44	(0.32	5	23)
十三年	681.1.13	1472700	癸丑	11	39	0.15	11	41
十四年	680.1.1	1473054	丁未	12	14	0.57	12	11
十五年	679.6.17	1473586	己亥	13	31	0.61	14	27
十六年	678.11.1	1474088	辛酉	12	58	0.03	13	13
十九年	675.4.5	1474974	丁未	8	25	0.65	7	40
廿一年	673.8.8	1475830	癸亥	6	8	(0.11	5	15)
廿八年	666.3.27	1478252	乙酉	8	24	0.72	7	34
僖　元　年	659.11.1	1481028	辛丑	7	50	(0.05	6	32)
二　年	658.10.21	1481382	乙未	10	44	0.38	8	57
三　年	657.4.15	1481559	壬辰	16	9	0.08	17	45
四　年	656.4.5	1481914	丁亥	8	47	0.07	7	48
六　年	654.8.9	1482770	癸卯	6	58	0.33	5	23
七　年	653.2.2	1482947	庚子	8	45	0.94	7	35
九　年	651.6.7	1483803	丙辰	17	00	0.73	18	42
九　年	651.12.2	1483981	甲寅	8	21	(0.13	7	5)
十三年	647.9.19	1485368	辛酉	10	19	0.31	8	54
十九年	641.11.11	1487613	丙戌	16	15	(0.61	17	15)
廿四年	636.2.23	1489178	辛卯	15	43	0.80	17	40
卅一年	629.4.6	1491777	庚戌	15	33	0.51	17	12
卅二年	628.9.19	1492308	辛丑	7	24	(0.37	5	52)

续表

	公元前年月日	儒略日	干支	合朔时分		曲阜食分	见食食甚时分	
文 二 年	625.7.19	1493342	乙卯	9	41	0.64	8	20
三 年	624.12.3	1493844	丁丑	15	25	0.14	16	31
五 年	622.5.18	1494375	戊辰	14	15	0.23	15	38
六 年	621.5.7	1494730	癸亥	7	16	0.31	6	23
十二年	615.6.29	1496974	丁亥	5	60	(0.67	4	50)
十三年	614.6.18	1497328	辛巳	10	21	0.09	9	28
十四年	614.12.13	1497506	己卯	13	1	0.92	13	18
十七年	610.9.30	1498893	丙戌	15	50	0.67	16	39
宣 二 年	607.7.30	1499927	庚子	16	30	0.08	17	48
三 年	606.7.19	1500281	甲午	17	11	0.57	18	39
四 年	605.12.3	1500784	丁巳	9	10	0.55	7	41
六 年	604.11.22	1501138	辛亥	10	58	0.07	9	10
六 年	603.5.18	1501315	戊申	14	50	0.55	16	12
九 年	600.9.10	1502526	己未	7	20	(0.81	5	44)
十二年	597.7.9	1503559	壬申	12	33	0.28	13	9
十八年	591.9.30	1505833	丙寅	16	40	0.16	17	29
成 九 年	582.3.28	1508934	丁未	12	40	0.25	14	6
十 年	581.3.16	1509288	辛丑	14	36	0.19	16	1
襄 元 年	572.3.7	1512566	己卯	11	13	0.86	11	17
二 年	571.8.21	1513098	辛未	6	39	(0.06	5	27)
三 年	570.8.10	1513452	乙丑	6	44	(0.43	5	17)
十三年	560.7.20	1517084	丁酉	7	31	0.37	5	54
廿六年	547.10.23	1521927	庚辰	17	6	(0.51	17	35)
卅一年	542.7.31	1523669	壬午	14	50	0.13	15	32
昭 八 年	533.1.27	1526771	甲子	10	30	0.02	10	08
卅二年	510.5.10	1535275	戊申	15	2	0.04	16	50
定 七 年	503.6.21	1537874	丁卯	17	54	0.80	19	20
九 年	501.11.23	1538760	癸丑	12	40	0.25	12	27
十三年	497.9.10	1540147	庚申	16	20	0.21	17	18
十四年	496.2.6	1540296	己丑	10	2	0.87	9	17
哀 三 年	492.11.14	1542038	辛卯	11	7	0.26	9	45
七 年	488.9.1	1543425	戊戌	13	46	0.39	13	51
十九年	476.7.22	1547766	庚申	7	58	0.36	8	31

计算表明,《春秋》记载的37次日食中,有32次可认定为其时观测实录。这里又分三种情况:①年月日相符,曲阜可见者27次;②经文无纪日干支,年月记载相合,曲阜可见者2次;③年月日干支基本相符,据考查年月其一明显记误而曲阜可见者3次。如,经文记载,宣公八年七月甲子日有食之既。在整个春秋247年中,发生于甲子日的日食仅有3次。其中昭八年闰月朔甲子日食,曲阜仅可见食分0.02,目视无法觉察,当然更谈不到食既。另一次就是经载的襄二十四年七月甲子朔日有食之既。第三次就是宣八年发生于十月甲子朔的大食分日食,食分0.91。《春秋》所记非此莫属,显系月名七、十古书形近致误。再如,经书宣十七年六月癸卯日有食之。但六月不入食限,无日食发生。这一年有两次中心食,一为五月乙亥朔,一是十一月壬申朔,皆非癸卯,且曲阜均不可见,显然史载有误。整个春秋247年,只有两次曲阜可见日食发生在癸卯日。一为僖六年九月,食分0.33,一为宣七年六月,食分0.43。前者,公、年、月名皆不合;后者时代为宣公,又合六月,仅年数相差10年。前代学者已指出可能为宣七年六月癸卯日食误置,即经文"十七年"中,"十"字衍。由上看来,此说应该是可信的。襄十四年二月朔乙未(前559年1月14日)距十五年八月丁巳(前558年5月31日)17个朔望月(502日)。计算表明,这是两次确切的曲阜发生日食的日子。阴阳历中,平年12月、闰年13月,绝不会一年只有10或11个月。所以不论丁巳日食发生在朔还是在晦,总之绝不可能在八月。所以"八月丁巳"中的"八"字,肯定是错了。根据我们或者王韬复原的春秋长历,襄十五年七月丁巳朔确有日食可见。故可认定,经书"八月丁巳"乃"七月丁巳"之误。

《春秋》37次日食中,可以认定,僖十五年五月、襄二十一年十月庚辰朔、襄二十四年八月癸巳朔,这三次经载日食是错误的。《春秋》书襄二十一、二十四年两次比月而食。襄二十一年九月庚戌朔和二十四年七月甲子朔两次日食皆为中心食,曲阜分别可见七分食和日全食。食时日月距交仅有7°和1°。而下一次合朔距交俱已远出食限之外,不可能再发生日食。《春秋》误载有可能是因为错简,但更可能是这两次日食所记因建正各异而月份不同,史官两说并存所致。在春秋时期247年中,曲阜可见庚辰日食共有两次,一为《春秋》所记定十五年八月庚辰朔日食;另一为襄二十六年十二月庚辰朔曲阜可见的日带食没。后者经文失载,虽然年月与庚辰比月食俱不相合,但相距不远,以错简误置或可勉强解释。可是,在这247年中,曲阜不可能看到一次日食出现在癸巳日。因此,用错简怎样也解释不清襄二十四年八月癸巳朔这次日食。前贤大都把它视作文十一年八月癸巳日食的误置。其实这是时代限制,计算不够准确所致的差错。这次日食在当时鲁都曲阜乃至整个中国都看不到。



僖十五年五月日有食之。这一年有三次日偏食，但皆不值五月，五月不入食限。经计算，这三次日食曲阜均不可见。故《春秋》的记载是不对的。春秋十二公中，隐闵二公外，皆有十五年。文、昭十五年六月、襄十五年七月、定十五年八月都有日食记载，不可能在五月还有别的可见的日食了。由表3－2看出，僖、宣、成、哀四公十五年俱无日食可见，只桓十五年六月甲寅朔、庄十五年六月己亥朔两次日食可见，而经文未载。僖十五年五月日食未书朔晦，不能排除这次日食是桓、庄之事错编在僖公的可能性。也许还有另一种可能，日食确属僖公，但年份有误或年月皆误。由表3－2知，这样就可有多种选择的余地。总之，这次日食记载残缺较多，很难认定。

襄二十年十月丙辰朔和昭十七年六月甲戌朔两次日食的证认存在一些问题。前者是一次日环食，食时距交仅1°，但发生在纬度偏南的地区，曲阜看不到它。经文所书只能理解是根据传闻。昭十七年六月并非甲戌朔，也不入食限。依作者排定历谱，是年十月甲戌朔，九月晦癸酉有大食分日食。似应为这次日食之误记。但何以月日皆误。有人认为是预报，似未尽妥。作者认为虽不能完全排除隐七年六月甲戌朔日食误置于此的可能性，但由表3－2可知，是食食分甚浅，比较勉强。

综上所述，《春秋》37次日食中，有32次可以认定是其时的观测实录，有3次记载失误，襄二十年十月丙辰朔日食是据别国传闻，昭十七年六月甲戌朔日食乃九月晦癸酉日食之误。

这33次确实可靠的日食记录中(昭十七年九月癸酉日食计入)：

食分大于0.80者14次，为42.4%；

食分大于0.90者7次，为21.2%；

食分大于0.50者27次，为81.8%；

食分小于0.50者6次，仅占18.2%。

也就是说，《春秋》所书悉为三分以上的日食(仅僖十二年三月庚午日食食分为0.26，比三分略小)，绝大多数(81.8%)都是五分以上的大食。

自鲁隐公元年至哀公十九年247年中，曲阜可见的日食共98次。经载33次(昭十七年九月癸酉食计入)外，另有65次失记。《春秋》未载的65次日食中：

食分大于0.90者2次；

食分大于0.80者7次；

食分大于0.50者24次，小于0.50者41次；

食分大于0.30者29次，小于0.30者36次。

气象因素可能是《春秋》失载的主要原因。但由以上分析看出，78%的九分大食，67%的八分食，五分以上大食的53%，《春秋》皆有记载。而五分以下日食的87%，

特别是三分以下的小日食，除上述僖十二年三月庚午食分0.26这一次外，《春秋》皆未著录。说明其时比较注重大食分日食的发生。史官所书悉为较大的日食，三分以下的不记。

以上考查得出的32次观测实记日食中，有24次经书发生于其时历法的朔日。这与汉志、续汉志著录的两汉日食多发生在晦或晦前一日的情况明显不同。说明春秋鲁国的历法，朔实相当准确，月相基本合天。作者据春秋历日朔晦复原的春秋历谱，《春秋》未注朔日的另外8次日食实录，也都发生于鲁国历法的朔日。春秋鲁历岁首建正尚不完全固定，中后期虽基本建子，仍时有摆动，而朔望大致合天，比较精确。

第三节 《左传》历日和杜预《春秋长历》

《春秋》文义隐晦，记事简短，不易看懂。稍后的人对它做了注解。解经的书共有三种，通称"春秋三传"(《公羊传》、《谷梁传》、《左氏传》)。其中《左传》增加了大量史实来解说春秋，文字简洁生动，在文学史、史学史上都有很高的价值。《左传》中也记有大量历日干支和朔闰晦资料。它们中有一些与经文相同，但有许多是《春秋》中所没有的。尤其对考查历日制度非常重要的朔晦闰记载，比经文就多出二十余条。历代学者利用《春秋》、《左传》所记这些朔晦闰和历日干支，研究春秋历法，取得很大成功，恢复了接近其时历法真相的长历。这为后人阅读《春秋》、《左传》，研究先秦历史带来了极大的方便。

杜预根据《春秋》记载的393个、《左传》的386个历日干支及《春秋》34个有甲乙的日食，考校春秋历日，成《春秋长历》一书。因春秋历"数术绝火"，其前已有多位学者，各据其学，推算春秋历日。《春秋长历》书成，杜预用长历及古今各历以验春秋，得出，在研究春秋历法的诸儒中，刘歆所造的三统历，《春秋》34次有甲乙的日食中仅得一食，其术最疏。而自古以来，诸论春秋者多违谬，或造家术，或用黄帝以来诸历，以推经传朔日，皆不谐合。只有晋泰始历(即魏景初历)和依杜预历论由历算家李修、卜显撰成的乾度历较合。而杜预长历在春秋经传779个历日干支中有746个相合，34个有甲乙的日食中33个与长历一致。所失的33个历日中，杜预认为全是经误或传误。他的考查结果如下：

黄帝历得466日，1食；

颛顼历得509日，8食；

夏历得536日，14食；

真夏历得466日，1食；

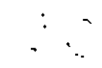
殷历得503日，13食；



周历得 506 日，13 食；
真周历得 485 日，1 食；
鲁历得 529 日，13 食；
三统历得 484 日，1 食；
乾象历得 495 日，7 食；
泰始历得 510 日，19 食；
乾度历得 538 日，19 食。
今长历得 746 日，33 食，失 33 日，经、传误。所失 4 食，3 无甲子。

不能否认，《春秋》、《左传》历日干支确有差错、失误、不相容之处。由以上考查看出，《春秋》、《左传》历日中有 95.8% 合杜预长历，不合者仅占 4.2%，从这个角度讲，《春秋长历》是相当成功的。杜预本人在批评其他学者研究春秋历法无异削人足度己迹时，谈了他认为应该遵循的方法。他说，春秋历法"虽数术绝灭，远寻经传微旨，大量可知，时之违谬，则经传有验。学者固当曲循经传月日、日食，以考晦朔，以推时验；而皆不然，各据其学，以推春秋，此无异于度己之迹，而欲削他人之足也"。

《春秋长历》是否就是春秋时期实行的历法呢？现在可以肯定地说，并非如此。杜预长历在历法上存在一些不足之处，但最主要的还不是这个问题。而是杜预把《春秋》、《左传》等量齐观了。汉晋时期，学者都认为《左传》是与孔子同时的鲁国史官左丘明撰写的。如《史记》就明确讲，"丘明因孔子史记具论其语，成《左氏春秋》"。斯时学者把《春秋》、《左传》视为表里，相得而成。由于时代限制，杜预没有认识到需要对《左传》的历日进行考查。而这一点恰恰成了《春秋长历》并非春秋鲁国实行历法的关键问题。清王韬对杜预及历代治春秋历诸家有全面评价，比较中肯。他在《春秋朔闰日至考·与湛约翰书》说：



> 自来治春秋历学者，如晋杜元凯之长历，唐僧一行之开元大衍历，我朝陈泗源（名厚耀，以算学闻）之春秋长历，顾震沧之朔闰表，姚文田之春秋经传朔闰表，皆其彰明较著者也。寂居海外，典籍无多，不足以资佐证。陈历韬未之见。杜历虽经散佚，而近已搜集于永乐大典中，辑为完书。其余则尚存什一于孔冲远正义、赵东山属辞中。韬但就所有者而参稽之。窃谓此数君子者，咸未能探求其故矣。大衍历虽循古术，而于经传多违戾。元凯、震沧未明历算，只就经传上下日月推排干支，遇有窒碍，则置闰以通之。委曲迁就，其弊得失参半。杜之弊在徇传，不以为传误而反谓经误。顾氏虽时能矫杜之失，而用心弥勤，差之愈远。须知不由推步则无从知其失闰。必先以今准古，而后古术之疏乃见，失闰之故可明。徐文定公曰，熔西人之巧算，入大统之型模。斯可以得春秋经传之日月矣。

王韬在这里明确指出了，杜预长历的缺点在于曲从《左传》，每遇窒碍，不以为传误，反说经误。并指出研究春秋历法，必先以今准古。用现代方法推步至朔，考校古历之密疏，方能得出正确的春秋经传历日。他的意见和方法都是很正确的。

《春秋》记载了393个历日干支，其中有4条朔晦，另有2次闰月。37次日食中，上节考查指出有32次为其时的观测记录。其中23次经文明书发生于斯时历法的朔日。这些历日朔闰，皆为鲁国史官所记，研究春秋鲁国历法，这些是最基本的材料。

《左传》记有386个历日干支，内19朔晦，另有8个闰月。《春秋》37日食中，27次无传。有传的10次内，9条注朔，8有朔日干支。386历日干支，多为《左传》所新增；27朔晦闰中，除文六年闰月外，皆为《左传》所特有。此外，《左传》中还记有两次日南至日期及许多关于岁星运行、位置、昏旦星象、分至启闭、星名星次、年中闰月等方面的天文历法资料。而它们在《春秋》经文中却都是没有的。这些新增的天文历法内容是不是《左传》作者收集的春秋史料中原有的；《左传》采用的史料涉及好多诸侯国，当时各国历法是否统一；《左传》特有的历日朔闰是不是鲁国的资料，如果不是，有没有经过作者的处理、换算，"追而正之"，等等。这几个问题是讨论春秋历法必须首先要搞清楚的。换句话说，研究春秋历法，搞清经、传历日的异同是很必要的。

第四节 《春秋》《左传》历日分析

一、《左传》杂采各国史册、经传历日常有参差

幽厉之后，平王东迁，周室微弱，陪臣执政，正朔不行于诸侯，列国各自颁历。《左传》作者所收集的史料来自各诸侯国。这可能是经传月日常有参差的主要原因。有的学者认为"晋用夏正"，经文所书晋事，往往与传相差两月。但细查经传，有差两月者，有差一月者，也有经传相同的。如僖十五年经言，"十有一月壬戌，晋侯及秦伯战于韩，获晋侯"，传书"九月""壬戌"，差两月。斯年鲁历建丑，则晋历似应建卯。成十八年经说，"正月，晋杀其大夫胥童"，传事在成十七年闰月乙卯晦，差一月。同年，经接下来记载的正月"庚申，晋弑其君州蒲"，又与传书晋弑厉公的日期相同。除晋国外，学者言齐、秦、楚与鲁建正也不相同。但诸国的史事月日也都存在类似情况。如经襄十九年"秋七月辛卯，齐侯环卒"，传作"夏五月壬辰晦"，差两个月，又迟一日。经文十四年书"九月甲申……齐公子商人弑其君舍"，传言"秋七月乙卯夜，齐商人杀舍"，差两个月，但七月无乙卯，传书月日有误。宣十年经云，"夏四月己巳，齐侯元卒"。传书"夏，齐惠公卒"。又为同月，如齐用夏正、殷正，则不当为"夏"。齐杀其大夫国佐，经书成十八年正月，传作正月甲申晦，所书齐事，经



传月皆相同。再如，楚昭王救陈死于军中，经传皆作哀公六年秋七月庚寅，月日相同。学者们认为鲁行周正，但周鲁月日也时有差异。如"王子猛（周悼王，景王子）卒"，经言昭二十二年冬十月，传书"十一月乙酉，王子猛卒"，相差一月。经传月日，多似上举数例，时异时同。且无规律可循。有的学者认为，"其经传相同者，则传追而正之也"。为何有时追而正之，有时又不行追改；何时追正，又何时传仍其旧，令人无所适从。另一方面，由以上数例及经传月日，似可看出，晋、齐、秦诸历建正迟于鲁历，但并非皆差两月。而鲁历岁首僖公以前多建丑，文公以后常建子，且时有摆动，因此也很难得出春秋晋、齐、秦皆用夏正（建寅）的确切结论。很可能与鲁历类似，春秋各国历法岁首的建正也处于稳定前的演变之中。

二、《左传》所载日食，说法矛盾多端

（一）襄二十七年日食辰不在申、未再失闰

《左传》说，襄二十七年十一月乙亥朔，日有食之。辰在申，司历过也，再失闰矣。意思是，这次日食发生在斗柄建申的月份（夏正七月，周正九月），其时鲁历已失二闰。

现代计算表明（表3—1），此食曲阜见食0.94，是一次呈现昼晦、不尽如勾的罕见食象。日食时太阳位于氐宿，黄经193°.3，为秋分后一月，斗柄建戌，而非建申。建申之月朔日丙子，不入食限。《左传》云"辰在申"，显非实记。

襄二十七年十一月乙亥朔，昭七年四月甲辰朔两次日食有传。它们相距10年零5个月，计129月或3809日。说明当时的历法这10年中设了4闰，是正常的置闰比率。而据《左传》，如襄二十七年日食时日食已失两闰，那么昭七年四月日食时应仍失两闰。根据计算可知，昭七年四月甲辰朔日食时太阳位于奎宿，黄经351°.2，为春分斗柄建卯之月，正合周正建子四月，并不失闰。也证传言"辰在申"、"再失闰"说法不准确。

（二）昭十七年六月朔并非甲戌，九月晦癸酉日食不当夏正四月

《春秋》37次日食中，传有记载者10次。桓十七年十月朔日食，传言"不书日，官失之也"。僖十五年五月日食，传谓"不书朔与日，官失之也"。庄二十五年六月辛未朔、庄三十年九月庚午朔、文十五年六月辛丑朔3次日食，经文皆书"鼓，用牲于社"。庄三十年日食无传，庄二十五年日食，传称"非常也"，文十五年日食传云"非礼也"。意思是说，日有食之，天子不举，伐鼓于社；诸侯应用币于社，伐鼓于朝。鲁公僭行天子之礼为非礼、非常之举。襄二十七年日食，《左传》主要指出鲁历"辰在申"、"再失闰"。昭七、二十一、二十四、三十一年4次日食，《左传》侧重记述了有关星占方面的内容。昭十七年六月甲戌朔日食，传文记载了是否应该伐鼓用币的

一段对话，是基于食月位当日过分而未至而发的。襄、昭6次日食，《左传》皆指明食时太阳的位置或所当之分至前后、斗柄指向。传文记下了许多天文历法方面的新资料、新内容，如斗建、分野、分至、星名等。但同时也可看出，《左传》选择这10次日食，是作者有感而发，并非实历或收集到新的史料。如，僖十五年五月不入食限，整个这一年也无曲阜可见的日食发生，为《春秋》误记。《左传》选中这一次，从经而误，已可说明问题。但，昭十七年六月甲戌朔日食更值得研究。《左传》是如此记载这次日食的：

> 夏，六月甲戌朔，日有食之。祝史请所用币，昭子曰："日有食之，天子不举，伐鼓于社；诸侯用币于社，伐鼓于朝，礼也。"平子御之曰："止也。唯正月朔，慝未作，日有食之，于是乎有伐鼓用币，礼也。其余则否。"太史曰："在此月也。日过分而未至，三辰有灾，于是乎百官降物，君不举，辟移时，乐奏鼓，祝用币，史用辞。故夏书曰：'辰不集于房，瞽奏鼓，啬夫驰，庶人走。'此月朔之谓也。当夏四月，是谓孟夏。"平子弗从。

这一段话在天文上的作用非常重要。目前大家说的最早的日食记录是仲康日食。而它最原始的出处，就是此《左传》所引夏书"辰不集于房，瞽奏鼓，啬夫驰，庶人走"这14个字。当然，句中未提"仲康"、"日食"。关于仲康日食文献记载的演变，不是本节的主题，此处只能从略。《左传》这里明确提到分至，用太阳位置日过分而未至作为纪月的依据。称日过分而未至之月为夏四月，辰、三辰、房之名称以及孟仲季的使用等也都是经文中所没有的。尽管如此，我们仍认为《左传》记载的这一段对话，从史实角度是极为可疑的。

首先要分辨，这段对话是在日食发生之前，还是以后进行的。根据传文，似应为日食发生之后。前已指出，昭十七年六月朔日虽合"日过分而未至"，当夏四月、孟夏之月，但既非甲戌，也不入食限，没有日食。这年鲁历九月晦癸酉入食限，曲阜可见八分大食，食时太阳黄经为141°.7，当夏至后二月，秋分前一月朔日。为日过至而未分（秋分），或可称孟秋之月，既非孟夏，又不合"日过分而未至"。所以昭十七年六月朔不会有这段对话。

其次，整个春秋时期，只有一次六月甲戌朔日食。它发生于隐公七年（前716）殷正六月，曲阜仅可见食分0.14。食时太阳黄经66°.8，为仲夏（含夏至之月）月朔。它既不是孟夏之月，又与昭公、季平子所处时代不合。《左传》所记季平子与太史的对话，当然也不会早到隐公时代。

由于六月无食，于是有的学者认为这是一次日食预报。对话是在六月朔日食之前，只是因为预报不准，日食未予应验而已。这种说法恐怕也很难成立。视春秋襄昭已识日食推算之法，根据不足，这且不谈。成襄以后日食皆发生于其时历法的



朔日(仅襄十五年经失书朔)。春秋鲁国已行推步历法,这是史实,学术界毫无疑议。斯时颁历就是颁朔。日食皆发生于朔日,说明鲁历步朔已相当准确。春秋历法是阴阳合历,回归年、朔望月长度不能为日整除,历年、历月只能取与此相近的整数。推步历法有其内在的规律,不是可以任意安排的。考《春秋》历日知,昭十七年六月鲁历丙子朔,不是甲戌。《左传》书昭十二年十月壬申朔,"原舆人逐绞,而立公子貀子"。由此得出《左传》昭十七年六月朔应为乙亥而不可能得甲戌。昭二十一年七月壬午朔日食有传。如昭十七年六月朔为甲戌,则昭二十一年七月朔不会是壬午,而是庚辰或辛巳。由此可知,鲁历所颁六月并非甲戌朔,它也与《左传》所记前后的历日抵触。六月无食。昭十七年癸酉日食既非夏正四月,又与"日过分而未至"的位置正好相反。平子与大史的对话又不可能早到隐公时代。不论是食前还是食后,昭公十七年都不可能有这段对话。只能理解为《左传》作者并未亲历,也没有收集到其他新材料,不识《春秋》误载,沿袭其误而空发的一段议论。

三、《左传》所记日至朔闰常与鲁历不合,并大多失天

《左传》解经增加了大量文字和史实。这有两种情况。一是《春秋》原有的,因记事简短,《左传》补充材料并详加解说;另一是《左传》新增了大量史实,而在《春秋经》原文中是没有的,即"无经之传"。《左传》新增的史实、材料,对于研究上古三代历史具有极高的价值,史家早有定论。下面仅对《左传》新加的日至、朔闰等历日、天文资料试作分析、讨论。

(一)《左传》两次日南至记载都与鲁历不侔

昭二十年(前522)《左传》记有"二月己丑日南至"及"六月晦丁巳"、"七月朔戊午"和"闰月"。既然二月初一为己丑,就不可能七月戊午朔(己丑为初二、初三就更不对了),除非二、三、四、五、六这5个月中有4个月连大。而对于平朔推步,这是绝不会出现的。这年后面有闰月,当然更不会有别的年中闰,故己丑也不会是二月晦。传书"六月丁巳晦"、"七月戊午朔",不会晦朔干支皆误。由此看出,《左传》新增二月己丑日南至纪事与传书同年历朔已互相抵牾,和春秋鲁国的历日就更不相侔了。如由昭二十年二月己丑日南至,则一定得不到二十一年七月壬午朔。而经书是月壬午朔日有食之。由前节考订,它是确实的观测实录。

同样,不难证明,《左传》僖公五年(前655)所记"正月辛亥朔日南至",与其前后的经载历日也很难相接。如:

经书"庄二十五年六月辛未朔"与传言"僖公五年正月辛亥朔";

传谓僖五年"正月辛亥朔"与经载僖五年"九月戊申朔"、僖十五年"十月庚辰朔"、僖二十二年"十一月己巳朔"及文十五年"六月辛丑朔"；等等。

可见，《左传》所记僖五年正月辛亥朔和昭二十年二月己丑两次日南至，恐怕皆非其时鲁国的观测实记。

(二)《春秋》书朔晦都较合天，《左传》新增多为先天

《春秋》37次日食中，32次为观测实记，内24次经书发生于其时历法的朔日。作者据《春秋》历朔复原鲁国历法得出，其余8次很可能也都当鲁历朔日，而只是《春秋》失书而已。

日食之外，经文还记载了4条朔晦干支。它们是：僖十五年九月己卯晦（十月庚辰朔）；僖十六年正月戊申朔；二十二年十一月己巳朔和成十六年六月甲午晦（七月乙未朔）。经计算校核，除僖二十二年十一月己巳朔历稍后天（实朔在戊辰日 21^h31^m）[①]外，皆与天相合。

因此，由经书日食、朔晦考知，鲁国历法月相基本合天，步朔相当准确。

《左传》新增朔晦干支19条。内有两个晦朔相连，故可得出完整独立的朔日17事。加上昭二十年二月己丑日南至，传虽未书朔，但由前分析可知，己丑只能为二月朔日。这样共得18朔日。18朔日中除僖、昭日南至外，所书都是周晋齐或其他诸侯国如郑宋卫吴的史事。要考查它们的合天情况，殊非易事。因为《左传》收集的他国史实，《春秋》未载或失书月日者，无法判断其历日是否经作者的追改。我们先以春秋鲁历的历月来考查，其中僖二十四年四月、襄二十七年六月、昭二十年七月历朔经传相差一月，干支不接。因学者称晋齐秦诸国行夏正，而《左传》朔月多先天。这三个历朔均由鲁历移后一月。由此得出，《左传》这18朔日中，10条先天一日，8条与天相合。

《左传》新增18朔日中，下列五例可以考查认定其与鲁历之间的关系。

①僖五年正月辛亥朔日南至。

②昭二十年二月己丑（朔）日南至。这两条"日南至"，经文未载，为《左传》所增，记鲁国之事，当用鲁历。

③僖五年传书"十二月丙子朔晋灭虢……执虞公"。经作"冬，晋人执虞公"。如晋用夏正、殷正，则经应记为六年春。由此可证，"十二月丙子朔"为鲁历。

④传谓襄十九年"夏五月壬辰晦，齐灵公卒，庄公即位。"经云"秋七月辛卯，齐环侯卒"。经书七月而传作五月，与鲁历相差两月。

---

① 本书中h、m、s分别表示时、分、秒。



⑤襄三十年传载“二月癸未，晋悼夫人食舆人之城杞者”。绛县老人称，臣生之岁，正月甲子朔，迄今已历444个甲子周期又20日。即“二月癸未”前26660天之甲子日。襄三十年二月癸未为公元前543年2月7日，儒略日为1523130。其前26660天为公元前616年2月11日甲子，儒略日1496471，当鲁文公十一年。《左传》这里所说的“正月甲子朔”，指斯年晋历建寅正月。因据《春秋》历日可知，文十一年鲁国正月建子，相差两月。

《左传》所记以上这五个历朔干支，其正月斗柄所建皆可考订。故可得出它们所对应的儒略历年月日期和儒略日数(JD)。用现代天文方法，计算与这五个朔日相应的实朔日期、干支、时刻。结果表明，除襄十九年五月壬辰晦(六月癸巳朔)与天相合外，《左传》所书其他4例并皆先天1日。

此外，传书文元年“五月辛酉朔，晋师围戚”。所云为晋历，还是鲁历不易判定。但，斯年不论周正、夏正五月实朔皆为壬戌。传谓“五月辛酉朔”，晋历也好，鲁历也罢，均先天1日。

以上《左传》所书6例朔日中，5例先天1日，1例与天相合。虽然它们仅占18历朔之1/3，但由此说明，《左传》所记晦朔，先天者占有一定比例。而经载观测实记的24次朔日日食全部合天，所书4朔晦干支，仅僖二十二年十一月己巳朔一例稍有后天，余皆与天相合。上述传书6例，经载4例朔日干支合天情况刊于表3—3。

表3—3 《春秋》《左传》所书朔日合天情况考查

朔日	实　朔(公元前)	合失天
《经》 僖十五年十月庚辰	645年9月27日 庚辰 0:47	合天
十六年正月戊申	645年12月24日 戊申 12:51	合天
廿二年十一月己巳	638年10月9日 戊辰 21:31	后天
成十六年七月乙未	575年6月7日 乙未 22:12	合天
《传》 僖五年正月辛亥	656年12月26日 壬子 19:26	先天1日
五年十二月丙子	655年11月16日 丁丑 2:40	先天1日
文元年五月辛酉	626年4月3日 壬戌 20:20	先天1日
	6月2日 壬戌 2:10	先天1日
文十一年正月甲子	616年2月12日 乙丑 7:13	先天1日
襄十九年六月癸巳	554年6月15日 癸巳 13:30	合天
昭二十年二月己丑	523年12月26日 庚寅 13:16	先天1日

在《左传》解说的日食中，昭十七年日食传书发生于“日过分而未至”的“夏四月”朔日甲戌，而是月实朔前525年4月25日乙亥，传先天1日。襄二十七年乙亥

日食，传言其月“辰在申”。斯年申月实朔丙子(公元前546年8月15日)，传也有1日先天。结合上考6例朔晦中，5例先天。可见，与《春秋》历日基本合天不同，《左传》历日总的说来是先天的。与《春秋经》不是一个系统。似不宜视作《左传》撰者收集鲁国史料中原有的，即新增的朔闰并非春秋鲁国的历日。

西汉太初历施行期间，《汉书·五行志》所记其时日食绝大多数发生于历法的晦日。可知是时历法后天约为1日。《汉书·律历志·世经》中刘歆用三统历推得，僖五年正月辛亥朔、十二月丙子朔、襄二十七年九月乙亥朔(因再失闰，传书十一月)、昭十七年六月甲戌朔、昭二十年正月己丑朔(失一闰、传言二月)，等等，都与《左传》说法完全相同。三统四分之法，300年朔差1日。公元前1世纪时三统历后天1日，那么用三统历推算600年前(前7世纪)的历日，一定会先天1日，这与《左传》所增历日先天情况基本相符。也就是说，《左传》历日的失天情况与汉志世经用三统历推得的大致相同。说明《左传》历日与周历、三统历有着某种关系。

四、文公元年闰三月子虚乌有

《左传》共记有9个闰月。它们是：僖七年，文元年、六年，成十七年，襄九年，昭二十年、二十二年，哀十五、二十四年。《春秋》止于哀公十六年(前479)“夏四月己丑，孔丘卒”。哀二十四年闰月已在经文纪事之外，暂不讨论它。

《春秋》纪事自隐公元年至哀公十六年244年较13章少3年。依19年7闰章法当设90闰。考《春秋》历日244年中，鲁历共设了89个闰月。较正常闰率少置1闰，岁首应前移1月。故春秋早期鲁历多建丑，后期多建子。这段时期中《左传》所记8个闰月不足鲁历实设的1/11。而经文仅记载2个闰月。文六年闰月经传同；哀五年经云“闰月，葬齐景公”，无传。《左传》8个闰月中，襄九年“闰月”，学者们认为可能是“门五日”(攻打了五日)之误。除文元年传书“闰三月”外，其余都仅记为“闰月”。其中，文六年，成十七年和昭二十二年，传文明确说明为年终闰月(闰十二月)；僖七年、哀十五年两闰月都在冬季失书月份的记事之后，似也应视作岁终之闰月。只有昭二十年的闰月，《左传》把它夹在八月和十月的纪事之中。按理当视为年中闰月。即，《左传》似有两个春秋历法年中闰月的证据。

《左传》记春秋历法时有失闰，如昭二十年二月己丑日南至，失一闰。甚者与天有差至二三月者，如襄二十七年戌月日食，传书“辰在申”、“再失闰”。哀十二年“冬十二月螽。季孙问诸仲尼。仲尼曰，丘闻之，火伏而后蛰者毕。今火犹西流，司历过也。”螽为蝗灾。多发生在夏秋之交。定哀时期，约当夏至小暑昏时大火南中，寒露后昏时下没。夏正孟秋、仲秋日没时，斗柄建西南的申酉方向，大火星现于西方天空。当左传所说的“火犹西流”。鲁历十二月斗柄建亥，为含今小雪中气的夏正



十月，仍蝗飞蔽空，落地如雨成灾，说明气象极为反常。《左传》于此，增季孙、孔子的一段问答对话，目的是指出，斯年鲁历又再失闰了。据《春秋》历日考查，与襄二十七年日食"辰在申"类似，《左传》所言并非鲁历事实。这个问题暂不讨论。以上数例说明，既然春秋历法时有失闰，岁首常有摆动，月名时节多有参差，那么有何必要，是时又依据什么办法来安排年中闰月呢？与《左传》所书文元年"闰三月"不同，昭二十年之闰未注明闰八月还是闰九月。这种体例不一，也很令人生疑。

昭二十年经文记载了四件事：夏，曹公孙会自鄸出奔宋；秋，盗杀卫侯之兄絷；冬十月，宋华亥、向宁、华定出奔陈；十有一月辛卯蔡侯庐卒。首尾两事无传。第三件事记宋国华氏、向氏之乱，第二件，卫国动乱，《左传》记述得都比较详细。昭公二十年，《左传》写了许多大事，诸如、二月己丑日南至；楚平王听信费无极谗言杀伍奢、伍尚，尚弟伍员奔吴；卫国动乱；宋国华、向之乱；齐景公患疫，晏子劝齐侯修养德行，于是，齐侯放宽政令，减轻赋税；郑子产病死，子太叔执政，等等。卫国动乱的一大段纪事，传虽书在宋国华、向之乱，"冬，十月，公杀华、向之质而攻之。戊辰，华、向奔陈，华登奔吴"之前。但有可能为避免头绪过多、文字凌乱，《左传》将卫国动乱前后有关的史实集中写到了一起。如此，闰月戊辰杀宣姜等事，就可在年终，而并非必定在闰八月了。襄十九年传追述郑公孙虿死事类此。

昭二十年闰月是不是年终闰，以上仅属分析和猜测。但，《左传》所记文公元年的闰三月，却可认定确系作者杜撰。理由是：

①文元年（前626）按鲁国历日，是年岁首建子，并不失闰，无须三月置闰。

②公元前7世纪不具备历术规范设置任意年中闰月的方法和依据（包括日影或昏旦星象观测）。文元年"闰三月"绝非《左传》收集的史料中原有的。

③僖公后期鲁历基本建子。文元年经书二月癸亥日食。食时太阳在危宿，黄经307°.8，已入寅月。还要再加个闰三月，就是说历法有意要将岁首调整为寅月。这样做，既与其前后诸年岁首抵牾，又与《春秋》僖、文历日不接。

实际上，闰三月之说完全是《左传》作者自己搞错了。据学者研究，《左传》作者并非春秋鲁君子左丘明，而是战国时人。成书约在公元前4世纪初年，上距鲁哀公末年约七八十年。他解说《春秋》，如今人手持长历阅读历史一样，我认为他很可能是手执周历来为《春秋》作传的。当然，作者并未实历春秋史实。《左传》可能收集有文元年"五月辛酉朔晋师围戚"，"六月戊戌取之"的史料。《左传》"皆不虚载经文"。而在《春秋》中有文元年二月癸亥日有食之的记载。由于时代限制，是时还没有推步日食的方法。作者根本不知道文公元年癸亥日食已入寅月。而根据周历，文元年癸亥是正月朔日，《春秋》记为二月显然鲁历失闰了。另一方面，日食在朔。二月癸亥日食，不论是二月朔还是二月晦，怎么样也得不到五月辛酉朔。只有加一

“闰三月”,既调正了失闰,又正好合周历五月辛酉朔。作者对周历深信不疑,于是就擅加了这个“闰三月”。岂知,这样一来,把岁首和历日完全搞乱了。因为实际上这次日食应为鲁历三月。经文误三为二。而五月辛酉朔先天一日,所记为晋事,并非鲁国历日。这些都是《左传》作者始料不及的。也可能《左传》作者并非一人,成书也不是一时。这些天文、历法内容是别的作者加进去的。当然也不能排除,在《左传》刻写、承授过程中,其他熟悉天文历数的学者依据周历或自己的认识、理解,增益或擅改有关天象和历法方面内容的可能性。

五、《左传》有用周历解说《春秋》的痕迹

《左传》18 万字。除前述 386 历日干支、8 闰月、19 朔晦日期外,还记载了许多日月岁星的位置和昏旦星象等天文历数内容。它们对于了解春秋战国天文历法的发展极为有用。古今两千年来,不少人对它们做过考查,但总的说来,还是有很多问题值得深究。

《左传》有关历数的记述似都为用周历解经而作。

①僖公五年春王正月辛亥朔日南至。公既视朔,遂登观台以望,而书,礼也。凡分至启闭,必书云物,为备故也。

这可能是分至启闭八节最早的记载。

僖公五年(前 655)入周历壬子蔀 58 年,为第 4 章章首。斯年天正冬至月辛亥朔,小余 235;辛亥冬至,小余 8,朔旦冬至相齐,起于卯时。《左传》这条至朔是根据周历注记的,并不合天象。笔者用比较严格的现代天文方法计算,得出实朔为壬子日戌时,儒略历为公元前 656 年 12 月 26 日。冬至为公元前 656 年 12 月 27 日癸丑,亥时。至朔相差 1 日,均不为辛亥。《左传》所书冬至差 2 日,合朔失 1 日,皆为先天。

②僖公五年八月甲午,晋侯围上阳。问于卜偃曰,吾其济乎?对曰,克之。公曰,何时?对曰,童谣云丙子晨龙尾伏辰;均服振振,取虢之旂。鹑之贲贲,天策焞焞,火中成军,虢公其奔。其九月十月之交乎!丙子旦,日在尾,月在策,鹑火中,必是时也。

冬十二月丙子朔,晋灭虢。

传文中,龙尾、尾、天策、鹑火等为星名,辰、中、伏等是天文现象。鹑火为十二星次之一,含柳星张三宿,为南宫朱鸟七宿之中。龙指东宫苍龙,龙尾为尾箕宿。天策即傅说星,今天蝎座 G 星。辰,日月相会、合朔;伏,星距日很近,光为日所掩;中,南中,过子午线。

僖五年入周历壬子蔀 58 年,十二月丙子朔,小余 84。《左传》所记合周历,但不与天象合。实朔为丁丑日丑时,公元前 655 年 11 月 16 日。合朔时日月在尾 7°.7,巳时月在策。但朔月是看不到的。旦时(日出前二刻半)鹑火基本已过南天子午



线。鹑尾次开始中天。传书丙子朔先天1日。丙子旦实际天象:日在尾7°,月在心。整个丙子日月在心尾,而不在箕。旦中星象则与丁丑相仿。

③文公元年闰三月。

这是最早的年中闰月记载。前面已说,此为《左传》作者据周历杜撰。文元年(前626)入周历辛卯蔀11年,天正癸亥朔,小余277;冬至癸未日,小余16,闰余13,当年终置闰,如按无中气之月为闰月,应闰十一月。

④襄二十七年十一月乙亥朔日食,辰在申,再失闰。昭十七年夏六月甲戌朔日有食之。

这两次日食《左传》的说法都不正确,前面已经讨论过。这里想着重指出,《左传》之所以选中这两次日食,只是由于它们的历日合周历。襄二十七年(前546)入周历庚午蔀15年。这一年周正九月适值乙亥朔,小余79,为秋分前1月、斗柄建申。前已指出,此为前546年10月13日之日全食。食时太阳在氐宿,黄经193°.3,斗柄建戌,并非申月。申酉之月皆不入限,无食。《左传》作者深信周历不疑,故加上了辰在申,再失闰一段议论。昭十七年六月朔日食是否应该救日的记述,情况也是如此。《春秋》的这次日食记载的月日有误。正因如此,对于分析《左传》天文、历法材料的真伪、成书年代和作者才更加珍贵。《左传》作者当然不知六月甲戌并无日食发生。在春秋37日食中,只有两次符合周历。一为宣十七年六月癸卯,一为昭十七年六月甲戌朔日食。《春秋》日食仅有几次日期失误,偏偏这两次都在其中。《左传》没有选取宣十七年日食,可能因为它失书朔日。昭十七年(前525)周历入庚午蔀36年。周正六月甲戌朔,小余923。是年闰余17,年终当闰。按无中置闰,应闰三月。

这两次日食都是很典型的例子,可充分证明《左传》作者持周历解经。季平子与太史的对话以及辰在申等都是据周历而主观加进去的。

⑤襄三十年二月癸未,晋悼夫人食舆人之城杞者。绛县人或年长矣,无子而往,与于食。有与疑年,使之年。曰,臣小人也,不知纪年。臣生之岁正月甲子朔,四百有四十五甲子矣,其季于今三之一也。吏走问诸朝。师旷曰,鲁叔仲惠伯会郤成子于承匡之岁也。

由经传纪事考知,绛县老人生当文十一年(前616)。是岁入周历辛卯蔀21年,天正朔乙丑,小余113;地正甲午朔,小余612;人正(寅正)甲子朔,小余171。《左传》作者以周历得出周正三月、寅正正月甲子朔,与绛县老人说合。并认为晋用夏正。

⑥昭公二十年春二月己丑日南至。梓慎(鲁之日官)望氛……

此为《左传》记述的第二个日南至日期,也是据周历得出的。昭二十年(前522)入周历庚午蔀39年,为第3章章首。天正正月己丑朔,小余470;冬至己丑,小

余16，己丑冬至合朔午时齐同，加时正南。按周历章蔀首之年闰余为0，不闰。其前一年当闰。或置年终，或依无中置闰，则当闰十一月。据经传历日，昭十九年无闰。传昭二十年有闰，十九年无闰。故据周历，章首失闰一月，记作二十年二月（朔）己丑日南至。

六、《左传》所书岁星位置均非其时实记

有关岁星运动的记载为《春秋》所无，完全是《左传》新增的。所述史实也多为无经之传，其中，直书岁星位置者6次，间接记述的5条。下面是关于岁星位置的简要记述：

①襄二十八年传言，据梓慎推算，是年（前545）岁星应舍星纪，而观测所见，实在玄枵。

②襄三十年传追述十九年（前554）子蟜死后将葬之时，岁在降娄次。裨灶预言伯有活不到岁星再到这个位次的日子了。襄三十年（前543）秋七月，伯有被杀。木星位在娵訾之口，明年才到降娄，证实了裨灶的预言。

③昭公八年（前534）传说，九月楚围陈，十一月壬午，灭陈。史赵答复晋侯所问谓，陈国是颛顼的后代。颛顼崩于岁在鹑火之年，故当卒亡于斯年。而今岁星在箕斗之间的汉津星次中，陈还会复兴。

④昭九年（前533）传记载，夏四月陈地火灾。郑裨灶说，五年陈将复封，封五十二年后被灭亡。即封后岁五及鹑火之年终于灭亡，此乃天道。据《左传》记载，陈复封于鲁昭公十三年（前529）。昭八年冬十一月楚灭陈至复封历5年。陈最终灭亡于哀公十七年（前478）秋七月己卯，距复封52年。岁五及鹑火为49年，故复封在大梁岁。则昭九年为岁在星纪之年。

⑤昭十年（前532）传载，春王正月有星出于婺女。郑裨灶与子产讲，七月戊子，晋君将死。现在岁星在颛顼之虚（玄枵次）。姜氏、任氏保有这里的土地。女宿正当玄枵首位，而有妖星，预告灾祸将归邑姜。邑姜是晋侯的先妣。

⑥昭十一年（前531）传书，周景王问苌弘，今岁诸侯中谁吉谁凶。苌弘答，蔡国不吉利，襄三十年（前543）蔡世子般杀其君岁在娵訾，至今十三载，岁复在豕韦。不会过去此年了，楚将据有蔡国，然而这是积累邪恶。等岁星到达大梁，蔡将复国；楚又招凶，此乃天之常道。

⑦昭三十二年传言，夏，吴伐越。史墨说，不用四十年，越将占有吴国，越得岁而吴伐之，必受其凶。

史墨但云“越得岁”，未言岁在何次。按《周礼·春官·保章氏》郑注，星纪，吴越也。吴越既同属一次，何以此云“越得岁”而吴“必受其凶”？有的学者认为，是岁



(前 510)果在星纪，则哀公十七年(前 478)陈卒亡当在鹑尾，而不在鹑火。是知越得岁乃指岁在析木。盖析木本越分，分野称"析木，燕也"，为后人所易。

经笔者计算考验，《左传》所书岁星位置与天象全不相符，皆非其时观测实录。《汉书·律历志·世经》中，刘歆 4 次引用《左传》的岁星记载论证三统历的合天。笔者以岁术、纪术推步，岁次虽多与三统历相合，但仍有参差。如哀十七年传作鹑火次，而三统历得鹑尾；襄二十八年，岁在星纪而淫于玄枵，当作失次已进入玄枵，而三统仍作星纪(计算证明玄枵失天更远)。考查结果列于表 3－4。

表 3－4 《左传》岁星纪事失天情况

左传	纪事	三统	失天	西汉	失天	先秦	失天	木星真实位置(°)		三统历	岁术推步
年代(公元前)	岁在	十二次(°)	度(°)次	十二次(°)	度(°)次	十二次(°)	度(°)次				世经
襄十九(554)	(降娄)	0	74 2.47	奎娄 359.5	73.5 2.45	壁奎 345.5	59.5 1.98	273～299	286 女虚	降娄 24	胃初
廿八(545)	星纪〔玄枵〕	270	62 2.07	斗牛 260.5	52.5 1.75	箕斗 252.5	44.5 1.48	192～225	208 氐房心	星纪 26	女 4
卅(543)	娵訾	330	66.5 2.22	室壁 332.5	69 2.3	危室 316	52.5 1.75	250～277	263.5 斗	娵訾 27	壁 9
卅一(542)	(降娄)	0	68 2.27	奎娄 359.5	67.5 2.25	壁奎 346	54 1.80	279～305	292 牛女虚危	降娄 27	胃 3
昭八(534)	析木	240	56 1.87	尾箕 233	49 1.63	房心尾 222	38 1.27	166～202	184 轸角亢氐	析木 28.5	斗 9
九(533)	(星纪)	270	57 1.90	斗牛 261	48 1.60	箕斗 252.5	39.5 1.32	197～229	213 氐房心尾	星纪 29	女 6
十(532)	玄枵	300	58 1.93	女虚危 297	55 1.83	牛女虚 283.5	41.5 1.38	229～255	242 尾箕	玄枵 29	危 14
十一(531)	豕韦	330	62 2.07	室壁 332.5	64.5 2.15	危室 316	48 1.60	255～281	268 斗牛	娵訾 29	奎 2
十三(529)	(大梁)	30	63.5 2.12	胃昴毕 29.5	63 2.10	娄胃昴 16	49.5 1.65	309～344	326.5 危室壁	大梁 29.5	毕 11
卅二(510)	析木	240	47.5 1.58	尾箕 233	40.5 1.35	房心尾 222	29.5 0.98	175～210	192.5 角亢氐	星纪 3.5	斗 15
	星纪	270	77.5 2.58	斗牛 261	68.5 2.28	箕斗 252.5	60 2.00				
哀十七(478)	(鹑火)	120	35 1.17	柳星张 117.5	32.5 1.08	鬼柳里 106	21 0.70	64～106	85 井鬼柳	鹑尾 10	翼 9

刘歆认为昭三十二年(前510)"越得岁"为星纪之年。上距僖公五年(前655)145年。僖五年春,骊姬诬陷两位公子都参预了太子的阴谋,于是重耳逃亡到蒲城,夷吾奔屈。晋侯杀其世子申生后,派遣寺人披攻打蒲城。于是重耳逃亡到了翟国。《国语》记载,是年岁在大火。145年后,昭公三十二年(前510),按岁星12岁行天1周计,当岁在析木。传书"越得岁",刘歆视作岁在星纪,其前一年为析木,这可能就是刘歆据《春秋》内外传得出每144年岁星超辰一次的依据。昭三十二年岁在星纪,则其前35年的襄二十八年(前545)应在玄枵,这与《左传》相符。但如此,其后32年的哀十七年当为鹑尾,而传书鹑火。另一方面襄二十八年岁在玄枵又与传言襄三十年岁在娵訾之口,昭八年析木之津、十年玄枵抵牾。

将襄二十八年"岁在星纪而淫于玄枵"和昭三十二年"越得岁"暂时搁置,那么《国语》所书僖公时代的6条岁星位置和《左传》记载9条岁星所在皆合12岁行天1周的规律。"越得岁"如指析木,则也与此相合。可以这样说,《左传》、《国语》关于岁星位置的记述,全与天不合,并非实录,而是作者依据12岁行天1周推算得出的。因而与三统历岁术推步也并不完全一致。木星的真实恒星周期为11.8622年或4332.59天,约86年就要超辰1次。由表3-4考查得出的《左传》岁星位置失天度数和失次情况可以看出,这些位置大概是作者按照公元前4世纪前期岁星实测位置逆推得到的。襄二十八年"岁在星纪而淫于玄枵",可能是作者根据对岁星运动有顺逆、疾徐、盈缩的认识加进去的。与岁星平均运动速度较12年周期为大,而有规律的超辰运动并无关系。

第五节　春秋鲁国历法

一、王韬的《春秋长历》

《左传》所书386历日干支,多为新增,有的与经同记一事而月日不同。如襄十九年《经》谓,"秋七月辛卯,齐侯环卒";《传》书,"夏,五月壬辰晦,齐灵公卒,庄公即位"。《左传》杂采各国史策,收集的史料来自各诸侯国。幽厉以后,列国自行颁历。经传月日参差,可能是各国历数、建正不一所致。有些历日已经作者追改,而有的仍行其旧。哪些经追正,何者未改易,传文未予说明,令人不易揣度。再者春秋数术散乱、绝灭,《左传》乃战国时成书,作者追改的方法和依据是否准确可靠也值得深究。另一方面,《左传》中有些鲁国历日、历数,为作者擅增或妄改。上节已指出,《左传》新增的朔晦多先天,并有执周历解说《春秋》的迹象。《左传》历日与春秋鲁历有异,不能视作收集增补的鲁历原始资料。因此,这一节讨论春秋鲁国的历日制度就撇开《左传》,主要根



据《春秋》的记载。

说到春秋历法，就必须谈谈清末学者王韬的工作。学者们对他的评价极为精当。古今数十位研究春秋历法的学人中，唯有他的《春秋长历》最为近真。在春秋历法研究上有更大发现或排出与王韬有较多差异且尤为真实的长历者，至今未见，估计今后也很难会有。当然，这并不是说，王韬的春秋历学研究没有瑕疵，或者长历毫无疏失的地方了。不足之处主要有以下几点：

(一)《春秋朔闰日至考》、《春秋朔闰表》存在不一致的地方

《考》、《表》之间，一些朔日干支、闰年、闰月位置有参差。如，隐公八年，《表》列岁首建丑，正月庚午朔；而《考》作建寅，正月庚子朔。冬至在七年十二月庚子，有岁终闰月。《考》作建寅是对的。《表》书"上年闰十二月三十日庚子冬至"误。初步统计，《考》、《表》不一之处有：岁首建正 2，闰年 1，闰月 7，正朔干支 4，其他各月朔日不同者未计。《春秋朔闰日至考》、《春秋朔闰表》是王韬春秋历学研究、春秋长历的主体部分，某些历日有异，读者使用起来就会产生困惑。

(二)日至推算和岁首建正稍有疏失

王韬认为，僖公五年、昭公二十年的正朔日南至，当以实法考求，决定步算之误。不可先执成见，舍法以从传也。然韬之实法考求，于天仍有违失。王韬及所引江永、梅文鼎采用历象考成、授时历计算日躔和定朔的具体推步方法，本书在后面有关章节中将详细介绍。授时历推僖公五年正月辛亥朔 14 刻冬至，合传；而昭公二十年冬至不为己丑，却是戊子日 83 刻。较《左传》更先天 1 日。王韬据江永依历象考成推求，得僖五年平冬至乙卯巳正初刻 8 分；加均 1°8′①，化时减平冬至，则定气在甲寅日卯时。若是时小轮并径加大，其加均或能至 1°20′～30′，变时得定冬至亦止癸丑日亥子之间。皆距辛亥二三日。又算此月平朔、定朔皆在壬子，知传亦失天 1 日。昭二十年平冬至壬辰日申初初刻 11 分；约计加均及小轮均差的减时，定冬至当辛卯日卯辰之间，传书己丑，实失天 2～3 日。笔者用现代天文根数推得僖公五年冬至在癸亥日亥时（前 656 年 12 月 27 日癸丑 21 时 41 分，儒略日 1482180）。合朔为壬子日戌时（前 656 年 12 月 26 日壬子 19 时 26 分，儒略日 1482179）；昭二十年冬至为辛卯日卯时（前 523 年 12 月 27 日辛卯 5 时 29 分，1530758），合朔庚寅日未初（前 523 年 12 月 26 日庚寅 13 时 16 分，1530757）。可见江永按历象考成加均及小轮均差的改正，推得结果与天十分密近。王韬按历象

① 本书 360 度制的度分秒一律以"°""′""″"标注。凡记作"度"、"分"、"秒"者，皆为中国历度。特殊情况会另加注明。

考成加均，而未计小轮并径加大的修正。《朔闰日至考》推出的日至常有出人。经笔者计算考校，王韬列出的245年冬至日期中有163年后天1日。由此，他得到的春秋长历岁首建正中。下列8年差失1月：

庄九年岁首应建丑，而《表》、《考》作建子；

庄二十八年应建丑，《表》、《考》建子；

僖十二年当建丑，《表》、《考》建子；

成元年当建子，《表》、《考》作建亥；

襄公二年《表》、《考》建子，实当建丑；

襄二十一年《表》、《考》建亥，实应建子；

昭九年《表》、《考》建子，实当建丑；

定十五年《表》、《考》作建子，实当建丑。

(三)王韬春秋长历有些朔日干支曾作人为调整

先秦汉魏推步历法采用平朔，月有大小，小月29日，大月30日，大小月相间。每隔13或15月，偶尔17个月有1次连大月，因所取朔策长度而异。这种两个大月相连的情况，通常在100个月中出现6次、间或为7次。但不会两月连小，也不能出现3或4个月连续大月。这是平朔推步的内在规律。

在《春秋朔闰日至考》中，文公元年的历朔是这样的：

正月小甲子朔，二月大癸巳朔，三月小癸亥朔，四月小壬辰朔，五月大辛酉朔，六月大壬辰朔，七月小壬戌朔，八月大辛卯朔，九月小辛酉朔，十月大庚寅朔，十一月小庚申朔，十二月大己丑朔，闰十二月小己未朔。

这里三、四两月连小，已不符平朔推步规范。五月辛酉朔、六月壬辰朔，势必五月长31天，更为阴阳历法所未见。曾次亮先生认为这可能是作者的疏忽，而将六、七月朔日改为其前1日，即六月大辛卯朔，七月大辛酉朔，如此，则五、六、七、八4月连大。前已说过，在未行定朔的先秦汉魏时期，这种情况断无可能。

成十七年，《朔闰日至考》是这样安排的：

正月小癸巳朔，二月大壬戌朔，三月小壬辰朔，四月大辛酉朔，五月小辛卯朔，六月大庚申朔，七月大庚寅朔，八月小庚申朔，九月大己丑朔，十月小己未朔，十一月小戊子朔，十二月大丁巳朔，闰十二月小丁亥朔。

此年十、十一两月连小，与文公元年类似，平朔步历是不会发生的。这两个例子说明，王韬长历有些地方并非推步得出而是人为安排的。

在《春秋朔闰表》中，王韬对这两种历日做了如表3－5所示的平滑处理。



表 3—5　《朔闰表》文公初年、成公末年历朔安排

公	年	正月朔	二月朔	三月朔	四月朔	五月朔	六月朔	七月朔	八月朔	九月朔	十月朔	十一月朔	十二月朔	闰月朔
文	元年	甲子	甲午	癸亥	癸巳	癸亥	壬辰	壬戌	辛卯	辛酉	庚寅	庚申	己丑	己未
	二年	戊子	戊午	丁亥	丁巳	丙戌	丙辰	丙戌	乙卯	乙酉	甲寅	甲申	癸丑	
	三年	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑
成	十七年	癸巳	壬戌	壬辰	辛酉	辛卯	庚申	庚寅	庚申	己丑	己未	戊子	戊午	丁亥
	十八年	丁巳	丙戌	丙辰	乙酉	乙卯	甲申	甲寅	癸未	癸丑	壬午	壬子	壬午	

如此处理，虽然避免了平朔推步可能出现的两小月相连及数月连大；但却使僖三十、三十一两年 23 月皆小大月相间，在僖三十二、三十三至文公元年间连续 25 月不得两大月相连，而文公二、三年两次连大却仅相距 5 个月。对于推步制定、比较合天的春秋历法，这种情况，同样也是断无可能的。连续 23、25 个月大小月相间，说明其时历法朔策小于 29.52 日；两次大月相连其间仅距 5 月，只有在朔望月长度大于 29.55555 日的历法中才会出现。合天的朔望月平均长为 29.53059 日。29.5200 或 29.5556 日皆失天较多，采用这样朔策的历法行用十余年，甚至几年，历日与月相就有差失。前面说过，春秋鲁历比较合天，步朔相当准确，绝不会采用如此粗疏的朔策。推步历法也不会如此频繁改历。再如，为安排宣公七年六月朔日合经癸卯，有意将宣五、宣六的两次连大缩短，使其间仅距 11 月；而又加长宣七、宣八前后连大月间隔为 19 个月。王韬批评杜预、顾震沧未明历算，只就经传上下月日推排干支，遇有窒碍，则置闰以通之，委曲迁就。诸历家因先人《传》说，也常常错误地违法以迁就，曲法以求合。由上举数例看出，王韬自己在遇到个别历日窒碍之处，似也有偏离步法、人为委曲迁就的情况。

王韬强调，"须知不出推步则无从知其失闰，必先以今准古，而后古术之疏乃见，失闰之故可明"。以今准古方法无疑是正确的。他生当 19 世纪中叶，推步日躔采用《历象考成》的方法，得出的春秋日至多后天 1 日。因而长历中岁首建正略有出入。这是时代的限制。《春秋朔闰日至考》、《春秋朔闰表》有些闰年、闰月、朔日干支不尽一致，个别地方也稍有"违法迁就、曲法求合"的情况。说明有些历日安排，王韬还在推敲，尚未最后认定，长历以及春秋历法研究不是最终结果，属未定稿。因此，本节对春秋历法的讨论，只可以说是在学习王韬长历基础上的一点心得和对未定稿的稍许

补充。除闰月的处理上稍有差异外，推步得出的历谱与王韬更是大同小异。

二、春秋鲁国的历朔推步

春秋时期，由观象授时发展到先期推步制定历法的阶段还为时不久，尚未形成如古六历、三统、四分等完整统一的年月日朔闰气的严格推步体系。是时日至测量不够准确、闰月设置尚欠规整，因此相应的岁首建正并非十分固定。历法推步的主要功能是预告朔日，根据测景、观星或历日安排需要随时在年终加一闰月以调正四时。只要所采用的朔策与平均朔望月长度相近，这种历法就可以适用一个相当长的时期。

现在讨论，是否能找到一种历法，它比较合天，而可全部符合《春秋》的朔闰，又与它所记载的393历月干支基本相容。也就是说，我们拟依据《春秋》的历日朔闰，对春秋鲁国实际行用的历法试做复原研究。

《春秋》是2500年前鲁国的历史。经过多年的传抄、变乱，散简、脱漏、错讹是难免的。《春秋》历日中肯定有些是不对的。如在《春秋》日食考中提到的宣公八年七月甲子日食，七为十之误；宣十七年六月癸卯日食，当作宣公七年六月癸卯，“十”字衍；襄公十五年八月丁巳日食，“七”误作“八”；等等。在《春秋》历日中，有时在一个月名下，书写的两个史日，其间相距大于30日，显然此中必有一误或后者失记月份；有的相距虽不足30日，但与朔日安排有矛盾，或分居其前后，情况也是如此。如，桓五年“正月己丑……甲戌”，僖二十七年“秋八月乙未……乙巳”，等等。有的历日即便用年中闰也无法解释或其年根本无法安排年中闰月。如，桓十七年正月有丙辰，二月丙午，五月丙午，六月丁丑，八月癸巳，十月朔(庚午)日食经考查系观测实录，则正月、二月历日中必有误记。

以上几例错误比较明显，类似情况，不会影响对春秋历法的复原。但另有一些历日，是否经载有误不易判定，它们共计约有十余条，占《春秋》历日记载不足5%。但它们的是与否，与鲁历的复原密切相关。例如下列历日是干支、月名错误还是年中有闰，很难判别：

僖元年七月戊辰，十月壬午，十二月丁巳；

僖三十三年四月辛巳，癸巳，十二月乙巳；

文十二年二月庚子，十二月戊午；

文十三年五月壬子，十二月己丑；

昭二十二年四月乙丑，十二月癸酉朔日食；等等。

再如，成九年七月丙午、哀三年四月甲午等约十条历日，近于晦朔，月名干支是否有误，也很难确认。

对于上述十余条无法判定是干支、月名错误还是年中有闰的历日，王韬长历中



皆置年中闰月予以处理。由于考虑到春秋时期尚无闰余及二十四节气，缺乏年中设闰的天文依据，所以我们复原的春秋历法中，上述历日悉按月日有误对待。如果要寻找相异之处，这可能就是我们与王韬长历间的最大不同。

下面依据鲁国史官实记的27条朔日（表3—6）来复原春秋鲁国的历法。这里面包括经考查验证确系观测实记的32次日食中经书明发生于时历朔日者23个及经载僖成时期的4个晦朔。

表3—6　考查认定鲁国史官实记的27个朔日

鲁历朔日	儒历（前）	鲁历朔日	儒历（前）	鲁历朔日	儒历（前）
桓三年七月壬辰朔	709.7.17	成十六年六月丙寅朔	575.5.9	昭十五年六月丁巳朔	527.4.18
庄廿五年六月辛未朔	669.5.27	成十六年七月乙未朔	575.6.7	昭廿一年七月壬午朔	521.6.10
庄廿六年十二月癸亥朔	668.11.10	成十七年十二月丁巳朔	574.10.22	昭廿二年十二月癸酉朔	520.11.23
庄三十年九月庚午朔	664.8.28	襄十四年二月乙未朔	559.1.14	昭廿四年五月乙未朔	518.4.9
僖五年九月戊申朔	655.8.19	襄廿一年九月庚戌朔	552.8.20	昭卅一年十二月辛亥朔	511.11.14
僖十五年十月庚辰朔	645.9.27	襄廿三年二月癸酉朔	550.1.5	定五年三月辛亥朔	505.2.16
僖十六年正月戊申朔	645.12.24	襄廿四年七月甲子朔	549.6.19	定十二年十一月丙寅朔	498.9.22
僖廿二年十一月己巳朔	638.10.10	襄廿七年十二月乙亥朔	546.10.13	定十五年八月庚辰朔	495.7.22
文十五年六月辛丑朔	612.4.28	昭七年四月甲辰朔	535.3.18	哀十四年五月庚申朔	481.4.19

（一）鲁国历法不是四分术

四分法朔策为29.530851日。襄二十三年二月朔癸酉日食，为鲁国史官观测实录。如果其时历术是四分法，那么定十二年十一月朔日（相距652月）应为丁卯。只有其时历法的朔策小于29.530675日，才能得到十一月丙寅朔。而定公十二年日食确是发生于十一月丙寅朔并为《春秋》记载下来。说明春秋鲁历朔策比三统、四分为小。

春秋前半期的情况也是如此。庄二十六年十二月癸亥朔、文十五年六月辛丑朔、襄二十一年九月庚戌朔三次日食。皆为鲁史观测记录。如果斯时鲁用四分术，那么庄二十六年十二月癸亥朔后116年（1432月）的襄公二十一年九月，文十五年六月辛丑朔后的60年（746月）的襄二十一年九月都一定会是辛亥朔。而庚戌朔为史官实记，并为前节《日食考》所证实。以上三例均说明春秋鲁历不是四分术，它

的朔策较四分为小。这方面的例证还很多,就不一一例举了。

(二)春秋鲁历朔策在 29.5306703 至 29.5306755 日之间

不难推出,当朔策在 29.5306703 与 29.5306755 日之间时,表 3—6 中所列《春秋》实录的这 27 个朔日干支可同时得到满足。这就是说,可以找到这样一种历法,它完全符合《春秋》实记的朔日,又与绝大多数历日干支相容。这就是我们复原得到的春秋鲁国历法。这种历术的朔策比四分法精确。由殷墟卜辞、周原甲骨知,殷商时期我国就注重月相观测。西周,月相更是历法的重要成分,并为纪月中日序的主要形式。经过数百年的观测实践,到了春秋对月相的盈亏圆缺的会合周期有了更深刻的认识,得出较精确的平均朔望长度,是完全可以理解的。

(三)春秋鲁历步朔

用复原的春秋鲁历计算平朔,可行的方法很多,结果相差无几。这里介绍一种近于六历的推步术。其术法数如下:

蔀年　83　蔀月　1027　蔀日　30328

元=15 蔀=1245 年=15405 月=454920 日

朔策=蔀日/蔀月=30328/1027=29+545/1027=29.53067186 日

蔀名:

1 癸酉	2 辛丑	3 己巳	4 丁酉	5 乙丑
6 癸巳	7 辛酉	8 己丑	9 丁巳	10 乙酉
11 癸丑	12 辛巳	13 己酉	14 丁丑	15 乙巳

隐公元年入己酉蔀 78 年,隐七年为丁酉蔀首,僖二十七年是乙巳蔀首。襄公二十三年为元首入癸酉蔀第 1 年。蔀名为该蔀首日的日名干支,即入蔀第 1 年第 1 月合朔之日,小余为 0。加大余 29,小余 545,即加 $29\frac{545}{1027}$日,得次月朔日大小余。递加朔策,小余满蔀月 1027,进位成大余。这样可得一蔀内各月朔积日(大余)和小余。古历计算不用十进制小数,日的奇零用分数来表示。日的整数部分称作大余,小余是日的分数部分分子的数值。因为春秋鲁历置闰尚不规范,蔀内每年岁首位置并非固定。推步各年正月朔日需自蔀首之月计数相距月数(积月),以朔策$29\frac{545}{1027}$乘之。小余满 1027 进为大余。大余以干支周期 60 去之,不尽,余数以蔀名命之,算外,即自蔀名干支计数,蔀名不计入,得所求年正月朔日干支和小余。可以下式表示:

所求年正月朔日大、小余=$[积月\times朔策/60]_R$

次月朔大小余=正朔大小余+$29\frac{545}{1027}$



累加朔策(29＋545/1027)得各月朔。R 为求余计算，即求方括号内算式的余数。本书以后经常使用此符号。

用复原的春秋鲁历推得的各年正朔干支、小余、对应的儒略历日期和建正、冬至，刊于表 3—7，同时列出王韬长历《朔闰日至考》各年正朔、冬至、建正和闰月，以资比较。

表 3—7　春秋鲁历冬至、正朔大小余、岁首建正表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
隐　元	丑辛巳	722.1.16	十二、十二癸亥	丑辛巳 268	723.12.28 壬戌
二	丑丙子闰	721.1.6	十二、廿三戊辰	丑己亥 646	722.12.28 丁卯
三	丑庚子	720.1.24	闰十二、四癸酉	丑己亥 542	721.12.28 癸酉
四	丑甲午	719.1.13	十二、十六己卯	丑癸巳 920	720.12.28 戊寅
五	丑戊子闰	718.1.2	十二、廿六甲申	丑戊子 271	719.12.28 癸未
六	丑壬子	717.1.21	闰十二、七己丑	丑壬子 167	718.12.28 戊子
七	丑丁未闰	716.1.10	十二、十八甲午	丑丙午 545	717.12.28 甲午
八	寅庚午	715.1.28	十二、三十庚子	寅庚午 441	716.12.28 己亥
九	丑乙丑	714.1.18	十二、十一乙巳	丑甲子 819	715.12.28 甲辰
十	丑己未闰四	713.1.7	十二、廿一庚戌	寅戊子 715	714.12.28 己酉
十一	丑癸未	712.1.25	十二、二乙卯	丑癸未 66	713.12.28 乙卯
桓　元	丑丁丑	711.1.14	十二、十四辛酉	丑丁丑 444	712.12.28 庚申
二	丑壬申闰	710.1.4	十二、廿五丙寅	寅辛丑 340	711.12.28 乙丑
三	丑丙申	709.1.23	闰十二、六辛未	丑乙未 718	710.12.28 庚午
四	丑庚寅	708.1.11	十二、十七丙子	丑庚寅 69	709.12.28 丙子
五	丑甲申闰	708.12.31	十二、廿八壬午	寅癸丑 992	708.12.28 辛巳
六	丑戊申	706.1.19	闰十二、九丁亥	丑戊申 343	707.12.28 丙戌
七	丑癸卯闰	705.1.9	十二、二十壬辰	丑壬寅 721	706.12.28 辛卯
八	丑丙寅	704.1.26	闰十二、一丁酉	丑丙寅 617	705.12.28 丁酉
九	丑辛酉	703.1.16	十二、十二壬寅	丑庚申 995	704.12.28 壬寅
十	丑乙卯闰	702.1.5	十二、廿三戊申	丑乙卯 346	703.12.28 丁未
十一	丑己卯	701.1.24	闰十二、四癸丑	丑己卯 242	702.12.28 壬子
十二	丑癸酉闰	700.1.12	十二、十五戊午	丑癸酉 620	701.12.27 丁巳
十三	寅丁酉	699.1.2	十二、廿六癸亥	寅丁酉 516	700.12.28 癸亥
十四	丑壬辰	698.1.21	十二、八己巳	丑辛卯 894	699.12.28 戊辰
十五	丑丙戌	697.1.10	十二、十九甲戌	丑丙戌 245	698.12.28 癸酉
十六	丑庚辰闰	697.12.29	十二、廿九己卯	丑庚辰 623	697.12.28 戊寅
十七	丑甲辰	695.1.17	闰十二、十甲申	丑甲辰 519	696.12.28 甲申

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
桓十八	丑己亥	694.1.7	十二、廿二庚寅	丑戊戌 897	695.12.28 己丑
庄　元	子癸巳闰	694.12.27	正、三乙未	子癸巳 248	694.12.28 甲午
二	丑丁巳	692.1.14	闰十二、十四庚子	丑丁巳 144	693.12.27 己亥
三	丑辛亥闰	691.1.3	十二、廿四乙巳	丑辛亥 522	692.12.28 乙巳
四	丑乙亥	690.1.22	闰十二、六辛亥	丑乙亥 418	691.12.28 庚戌
五	丑己巳	689.1.11	十二、十七丙辰	丑己巳 796	690.12.28 乙卯
六	丑甲子	689.12.31	十二、廿八辛酉	丑甲子 147	689.12.27 庚申
七	子戊午闰	688.12.20	正、九丙寅	子戊午 525	688.12.28 丙寅
八	丑壬午	686.1.8	闰十二、二十壬申	丑壬午 421	687.12.28 辛未
九	子丁丑闰	686.12.29	正、一丁丑	子丙子 799	686.12.28 丙子
十	丑庚子	684.1.15	闰十二、十二壬午	子辛未 150	685.12.27 辛巳
十一	丑乙未闰四	683.1.5	十二、廿三丁亥	子乙丑 528	684.12.28 丁亥
十二	丑己未	682.1.24	十二、五癸巳	丑己未 906	683.12.28 壬辰
十三	丑癸丑	681.1.13	十二、十六戊戌	寅癸未 802	682.12.28 丁酉
十四	丑丁未闰五	680.1.1	十二、廿六癸卯	丑丁未 698	681.12.27 壬寅
十五	丑辛未	679.1.20	十二、七戊申	子壬寅 49	680.12.28 戊申
十六	丑丙寅	678.1.10	十二、十九甲寅	丑乙丑 972	679.12.28 癸丑
十七	丑庚申闰	678.12.30	十二、廿九己未	寅己丑 868	678.12.28 戊午
十八	丑甲申	676.1.17	闰十二、十一甲子	丑甲申 219	677.12.27 癸亥
十九	丑戊寅	675.1.6	十二、廿一己巳	丑戊寅 597	676.12.28 己巳
廿	子癸酉闰	675.12.27	正、三乙亥	丑壬寅 493	675.12.28 甲戌
廿一	丑丁酉	673.1.15	闰十二、十四庚辰	丑丙申 871	674.12.28 己卯
廿二	丑辛卯	672.1.3	十二、廿五乙酉	丑辛卯 222	673.12.27 甲申
廿三	子乙酉闰	672.12.23	正、六庚寅	子乙酉 600	672.12.28 庚寅
廿四	丑己酉	670.1.11	闰十二、十六乙未	丑己酉 496	671.12.28 乙未
廿五	丑甲辰	669.1.1	十二、廿八辛丑	丑癸卯 874	670.12.28 庚子
廿六	子戊戌闰	669.12.20	正、九丙午	子戊戌 225	669.12.27 乙巳
廿七	丑壬戌	667.1.8	闰十二、二十辛亥	丑壬戌 121	668.12.27 庚戌
廿八	子丙辰闰	667.12.28	正、一丙辰	子丙辰 499	667.12.28 丙辰
廿九	丑庚辰	665.1.16	闰十二、十二壬戌	丑庚辰 395	666.12.28 辛酉
卅	丑甲戌	664.1.4	十二、廿三丁卯	丑甲戌 773	665.12.27 丙寅
卅一	子己巳闰	664.12.25	正、四壬申	子己巳 124	664.12.27 辛未
卅二	丑癸巳	662.1.13	闰十二、十五丁丑	丑癸巳 20	663.12.28 丁丑



续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
闵 元	丑丁亥	661.1.2	十二、廿六癸未	丑丁亥 398	662.12.28 壬午
二	子壬午闰五	661.12.22	正、七戊子	子辛巳 776	661.12.27 丁亥
僖 元	丑乙巳 闰十一	659.1.9	十二、十八癸巳	丑乙巳 672	660.12.27 壬辰
二	寅己巳	658.1.28	闰十一、廿九戊戌	寅己巳 568	659.12.28 戊戌
三	丑甲子	657.1.18	十二、十一甲辰	丑癸亥 946	658.12.28 癸卯
四	丑戊午	656.1.6	十二、廿一己酉	丑戊午 297	657.12.27 戊申
五	子壬子	656.12.26	正、三甲寅	子壬子 675	656.12.27 癸丑
六	子丁未	655.12.16	正、十三己未	子丙午 26	655.12.28 己未
七	子辛丑闰	654.12.5	正、廿五乙丑	子辛丑 404	654.12.28 甲子
八	子乙丑	653.12.23	正、六庚午	子乙丑 300	653.12.27 己巳
九	子庚申闰	652.12.13	正、十六乙亥	子己未 678	652.12.27 甲戌
十	丑甲申	650.1.1	闰十二、廿七庚辰	丑癸未 574	651.12.28 庚辰
十一	子戊寅闰	650.12.21	正、九丙戌	子丁丑 952	650.12.28 乙酉
十二	丑壬寅	648.1.8	闰十二、二十辛卯	丑辛丑 848	649.12.27 庚寅
十三	子丙申闰	648.12.28	正、一丙申	丑丙申 199	648.12.27 乙未
十四	丑庚申	646.1.16	闰十二、十二辛丑	丑庚申 95	647.12.28 辛丑
十五	丑甲寅	645.1.5	十二、廿三丁未	丑甲寅 473	646.12.28 丙午
十六	子戊申	645.12.24	正、五壬子	子戊申 851	645.12.27 辛亥
十七	子癸卯闰	644.12.14	正、十五丁巳	子癸卯 202	644.12.27 丙辰
十八	丑丁卯	642.1.2	闰十二、廿六壬戌	丑丁卯 98	643.12.28 壬戌
十九	子辛酉闰	642.12.22	正、八戊辰	子辛酉 476	642.12.28 丁卯
廿	丑乙酉	640.1.9	闰十二、十九癸酉	丑乙酉 372	641.12.27 壬申
廿一	丑己卯	640.12.29	十二、廿九戊寅	丑己卯 750	640.12.27 丁丑
廿二	子甲戌	639.12.19	正、十癸未	子甲戌 101	639.12.28 癸未
廿三	子戊辰闰	638.12.8	正、廿一戊子	子戊辰 479	638.12.28 戊子
廿四	子壬辰	637.12.26	正、三甲午	子壬辰 375	637.12.27 癸巳
廿五	子丁亥闰	636.12.16	正、十三己亥	子丙戌 753	636.12.27 戊戌
廿六	丑辛亥	634.1.4	闰十二、廿四甲辰	丑庚戌 649	635.12.28 甲辰
廿七	子乙巳	634.12.24	正、五己酉	子乙巳 0	634.12.28 己酉
廿八	子庚子	633.12.13	正、十六乙卯	子己亥 378	633.12.27 甲寅
廿九	子甲午	632.12.2	正、廿七庚申	子癸巳 756	632.12.27 己未



续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
僖　卅	亥戊子闰	631.11.21	二、八乙丑	亥戊子 107	631.12.27 甲子
卅一	子壬子	630.12.10	正、十九庚午	子壬子 3	630.12.28 庚午
卅二	亥丙午	629.11.28	二、一丙子	亥丙午 381	629.12.27 乙亥
卅三	亥辛丑闰八	628.11.18	二、十二辛巳	亥庚子 759	628.12.27 庚辰
文　元	子甲子闰	627.12.6	正、廿三丙戌	子甲子 655	627.12.27 乙酉
二	子戊子	626.12.25	正、四辛卯	子戊子 551	626.12.28 辛卯
三	子癸未闰	625.12.14	正、十五丁酉	子壬午 614	625.12.27 丙申
四	丑丁未	623.1.2	闰十二、廿六壬寅	丑丙午 825	624.12.27 辛丑
五	子辛丑	623.12.22	正、七丁未	子辛丑 176	623.12.27 丙午
六	子乙未闰	622.12.11	正、十八壬子	子乙未 554	622.12.28 壬子
七	丑己未	621.12.29	闰十二、廿九戊午	丑己未 450	621.12.27 丁巳
八	子甲寅	620.12.19	正、十癸亥	子癸丑 828	620.12.27 壬戌
九	子戊申闰八	619.12.8	正、廿一戊辰	子戊申 179	619.12.27 丁卯
十	子壬申	618.12.27	正、二癸酉	子壬申 75	618.12.28 癸酉
十一	子丙寅	617.12.15	正、十四己卯	子丙寅 453	617.12.27 戊寅
十二	子辛酉闰四	616.12.5	正、廿四甲申	子庚申 831	616.12.27 癸未
十三	子乙酉	615.12.24	正、五己丑	子甲申 727	615.12.27 戊子
十四	子己卯	614.12.13	正、十六甲午	子己卯 78	614.12.28 甲午
十五	子癸酉闰	613.12.1	正、廿八庚子	子癸酉 456	613.12.27 己亥
十六	子丁酉	612.12.20	正、九乙巳	子丁酉 352	612.12.27 甲辰
十七	子壬辰	611.12.10	正、十九庚戌	子辛卯 730	611.12.27 己酉
十八	亥丙戌闰	610.11.29	二、一乙卯	亥丙戌 81	610.12.28 乙卯
宣　元	子庚戌	609.12.17	正、十二辛酉	子己酉 1004	609.12.27 庚申
二	子甲辰	608.12.6	正、廿三丙寅	子甲辰 355	608.12.27 乙丑
三	亥戊戌	607.11.25	二、四辛未	亥戊戌 733	607.12.27 庚午
四	亥壬辰闰	606.11.14	二、十五丙子	亥癸巳 84	606.12.28 丙子
五	子乙巳	605.12.3	正、廿五辛巳	子丙辰 1007	605.12.27 辛巳
六	亥辛亥闰	604.11.22	二、七丁亥	亥辛亥 358	604.12.27 丙戌
七	子乙亥	603.12.11	正、十八壬辰	子乙亥 254	603.12.27 辛卯
八	子己巳闰五	602.11.30	正、廿九丁酉	丑己亥 150	602.12.28 丁酉
九	子癸巳	601.12.18	正、十壬寅	子癸巳 528	601.12.27 壬寅
十	子戊子闰	600.12.8	正、廿一戊申	子丁亥 906	600.12.27 丁未



续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
宣十一	子壬子	599.12.27	正、二癸丑	子辛亥 802	599.12.27 壬子
十二	子丙午	598.12.16	正、十三戊午	子丙午 153	598.12.28 戊午
十三	子庚子闰	597.12.4	正、廿四癸亥	子庚子 531	597.12.27 癸亥
十四	子甲子	596.12.23	正、六己巳	子甲子 427	596.12.27 戊辰
十五	子己未闰	595.12.13	正、十六甲戌	子戊午 805	595.12.27 癸酉
十六	丑癸未	593.1.1	闰十二、廿七己卯	丑壬午 701	594.12.27 戊寅
十七	子丁丑	593.12.20	正、八甲申	子丁丑 52	593.12.27 甲申
十八	子辛未	592.12.9	正、二十庚寅	子辛未 430	592.12.27 己丑
成 元	亥丙寅闰	591.11.29	二、一乙未	子乙丑 808	591.12.27 甲午
二	子己丑	590.12.17	正、十二庚子	子己丑 704	590.12.27 己亥
三	子甲申	589.12.6	正、廿二乙巳	子甲申 55	589.12.27 乙巳
四	亥戊寅闰	588.11.25	二、四辛亥	亥戊寅 433	588.12.27 庚戌
五	子壬寅	587.12.14	正、十五丙辰	子壬寅 329	587.12.27 乙卯
六	子丁酉	586.12.24	正、廿五辛酉	子丙申 707	586.12.27 庚申
七	亥辛卯闰	585.11.22	二、七丙寅	亥辛卯 58	585.12.27 丙寅
八	子乙卯	584.12.11	正、十八壬申	子甲寅 981	584.12.27 辛未
九	子己酉	583.11.30	正、廿九丁丑	子己酉 332	583.12.27 丙子
十	亥癸卯闰	582.11.19	二、十壬午	亥癸卯 710	582.12.27 辛巳
十一	子丁卯	581.12.7	正、廿一丁亥	子丁卯 606	581.12.27 丁亥
十二	亥壬戌闰	580.11.27	二、三癸巳	亥辛酉 984	580.12.27 壬辰
十三	子丙戌	579.12.16	正、十三戊戌	子乙酉 880	579.12.27 丁酉
十四	子庚辰闰七	578.12.5	正、廿四癸卯	丑己酉 776	578.12.27 壬寅
十五	子甲辰	577.12.23	正、五戊申	子甲辰 127	577.12.27 戊申
十六	子戊戌	576.12.12	正、十七甲寅	子戊戌 505	576.12.27 癸丑
十七	子癸巳闰	575.12.2	正、廿七己未	子壬辰 883	575.12.27 戊午
十八	子丙辰	574.12.20	正、九甲子	子丙辰 779	574.12.27 癸亥
襄 元	子辛亥闰	573.12.9	正、十九己巳	子辛亥 130	573.12.27 己巳
二	子乙亥	572.12.28	正、一乙亥	丑乙亥 26	572.12.27 甲戌
三	子己巳	571.12.17	正、十二庚辰	子己巳 404	571.12.27 己卯
四	子甲子闰	570.12.7	正、廿二乙酉	子癸亥 782	570.12.27 甲申
五	子丁亥	569.12.24	正、四庚寅	子丁亥 678	569.12.27 庚寅
六	子壬午	568.12.14	正、十四乙未	子壬午 29	568.12.27 乙未

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
襄 七	子丙子闰十	567.12.3	正、廿六辛丑	子丙子 407	567.12.27 庚子
八	子庚子	566.12.22	正、七丙午	子庚子 303	566.12.27 乙巳
九	子甲午	565.12.10	正、十八辛亥	子甲午 681	565.12.27 辛亥
十	子己丑闰	564.11.30	正、廿八丙辰	子己丑 32	564.12.27 丙辰
十一	子癸丑	563.12.19	正、十壬戌	子壬子 955	563.12.27 辛酉
十二	子丁未闰	562.12.8	正、廿一丁卯	子丁未 306	562.12.27 丙寅
十三	子辛未	561.12.26	正、二壬申	子辛未 202	561.12.27 壬申
十四	子乙丑	560.12.15	正、十三丁丑	子乙丑 580	560.12.27 丁丑
十五	子庚申	559.12.5	正、廿四癸未	子己未 958	559.12.27 壬午
十六	亥甲寅闰	558.11.24	二、五戊子	亥甲寅 309	558.12.27 丁亥
十七	子戊寅	557.12.22	正、十六癸巳	子戊寅 205	557.12.26 壬辰
十八	子壬申	556.12.1	正、廿七戊戌	子壬申 583	556.12.27 戊戌
十九	亥丁卯闰	555.11.21	二、九甲辰	亥丙寅 961	555.12.27 癸卯
二十	子辛卯	554.12.10	正、十九己酉	子庚寅 857	554.12.27 戊申
廿一	亥乙酉闰八	553.11.28	二、一甲寅	丑甲寅 753	553.12.26 癸丑
廿二	子戊申	552.12.16	正、十二己未	子己酉 104	552.12.27 己未
廿三	子癸卯闰	551.12.6	正、廿三乙丑	子癸卯 482	551.12.27 甲子
廿四	子丁卯	550.12.25	正、四庚午	子丁卯 378	550.12.27 己巳
廿五	子辛酉	549.12.13	正、十五乙亥	子辛酉 756	549.12.26 甲戌
廿六	子丙辰	548.12.3	正、廿五庚辰	子丙辰 107	548.12.27 庚辰
廿七	亥庚戌闰四	547.11.22	二、七丙戌	亥庚戌 485	547.12.27 乙酉
廿八	子甲戌	546.12.11	正、十八辛卯	子甲戌 381	546.12.27 庚寅
廿九	子戊辰闰五	545.11.29	正、廿九丙申	丑戊戌 277	545.12.26 乙未
三十	子壬辰	544.12.18	正、十辛丑	子壬辰 655	544.12.27 辛丑
卅一	子丁亥	543.12.8	正、廿一丁未	子丁亥 6	543.12.27 丙午
昭 元	亥辛巳闰十	542.11.27	二、二壬子	亥辛巳 384	542.12.27 辛亥
二	子甲辰	541.12.14	正、十四丁巳	子乙巳 280	541.12.26 丙辰
三	子己亥	540.12.4	正、廿四壬戌	子己亥 658	540.12.27 壬戌
四	亥甲午闰四	539.11.24	二、五丁卯	子癸亥 554	539.12.27 丁卯
五	子戊午	538.12.13	正、十六癸酉	子丁巳 932	538.12.27 壬申
六	子壬子闰七	537.12.1	正、廿七戊寅	子壬子 283	537.12.26 丁丑
七	子丙子	536.12.20	正、八癸未	子丙子 179	536.12.27 癸未



续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
昭 八	子庚午闰八	535.12.9	正、十九戊子	子庚午 557	535.12.27 戊子
九	子甲午	534.11.28	正、一甲午	丑甲午 453	534.12.27 癸巳
十	子戊子	533.12.16	正、十二己亥	子戊子 831	533.12.26 戊戌
十一	子癸未闰	532.12.6	正、廿二甲辰	子癸未 182	532.12.27 甲辰
十二	子丙午	531.12.24	正、四己酉	子丁未 78	531.12.27 己酉
十三	子辛丑	530.12.14	正、十五乙卯	子辛丑 456	530.12.27 甲寅
十四	子丙申	529.12.3	正、廿五庚申	子乙未 834	529.12.26 己未
十五	亥庚寅闰八	528.11.22	二、七乙丑	亥庚寅 185	528.12.27 乙丑
十六	子甲寅	527.12.11	正、十七庚午	子甲寅 81	527.12.27 庚午
十七	子戊申闰	526.11.30	正、廿九丙子	子戊申 459	526.12.27 乙亥
十八	子壬申	525.12.18	正、十辛巳	子壬申 355	525.12.26 庚辰
十九	子丙寅	524.12.7	正、廿一丙戌	子丙寅 733	524.12.27 丙戌
二十	亥庚申闰八	523.11.26	二、二辛卯	子庚寅 629	523.12.27 辛卯
廿一	子乙酉	522.12.16	正、十三丁酉	子甲申 1007	522.12.27 丙申
廿二	子己卯闰	521.12.4	正、廿四壬寅	丑戊申 903	521.12.26 辛丑
廿三	子壬寅	520.12.22	正、六丁未	子癸卯 254	520.12.26 丙午
廿四	子丁酉	519.12.12	正、十六壬子	子丁酉 632	519.12.27 壬子
廿五	子壬辰闰	518.12.2	正、廿七戊午	子辛卯 1010	518.12.27 丁巳
廿六	子丙辰	517.12.20	正、八癸亥	子乙卯 906	517.12.26 壬戌
廿七	子庚戌	516.12.9	正、十九戊辰	子庚戌 257	516.12.26 丁卯
廿八	亥甲辰闰五	515.11.28	二、一癸酉	子甲辰 635	515.12.27 癸酉
廿九	子戊辰	514.12.17	正、十二己卯	子戊辰 531	514.12.27 戊寅
三十	子壬戌闰五	513.12.5	正、廿三甲申	丑壬辰 427	513.12.26 癸未
卅一	子丙戌	512.12.24	正、四己丑	子丙戌 805	512.12.26 戊子
卅二	子辛巳	511.12.14	正、十四甲午	子辛巳 156	511.12.27 甲午
定 元	子乙亥	510.12.3	正、廿六庚子	子乙亥 534	510.12.27 己亥
二	亥己巳闰五	509.11.22	二、七乙巳	亥己巳 912	509.12.26 甲辰
三	子甲午	508.12.11	正、十七庚戌	子癸巳 808	508.12.26 己酉
四	子戊子闰十	507.11.30	正、廿八乙卯	子戊子 159	507.12.27 乙卯
五	子壬子	506.12.19	正、九庚申	子壬子 55	506.12.27 庚申
六	子丙午	505.12.7	正、廿一丙寅	子丙午 433	505.12.26 乙丑
七	亥辛丑闰	504.11.27	二、二辛未	子庚午 329	504.12.26 庚午

续表

	《朔闰日至考》			春秋鲁历	
	正朔	儒历(前)	冬至	正朔小余	冬至(前)
定　八	子甲子	503.12.15	正、十三丙子	子甲子 707	503.12.27 丙子
九	子己未	502.12.5	正、廿三辛巳	子己未 58	502.12.27 辛巳
十	亥癸丑闰六	501.11.23	二、五丁亥	亥癸丑 436	501.12.26 丙戌
十一	子丁丑	500.12.12	正、十六壬辰	子丁丑 332	500.12.26 辛卯
十二	子辛未闰	499.12.1	正、廿七丁酉	子辛未 710	499.12.27 丁酉
十三	子乙未	498.12.20	正、八壬寅	子乙未 606	498.12.27 壬寅
十四	子庚寅闰	497.12.9	正、十九戊申	子己丑 984	497.12.26 丁未
十五	子癸丑	496.12.27	正、一癸丑	丑癸丑 880	496.12.26 壬子
哀　元	子丁未	495.12.16	正、十二戊午	子戊申 231	495.12.27 戊午
二	子辛丑闰	494.12.5	正、廿三癸亥	子壬寅 609	494.12.27 癸亥
三	子丙寅	493.12.24	正、四己巳	子丙寅 505	493.12.26 戊辰
四	子庚申	492.12.13	正十五甲戌	子庚申 883	492.12.26 癸酉
五	子甲寅闰	491.12.2	正、廿六己卯	子乙卯 234	491.12.27 己卯
六	子戊寅	490.12.21	正、七甲申	子己卯 130	490.12.27 甲申
七	子癸酉闰	489.12.10	正、十八庚寅	子癸酉 508	489.12.26 己丑
八	丑丁酉	488.12.29	闰十二、廿九乙未	丑丁酉 404	488.12.26 甲午
九	子辛卯	487.12.18	正、十庚子	子辛卯 782	487.12.26 己亥
十	子丙戌闰五	486.12.8	正、二十乙巳	子丙戌 133	486.12.27 乙巳
十一	子庚戌	485.12.26	正、二辛亥	子庚戌 29	485.12.26 庚戌
十二	子甲辰	484.12.15	正、十三丙辰	子甲辰 407	484.12.26 乙卯
十三	子戊戌闰	483.12.4	正、廿四辛酉	子戊戌 785	483.12.26 庚申
十四	子壬戌	482.12.23	正、五丙寅	子壬戌 681	482.12.27 丙寅
十五	子丁巳	481.12.12	正、十六壬申	子丁巳 32	481.12.26 辛未
十六	子辛亥闰	480.12.1	正、廿七丁丑	子辛亥 410	480.12.26 丙子
十七	子乙亥	479.12.20	正、八壬午	子乙亥 306	479.12.26 辛巳

三、春秋鲁历的置闰和岁首

《春秋》仅有两次闰月记载：

文公六年，闰月不告月，犹朝于庙；

哀公五年，闰月，葬齐景公。

皆书于年终、冬月之后，为年终闰月，当无可疑。前面说过，经文中虽然有一些历日干支不易认定是否月日有误，还是年中有闰。因缺乏春秋设年中闰月的确切文献



和科学依据，在春秋长历中，我们悉按年终闰月排谱，王韬均作年中之闰对待。这是本谱和王韬长历的最大相异之处。

《春秋》所书 393 历日干支，绝大多数都合复原的春秋历法，不尽相符者 45 条，其中 11 条属上述情况，可用设年中闰月的办法解决。8 条为经失书月。不合复原鲁历的 45 春秋历日的情况列于表 3－8，表中同时刊出王韬长历的异同和处理方法。

表 3－8　《春秋》45 历日不合复原的春秋鲁国历谱

不合《春秋》历月		王韬长历	注
隐　二	八月庚辰	王谱同	
四	（三）月戊申	王谱同	二月……戊申，失书月
桓　二	四月戊申	王作正月误	正月戊申……四月戊申 必有一误
五	正月己丑	王作甲戌误	正月甲戌、己丑…… 必有一误
十二	八月壬辰	王谱同	
十七	二月丙午	王谱同	
庄廿八	三月甲寅	王谱同	
闵　二	八月辛丑	加闰五月合	五月乙酉……八月辛丑
僖　元	十二月丁巳	加闰十一月合	十月壬午……十二月丁巳
九	九月甲子	王谱同	九月戊辰……甲子，当为夏正
十八	八月丁亥	王谱同	
廿七	（九月）乙巳	王谱同	秋八月乙未……乙巳，失书月
廿八	（十月）壬申	王谱同	冬……狩……壬申，失书月
卅三	十二月乙巳	加闰八月合	四月辛巳……癸巳……十二月 乙巳
文　九	九月癸酉	王谱同	本谱作十月朔，若闰八可合，王 谱闰八亦不通
十二	十二月戊午	加闰四月合	二月庚子……十二月戊午
十三	十二月己丑	王谱同	王韬认为五月壬午亦误
十四	五月乙亥	王谱同	
宣　二	二月壬子	王谱同	
宣　九	九月辛酉	王谱同	
十二	六月乙卯	王谱同	
十七	（二月）丁未	王谱同	正月庚子……丁未，失书月
成　二	（九月）庚寅	王谱同	八月壬午……庚寅，失书月
四	三月壬申	王谱同	
九	七月丙子	王谱同	
十	（六月）丙午	王谱同	五月……丙午，失书月
十七	十一月壬申	王谱同	

续表

不合《春秋》历日		王韬长历	注
襄 二	六月壬辰	王谱同	
三	(七月)戊寅	王谱同	六月……乙未……戊寅,失书月
四	三月己酉	王谱同	
七	十二月丙戌	加闰十月合	十月壬戌……十二月丙戌
九	十二月己亥	王谱同	
廿五	八月己巳	王谱同	
廿七	七月辛巳	加闰四月合	王闰四月,将十二月乙亥朔日食改十一月乙亥朔,以合传
廿八	十二月乙未	王谱同	十二月甲寅……乙未,不合
廿九	(六月)庚午	王谱同	夏五月……庚午,失书月
昭 元	十一月己酉	加闰十月合	六月丁巳……十一月己酉
八	十月壬午	加闰十月合	四月辛丑……十月壬午
廿二	四月乙丑	王谱同	王韬十二月癸酉朔日食亦误
廿四	八月丁酉	王谱同	与五月乙未朔日食不接
廿八	七月癸巳	加闰五月合	四月丙戌……七月癸巳
定 四	春王二月癸巳	王谱同	
	十一月庚午	加闰十月合	四月庚辰……十一月庚午
	十一月庚辰	加闰十月合	四月庚辰……十一月庚辰
十五	(十月)辛巳	王谱同	九月……丁巳……戊午……辛巳失书月
哀 三	夏四月甲午	合	本谱作三月甲午晦

很可能我国历法是在西周中晚期废朏用朔的。春秋时期,犹告月、告朔,可见当为推步制定历法的早期阶段。虽斯时步朔比较准确,但很可能还没有严格的设闰标准和规范。春秋历法有没有年中闰月或年中置闰的方法,这个学术问题可以再深入研究、讨论。可是鲁历设闰欠规整、岁首尚未完全固定却是不可否认的事实。

前面说过,在有没有年中闰月问题上,王韬和我们观点稍有差异,这有时会影响到设闰的年份。加上王韬以新法得出的春秋日至约有 2/3 后天 1 日。因此在他的长历中有 8 年岁首建正差失 1 月。在春秋时期的 245 年中,我们复原的鲁历与王韬长历岁首建正情况比较如下:

春秋鲁历 8 年建寅,70 年建丑,149 年建子,18 年建亥;《朔至考》3 年建寅,67 年建丑,151 年建子,24 年建亥;《朔闰表》1 年建寅,69 年建丑,151 年建子,24 年建亥。

春秋 242 年,合 12 章 14 年。按 19 年设 7 闰的章法,当设 89 闰。但在王韬长历和我们复原的鲁历中皆为 88。由于设闰较正常闰率和章闰少,因此春秋鲁历岁



首前移了 1 个月。大致说来，春秋早期岁首基本建丑，中、后期多数建子。由于设闰不规范，约有 1/10 的年份岁首有 1 个月的摆动。

如果再细一点考查，就可看出，岁首前移，或有意将岁首由建丑调整为斗柄指北的子月，这件事是发生在僖、文时期。由隐公元年（前 722）至僖十三年（前 647）这 4 章 76 年中，共设了 28 闰，符合章法闰率。就是说，在这 76 年中，平均说来，岁首基本上建丑。而在僖元年（前 659）到成七年（前 584）这 4 章 76 年里，春秋鲁历共设闰 27 月，比 19 年设 7 闰的正常闰率，少设 1 闰。由此可知，成公以后鲁历岁首就大致建子了。可这样认识，大约在公元前 7 世纪中后期、僖文时代，基本掌握了 19 年 7 闰的合天闰率，能有把握、较准确地测定日至的日期后，就有意识地调整岁首，而以含冬至之月作为正月了。在其后的成哀时期，自宣公十八年（前 591）至哀公十七年（前 478）的 6 章 114 年中，鲁历共设 42 闰，正合 19 年 7 闰的章法，为推步历法发展的第二阶段，规范化地设闰，向前迈进了一步。

春秋历法是阴阳历，年月日皆依据天象。四时寒暑的周期是回归年，月相盈亏圆缺变化依朔望月而循环。回归年、朔望月的日数不能公约。阴阳历设置闰月的目的有两个。一是调整历年长度使其尽量与回归年接近，二是固定岁首，以便月名基本能和季节对应。规范设闰既可在较短时间内使平均历年长度与回归年相近，又可将每年的岁首稳定在斗柄某一指向的月份上。

日月同经谓之合朔。19 个回归年长约 6939.60 日，而 235 个朔望月近于 6939.69 日。如果某年太阳在冬至点时日月会合，那么 19 年后的日月又将在冬至日同一黄经处相合。视太阳在黄道上运动，按中国历度，每日东移 1 度，一岁（约 365.25 日）而周。即，从冬至点出发，到太阳再回到此点，需要 1 回归年的时间。一个朔望月为 29.5306 日。历月只能取整数日，所以阴阳历中月分大小，大月 30 日，小月 29 日。与历月类似，历年也只能取整数月。年 12 月为 354 日或 355 日，较回归年少 10～11 日；13 月是 383 或 384 日，比 1 岁又长 18～19 日。冬至之日黄昏时刻，北斗斗柄大致指北——子的方位，故称含冬至之月为子月。若取子月为岁首，如某年冬至合朔齐同，以此为起点。可以看出，按 1 年 12 月计，则第 4 年的岁首已不在子月，而在其前之斗柄建亥之月了。只有在第 3 年中增加 1 月，使其年为 13 月，才会使次年岁首仍在子月，以保证时节与月名固定的对应关系。有 13 月之年称作闰年。所加之月是谓闰月。年月日皆依据天象，而月分大小，年有平闰，这是阴阳历的基本组成和特征。

对于岁首建子（又称子正、周正）的历法，冬至距岁首月朔的日数叫作冬至的月龄，又称闰余。在上述的 19 回归年中，每次冬至距其前朔日的月龄很容易算出。知道了闰余，哪一年该设闰，甚至闰月应置何处就一清二楚了。所以闰余是规范化

设闰的依据。由于19个回归年正好等于235个朔望月的长度，按每历年12月计，235月比19年228月多7个月，多出之月即19历年中当设的闰月数。古称章岁19，章闰7。这样，19年设7闰，经过一章19年，平均历年长度正好与回归年相等。另一方面，每年的闰余值，或者说这样的闰月安排，又比较准确地依19年的周期重复出现，形成了阴阳历置闰的基本规律。在中国近2000年使用平气的各代历法中，它一直作为设置闰月的基本依据。

按照规范化章法设闰，在每章19年中，闰年和闰月的位置是固定的。在以冬至建子月为岁首的历法中，闰年在每章19年中的位置是第3、6、9、11、14、17和19年。闰月的具体设置方法，在介绍古六历的时候将详细讨论。由复原的春秋鲁历、王韬长历闰年位置（表3－7）看出，春秋历法虽已知19年7闰，但并未按上述规律置闰，还有一定随意性。因此约有1/10的年份岁首有1个月的摆动。说明春秋还没有掌握依闰余安排闰年的方法，而由观测而随时确定。因日至测景还不够精密，故闰年设置缺乏规律。而且不能排除可能因某种原因，如多日连续阴云、雨雪等，存在人为设闰的情况。

从历法的发展来看，当测景确定日至比较精密，对太阳运动或回归年长度有较准确的认识以后，才会改行以子月为岁首的历法。三代三正，是否确如《尚书大传》或《史记》所言，是夏商周三代改行正朔的故事，即夏以冬至后二月，殷以冬至后一月，周以冬至月为正月。目前尚无确凿的证据。但它反映历法发展的时间顺序却是无疑的。春秋历法的建正发展过程就是一个实例。从这个意义上讲，春秋鲁历是早期推步制定历法的一个范本，研究它可以使我们得到许多更早的有关殷商西周历法的信息。

春秋鲁历步朔比较准确，但尚不认识闰余。并非如太史公所说的“黄帝考定星历，建立五行，起消息，正闰余”那样，春秋闰年安排还没有严格的规律。其后，战国时期的古六历，为折中配合年月日的长度，虽然牺牲了一点步朔的精度，但，根据闰余，建立起19年7闰的章法部元，和统一的年月日朔闰气推步体系，因此得到固定的岁首和规整的置闰，在历法发展上是一个很大的进步。

四、春秋鲁、晋历法的异同

春秋时期，列国自行颁历。春秋各国历史悉皆亡佚，仅一部鲁《春秋》保存了下来。《左传》杂采各国史策，收集了许多诸侯国的史料，保存了不少晋、齐、秦、楚、郑、卫等国的朔闰历日。但由于成分复杂，难以辨识，要想了解其时别国历法的情况，很不容易。

《春秋》、《左传》、《史记·晋世家》都记载了成公十七、十八年（晋厉公七、八年）



晋厉公使胥童、夷羊五、长鱼矫等杀三郤，栾书、中行偃执厉公、杀胥童、弑厉公、立悼公等几件史实发生的历日。晋世家所书内容不尽与《左传》全合，但由其所记历月可考辨确为晋历。各书所述史实及所对应的历日并排于表3—9。

表3—9 各书所述史实及所对应的历日

《春秋》	《左传》	《史记·晋世家》
成十七年十有二月丁巳朔日有食之	成十七年十二月	晋厉公八年
晋杀其大夫郤锜、郤犨、郤至	壬午，胥童、夷羊五帅甲八百……以戈杀驹伯、苦成叔……	十二月壬午，公令胥童以兵八百人袭攻杀三郤
十有八年春王正月晋杀其大夫胥童	公游于匠骊氏，栾书、中行偃遂执公焉。闰月乙卯晦栾书中行偃杀胥童	闰月乙卯厉公游匠骊氏，栾书、中行偃以其党袭捕厉公，囚之。杀胥童
庚申晋弑其君州蒲	十八年正月庚申晋栾书、中行偃使程滑弑厉公	悼公元年正月庚申栾书、中行偃弑厉公
	（正月）庚午智罃伯子同氏	厉公囚六日死。死十日庚午智罃迎公子周……而立之。是为悼公
	辛巳 朝于武宫	辛巳 朝武宫
（正月）齐杀其大夫国佐	（正月）甲申晦齐侯使士华免以戈杀国佐	
	二月乙酉朔 晋悼公即位于朝	二月乙酉 即位

《春秋》书成公十六年六月丙寅朔、十七年十有二月丁巳朔日有食之，皆已确证为观测实记。十六年六月甲午晦晋侯及楚子郑伯战于鄢陵。则六月丙寅朔、七月乙未朔距十七年十二月丁巳朔分别为17、18月，依春秋鲁历步朔其间必有一次两大月相连。则鲁历十七年闰月、十八年正、二、三、四月朔当分别为丁亥、丙辰、丙戌、乙卯、乙酉日。

《经》言十八年春正月晋杀胥童，《传》作十七年闰月乙卯晦，所记不一；而正月庚申晋弑厉公，《经》《传》日期无异。据此不易认定《左传》所依系何历术。《晋世家》不存在用鲁历的问题。所书栾书、中行偃执厉公、杀胥童皆为闰月乙卯日、正月庚申弑厉公，明言囚六日死，与《左传》不同。看来另有所本，不是抄自《左传》。但《晋世家》所书历日与《左传》相同。闰月乙卯至正月庚申相距5日，乙卯必为闰月最后几天。正月有庚申、庚午、辛巳，而闰月乙卯距二月乙酉仅30日。这只有乙卯为闰月晦，正月丙辰朔且为小月，才有可能。所以，《晋世家》所书闰月乙卯为晦日，

二月乙酉是初一，与《左传》历日记载全同。可以考辨认定这是两条晋历的晦朔。由此可对晋历有如下认识。

第一，春秋鲁国、晋国历法是不同的。前面已考查得出成公十七年闰月朔丁亥，十八年正、二、三、四月朔分别为丙辰、丙戌、乙卯、乙酉。与晋历正月朔丙辰、二月朔乙酉不同。由此说明，不仅晋历、鲁历岁首月建不一，步朔也有差异。

第二，晋历与战国魏国所行历法也不一样。云梦秦简记载有魏安釐王二十五年闰再十二月丙午朔的历日。经分析，其时魏所行的很可能为六历中的夏历（正月建寅，以十一月甲子朔旦冬至为历元气朔）。战国时，晋分为韩、赵、魏三国。春秋晋国采用的是不是也是夏历呢？晋厉公七年（前574）入夏历戊午蔀47年，由此推得厉公八年正月甲寅朔、二月甲申朔。可确知，春秋晋国所行不为夏历。

古六历在战国后期与天较合。由于朔策比真值略大，所以约300年朔差1日。若晋历悼所行为夏历或其他古六历，则在公元前6世纪此历势必要先天1日。表3—10列出晋厉公八年和魏安釐王二十五年这三个朔日的真实天象。可以看出它们基本与天相合，厉公时或稍有后天。均不先天。由此也可知，晋、魏所行历法是不相同的。

表3—10　文献记载晋魏历朔合天情况

文献记载历朔				实　朔				合失天
王公	年	月	朔干支	公元前年	月日	时分	干支	
晋厉公	八	正	丙辰	573	2 17	15 34	乙卯	后天1日
晋厉公	八	二	乙酉	573	3 18	7 52	乙酉	合天
魏安釐王	廿五	闰再十二	丙午	251	1 28	22 46	丙午	合天

第六节　古六历的创制行用时代

一、古六历是四分术行用于战国秦汉初

黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁历，这六种历法，又称古六历。六历之名，始见于《汉书·艺文志》及《汉书·律历志》。

《汉书·律历志》说：

三代既没，五伯之末，史官丧纪，畴人子弟分散，或在夷狄，故其所记，有黄帝、颛顼、夏、殷、周及鲁历。战国扰攘，秦兼天下，未皇暇也。亦颇推五胜，而自以为获水德，乃以十月为正，色尚黑。汉兴，方纲纪大基，庶事



草创，袭秦正朔。以北平侯张苍言，用颛顼历，比于六历，疏阔中最为微近。

《汉书·艺文志》记有，成帝时，太史令尹咸校数术，所录尚有历谱 18 家 606 卷，其中有黄帝五家历 33 卷，颛项历 21 卷，颛项五星历 14 卷，夏殷周鲁历 14 卷。《汉书》是公元 1 世纪班固根据其父班彪收集的材料，整理撰写成书。他死时，《汉书》的八表和天文志尚未完稿，后由其妹班昭和同郡人马续补著而成完璧。

4 世纪初，晋司马彪所修《续汉书·律历志》给出六历上元甲子。论曰："黄帝造历元起辛卯，而颛项用乙卯，虞用戊午，夏用丙寅，殷用甲寅，周用丁巳，鲁用庚子。"关于六历的具体内容、方法，《汉书》、《续汉书》中都没有完整的记述，仅有一些零星材料，但由此分析可知，六历实际上都是四分术。

《汉书》说，太初改历后 27 年，"元凤三年(前 78)，太史令张寿王上书言，历者天地之大纪，上帝所为。传黄帝调律历，汉元年以来用之。今阴阳不调，宜更历之过也。"寿王非汉历，认为汉初行用的是黄帝调历。他说："太初历亏四分日之三，去小余七百五分。"3/4 日为小余 705 分，可知日分为 940。此为四分术的蔀月，后面将会看到，黄帝历与太初历相近，仅相差 1.3 小时，小余 51 分。而殷历后太初 3/4 日，故《汉书·律历志》称"寿王历乃太史官殷历也"。

《汉书·律历志》说："鲁历不正，以闰余一之岁为蔀首。"四分术称 76 年为蔀，每岁冬至月龄曰闰余。

在《汉书·律历志》著录的《三统历·世经》中，刘歆处处引用殷历来与三统历进行比较。所述殷历皆以 76 为蔀年，至朔悉合四分术。如《世经》云：

> 殷历曰，当成汤方即世用事十三年，十一月甲子朔旦冬至。终六府(蔀)首，当周公五年，则为距伐桀四百五十八岁，少一百七十一岁，不盈六百二十九。又以夏时乙丑为甲子。计其年乃孟统后五章，癸亥朔旦冬至也。以为甲子府首皆非是。凡殷世继嗣三十一王，六百二十九岁。

殷历家给出的伐桀年至三统历之伐纣共为 458 年。依三统历，上元至伐桀 141480 岁，至伐纣 142109 岁。相距为 629 年。殷历 458 年，较之少 171 年。隐公元年(前 722)上距伐纣 400 岁，故三统伐纣当公元前 1122 年。其前 458 年即前 1580 年为殷历伐桀之岁。成汤为天子用事 13 年崩没，其岁十一月甲子朔旦冬至，为殷历天纪纪首甲子府首，事在公元前 1567 年。六蔀后当周公五年，前 1111 年，为戊午蔀首。以下各年俱世经所记蔀首鲁史纪年，皆相距一蔀 76 年。

炀公二十四年(前 1035)为丁酉蔀首；

微公二十六年(前 959)为丙子蔀首；

献公十五年(前 883)为乙卯蔀首；

懿公九年(前 807)为甲午蔀首;

惠公三十八年(前 731)为癸酉蔀首;

僖公五年(前 655)为壬子蔀首;

成公十二年(前 579)为辛卯蔀首;

定公七年(前 503)为庚午蔀首;

元公四年(前 427)为己酉蔀首;

康公四年(前 351)为戊子蔀首;

缗公二十二年(前 275)为丁卯蔀首。

公元前 256 年,周赧王五十九年,秦昭王五十一年,秦灭周,楚考烈王灭鲁,迁封鲁君于莒。而三统历世经鲁亡事载秦孝文王元年(前 250),周灭后六年。秦始皇帝二十六年(前 221),齐亡。至此,秦兼天下。到刘邦灭秦,子婴降,为公元前 206 年。秦朝共二世,15 年。汉元年距三统上元 143025 岁。

这以后《世经》继书:

汉高祖八年(前 199)为殷历丙午蔀首;

汉武帝元朔六年(前 123)为殷历乙酉蔀首;

汉元帝初元二年(前 47)为殷历地纪纪首、甲子蔀首。

四分术一蔀 76 年、940 月,20 蔀 1520 年为纪。一纪后蔀首日名方可复原。由上述《汉书·律历志》所书殷历蔀首日名和纪法知,实际上殷历是四分术。

《续汉书·律历志》关于六历的记述有所充实。

> 灵帝熹平四年(175),五官郎中冯光、沛相上计掾陈晃言,历元不正,故妖民叛寇益州,盗贼相续为害,历当用甲寅为元而用庚申,图纬无以庚申为元者。

议郎蔡邕曰:

> 历数精微,去圣久远,得失更迭,术无常是。汉兴承秦,历用颛顼,元用乙卯,百有二岁,孝武皇帝始改正朔,历用太初,元用丁丑,行之百八十九岁。孝章皇帝改从四分,元用庚申。今光、晃各以庚申为非,甲寅为是。案历法,黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁,凡六家,各自有元。光、晃所据,则殷历元也。他元虽不明于图谶,各自一家之术,皆有效于当时。武帝始用太初丁丑之元,六家纷错,争讼是非。太史令张寿王挟甲寅元以非汉历,杂候清台,课在下第,卒以疏阔,连见劾奏,太初效验,无所漏失。是则虽非图谶之元,而有效于前者也。及用四分以来,考之行度,密于太初,是又新元有效于今者也。

明言颛顼历,元用乙卯;光、晃所据之甲寅元,则为殷历之元。六历,各自有元。



光和二年(179),刘洪上言:

推汉己巳元,则考灵曜旃蒙之岁乙卯元也,与光、晃甲寅元相经纬。于以追天作历,校三光之步,今为疏阔。孔子纬一事见二端者,明历兴废,随天为节。甲寅历于孔子时效;己巳颛顼秦所施用,汉兴草创,因而不易。元至封中,迂阔不审,更用太初,应期三百改宪之节。甲寅、己巳谶虽有文,略其年数,是以学人各传所闻,至于课校,罔得厥正。夫甲寅元天正正月甲子朔旦冬至,七曜之起,始于牛初。乙卯之元人正己巳朔旦立春,三光聚天庙五度。课两元端,闰余差百五十二分之三,朔三百四,中节之余二十九。

更清楚指出,殷历、颛顼历的上元甲子和历元气朔俱不相同。用殷历推求颛顼历元气朔,得闰余差 3/152 个朔望月,合朔时刻相距 304/940 日,交节有 29/32 日的间隔。后面将看到,只有用四分法推步才会得到如此结果。

以上《汉书·律历志》、《续汉书·律历志》记载的多为殷历、颛顼历的例子。由此可大致得出六历皆为四分法。之所以历朔有别,乃上元及历元气朔不同而已。《续汉书·律历志》不仅给出了六历上元甲子,并且还记述了殷历、颛顼历历元日月相聚的星宿位置。

刘宋大明六年(462)祖冲之上大明历,世祖下之有司,使内外博议。时人少解历数,竟无异同之辩。唯太子旅贲中郎将戴法兴予以驳难。在法兴、冲之驳难辩析中,多次涉及对六历的评价。法兴议曰:"夫置元设纪,各有所尚,或据文于图谶,或取效于当时。冲之云'群氏纠纷,莫审其会'。昔黄帝辛卯,日月不过,颛顼乙卯,四时不忒,景初壬辰,晦无差光,元嘉庚辰,朔无错景,岂非承天者乎。"冲之对曰:"寻古历法并同四分,四分之数久则后天,经三百年,朔差一日。是以汉载四百,食率在晦。魏代以来,遂革斯法,世莫之非者,诚有效于天也。章岁十九,其疏尤甚,同出前术,非见经典。而议云此法最古,数不可移。若古法虽疏,永当循用,谬论诚立,则法兴复欲施四分于当今矣,理容然乎?"并进一步分析说,"周汉之际,畴人丧业,曲技竞设,图谶实繁,或借号帝王以崇其大,或假名圣贤以神其说。是以谶记多虚,桓谭知其矫妄;古历舛杂,杜预疑其非直。按五纪论黄帝历有四法,颛顼、夏、周并有二术,诡异纷然,则孰识其正,此古历可疑之据一也。夏历七曜西行,特违众法,刘向以为后人所造。此可疑之据二也。殷历日法九百四十,而乾凿度云殷历以八十一为日法。若易纬非差,殷历必妄,此可疑之据三也。颛顼历元,岁在乙卯,而命历术云,此术设元,岁在甲寅。此可疑之据四也。《春秋》书食有日朔者凡二十六,其所据历,非周则鲁。以周历考之,检其朔日,失二十五,鲁历校之,又失十三。二历并乖,则必有一伪。此可疑之据五也。古之六术,并同四分,四分之法,久则后

天。以食检之，经三百年，辄差一日。古历课今，其甚疏者，朔后天过二日有余。以此推之，古术之作，皆在汉初周末，理不得远。且却校春秋，朔并先天，此则非三代以前之明征矣。此可疑之据六也。寻《律历志》，前汉冬至日在斗牛之际，度在建星，其势相邻，自非帝者有造，则仪漏或阙，岂能穷密尽微，纤毫不失。建星之说，未足证矣。""古历讹杂，其详阙闻，乙卯之历，秦代所用，必有效于当时，故其言可征也。"

古六历皆为四分之法，《宋书·律历志》的记载讲得很清楚，明言"古之六术，并同四分，四分之法，久则后天。"又指出，"考其远近，率皆六国及秦时人所造。其术斗分多，上不可检于春秋，下不验于汉魏，虽复假称帝王，只足以惑时人耳。"其实，两个世纪前，晋杜预就认为"周衰世乱，学者莫得其真。今之所传七历（外加虞历），皆未必是时王之术也。"

《汉书》开创了纪传体断代史成书的方法和范例。它记载了自汉高祖元年（前206）至淮阳王刘玄更始二年（24）整个西汉王朝230年间的史事。武帝以前，《汉书》基本上依据《史记》的材料。可能由于体例限制，《汉书·律历志》侧重记述了太初改历和刘歆所作的三统历及谱。而《史记·历书》著录了四分法一蔀76年的平闰、朔气大小余及章蔀首气朔加时的方位。因而《汉书》对汉初历法和古六历就不做全面介绍了。但，更为可能的是，斯时六历已不完整，或有的虽存上元甲子，而失其年数。战国扰攘，秦兼汉兴，楚汉相争，连年兵燹，历书历日所存无多。学人各传所闻，无法复原统一，《汉书》只得阙如。

汉末，宋仲子集七历以考春秋，案其夏周二历术数，皆与《汉书·艺文志》所记不同，故更名为真夏、真周历。晋杜预并考古今十历以验春秋，三统历仅得1食，其术最疏。所用十历，六历外，加三统、乾象、泰始（景初）、乾度等汉后四历。六历中夏周二历并皆两术，所增即宋仲子考订更名之真夏、真周历。所考日食合六历情况为：黄帝历得1食，颛顼历8食，夏历14食，真夏历1食，殷历13食，周历13食，真周历1食，鲁历13食。这结果与祖冲之考查所得相符。

《汉书·艺文志》收录的六历文献全都亡佚。现在无法知道它们的内容。杜预称汉末宋仲子集七历以考春秋，其夏周二历术数皆与艺文志所记不同，故更名为真夏、真周历。由此，斯时似尚存六历数据和步法。东汉灵帝光和二年（179）刘洪曾说，"甲寅、己巳谶虽有文，略其年数，是以学人各传所闻，至于课校，罔得厥正。"刘宋祖冲之也称，"古历讹杂，其详阙闻"，并言，"按五纪论黄帝历有四法，颛顼、夏、周并有二术，诡异纷然，则孰识其正"。由此看来，宋仲子、杜预、祖冲之考春秋历日、日食合历，依据的很可能是东汉末年学者补苴、整理、复原的六历步法和数据，而并非战国秦汉直接承传下来的术数。



黄帝、颛顼、虞、夏、殷、周、鲁诸历，因与天不合并非时王之术，已见前述，这是可以肯定的。但先秦时期确实存在古四分术却是不容怀疑的。文献及新出土的战国秦汉简牍皆可证明这一点。如《左传》中许多历日、历数均可用周历来解释。由《汉书·律历志》、《续汉书·律历志》记载可知，己巳颛顼秦所施用，汉兴草创，因而不易。故《吕氏春秋·序意》所记"维秦八年，岁在涒滩，秋甲子朔"，即合颛顼历。再有新出云梦秦简大量历日记载也与颛顼历一致。由《南郡守腾文书》所书秦王政"廿年四月丙戌朔"，《大事记》所注"今（秦王政）七年正月甲寅"，"十二年四月癸丑"，"十六年七月丁巳公终"，"廿年七月甲寅"，"廿七年八月己亥"，以及秦昭王时的几个后九月等，可知秦昭王时已行颛顼历。而云梦秦简《为吏之道》所引"魏户律"注记魏安釐王的"廿五年闰再十二月丙午朔"，经推步核验为夏历，为斯时魏所施行。

另一方面，考查分析得出，六历大都在战国时期与天相合。例如可证，颛顼历约当前340年前后合天，殷历约当前430年，鲁历约前450年，夏历（历元人正甲子雨水合朔）约前460年，真夏历（历元十一月甲子冬至合朔）约前170年，周历约前210年，黄帝历约前190年合天。在不同年代，六历失天大致情况如表3—11所示。

表3—11　六历合失天情况

	黄帝历	周历	殷历	鲁历	真夏历	颛顼历	夏历
前500年		－0.9474	－0.2105	－0.1579	－1.0790		－0.1316
前450年	－0.8684	－0.8158	－0.1053	－0.0263	－0.9211	－0.3684	
前400年	－0.6842	－0.6316	0.1053	0.1842	－0.7105	－0.1842	
前350年	－0.6053	－0.5526	0.2368	0.2895	－0.6316	－0.1053	
前250年	－0.1538	－0.0769	0.6154			0.3077	0.7083



用六历推算所得合朔时刻，早于实际天象者，称作先天，以负号表示；迟者为后天。由此看出，以六历步春秋日食悉为先天。拿周历为例，若春秋行周历，在公元前500年（定公十年）前后，约有95%的合朔发生在历面的初二，合天者（初一合朔）仅占5%。《春秋》记载的37次日食，如用周历推步，全都出现在月之初二、初三日。

虽然，六历不一定恰好在其合天的时期行用，但月相昭昭，它们的颁行时代距此也不会很远。看来古六历是战国时期（前5～前3世纪）各国先后创制并施行的。春秋时期行用的肯定不是这六种汉传的古历。

二、汉传六历有些数术并非战国之旧

(一)六历上元甲子为东汉学者推算追改

古以甲子纪日,干支纪年始见于西汉。如《淮南子·天文训》所书"淮南元年冬,太一在丙子","太阴元始建于甲寅,一终而建甲戌,二终而建甲午,三终而复得甲寅之元"。文帝以原淮南地封刘安(高祖少子刘长之子)等三人为淮南、衡山、庐江王。原淮南王刘长与人谋反,文帝前元六年(前 174)谪迁蜀地,于途中绝食而死。淮南王复封事当文帝前元十六年(前 164)。《汉书·翼奉传》记"今年太阴建于甲戌"。是岁二月戊午,陇西郡大地震,坏城郭房屋,压杀人众,山崩地裂,水泉涌出,关东饥,齐地人相食。元帝下诏罪己,因赦天下。次年夏四月乙未,孝武园白鹤馆灾。据考地震事值元帝初元二年(前 47)。《汉书·王莽传》新王莽在始建国五年(13)下书中称其年"岁在寿星。填在明堂,仓龙癸酉,德在中宫";而在天凤七年下书谓:"更以天凤七年,岁在大梁,仓龙庚辰,行巡狩之礼。厥明年,岁在实沈,仓龙辛巳,即土之中雒阳之都。"此外,公元初年(西汉末年和新室),刘歆在所作三统历及谱中以甲子纪汉元、太初以来诸年。言汉兴距上元年 143025 岁,岁在大棣之东井 22 度,鹑首之 6 度也。故汉志曰岁在大棣,名曰敦祥,太岁在午。为十二辰当午之年。"岁术"中,推岁所在,数从星纪起;欲知太岁,数从丙子起。称太初元年(前 104)岁星舍星纪次、北宫斗宿牛宿之间,甲子纪年为丙子。这里的"太一"、"太阴"、"仓龙"、"太岁"同义,悉指纪年甲子。由此诸例可知,西汉已有用干支纪年的做法,但多与岁名、岁在和丛辰配合使用。其称淮南元年(前 164)、太初元年(前 104)为丙子,汉高祖元年为午年,这与言元帝初元二年(前 47)甲戌,新王莽始建国五年(13)癸酉,天凤七年、八年为庚辰、辛巳互相抵牾。说明西汉处在始创时期,干支纪年尚未普及,还没有理顺历代王世王年与甲子纪年的关系。东汉以后,谶纬盛行,《考灵曜》、《命历序》皆有甲寅元。孝章皇帝元和二年改行四分。甲寅元所起在四分庚申元后 114 岁。因此,元和改历以后,不断有人以谶无明文而非四分。促使历算家疏理历代纪年,以谋求四分合于图谶之依据。顺帝汉安二年(143),太史令虞恭、治历宗䜣等论证:建历之本,必先立元,元正然后定日法,法定然后度周天以定分至。三者有程,则历可成也。四分历仲纪之元,起于孝文皇帝后元三年(前 161),岁在庚辰。上 45 岁,岁在乙未,则汉兴元年也。又上 275 岁,岁在庚申,则孔子获麟。276 万岁,寻之上行,复得庚申(文帝仲纪之元,加 605 元 1 纪,上得庚申)。岁岁相承,从下寻上,其执不误。此四分历元明文图谶所著也。太初元年岁在丁丑,上极其元,当在庚戌(《汉书·律历志》三统历谓,太初元年距上元 143127 岁,为 2385 甲子周期又 27 年,以丁丑岁上推,历元当庚戌岁),而曰丙子,言 144 岁超 1



辰，凡 993 超，岁有空行 82 周有奇，乃得丙子(143127 为 144、岁星岁数 1728 除，分别得 993 及 82，另有奇零 135、1431)。与西汉所纪不同。明确称太初元年(前 104)、孝文后元三年(前 161)、汉兴元年(前 206)、获麟(前 481)年之甲子分别为丁丑、庚辰、乙未和庚申。由此向上寻之，复得四分、太初上元为庚申(公元前 2760481 年)和庚戌岁(公元前 143231 年)。至此，按 60 周期追正了自西周共和以来历代各王世王年之甲子。中国历史上干支纪年方法才完善起来。《续汉书·律历志》记载的蔡邕、刘洪谓颛顼历元用乙卯，冯光、陈晃所据甲寅乃殷历之元，及历论给出的六历上元甲子，都是在此基础上推算追正的。

(二)六历上元积年亦当为东汉学者推算附入

仅知上元甲子还不够，直到《大唐开元占经》完整地给出了六历的上元干支和积年，汉传古六历的情况才算比较清楚了。《开元占经》卷一〇五《古今历积年及章率》所传六历上元甲子除夏历外皆与《续汉书·律历志》相同，积年都在 2761000 左右。

积年之法，创始于刘歆三统历。上推日月相合，五星会终，得一会 2626560 岁，三会为一统 7879680，三统 23639040，而复于太极上元。《春秋纬·元命包》、《易纬·乾凿度》皆以为开辟至获麟 2760000 岁。为证实四分历本起图谶，最得其正，选取仲纪之元，起于孝文皇帝后元三年，岁在庚辰，上 45 岁，岁在乙未，为汉兴元年。又上 275 岁庚申获麟，又上 2760000 复得庚申，作为四分上元之岁。下距文帝后元三年(前 161)庚辰 2760320。今观开元占经所载六历上元积年悉与谶纬开辟之元 2760000，三统七政会合之期 2626560 及后汉四分历庚申上元之数 2760320 相颉颃，可知六历上元积年的选取与三统、四分和谶纬开辟诸数不无关系，并非战国之旧。

(三)颛顼历元数有更易

东汉刘洪说，甲寅历于孔子时效，己巳颛顼秦所施用。己巳元即《考灵曜》旃蒙之岁乙卯元。蔡邕也称，颛顼历元用乙卯，冯光、陈晃所据甲寅则殷历之元，颛顼历元人正正月己巳朔旦立春，俱以日月起于天庙营室 5 度(《月令论》)。刘洪进一步指出，甲寅元(殷历)天正正月甲子朔旦冬至，七曜之起始于牛初。(颛顼历)乙卯之元人正己巳朔旦立春，三光聚天庙 5 度。课两元端，闰余差 3/152 月，朔 304，中节之余 29。

蔡邕、刘洪是东汉桓灵时人(2 世纪后期)。对古四分术，公元前 2 世纪成书的《淮南子》是这样说的：紫宫执斗而左旋，日行 1 度以周于天。日冬至峻狼之山(南

极之山)。日移1度,凡行182 $\frac{5}{8}$度,而夏至牛首之山(北极之山),反复365 $\frac{1}{4}$度而成一岁。天一元始,正月建寅,日月俱入营室5度。天一以始建76岁,日月复以正月入营室5度,无余分,名曰一纪。凡20纪,1520岁大终。日月星辰复始甲寅元。日行1度,而岁有奇1/4度。故4岁而积1461日。而复合故舍,80岁而复故日。又称,太阴元始建于甲寅,一终而建甲戌,二终而建甲午,三终而复得甲寅之元。

《续汉书·律历志》对四分术的特征是这样记述的:日周于天,一寒一暑,四时备成,万物毕改,摄提迁次,青龙移辰,谓之岁。岁首至也,月首朔也。至朔同日谓之章,同在日首谓之蔀,蔀终六旬谓之纪,岁朔又复谓之元。历数生也,乃立仪表,以校日景。景长则日远,天度之端也。日发其端,周而为岁,然其景不复,4周1461日,而景复初,是则日行之终。以周除日得365 $\frac{1}{4}$度,为岁之日数。日日行1度,亦为天度。察日月俱发度端,日行19周,月行254周,复会于端,是则月行之终也。以日周除月周,得1岁周天之数。以日1周减之,余12 $\frac{7}{19}$,则月行过周及日行之数也,为1岁之月。以除1岁日,为1月之数。冬至之分积如其法得1日,4岁而终,月分成闰,闰7而尽,其岁19,名之曰章。章首分尽,四之俱终,名之曰蔀。以1岁日乘之,为蔀之日数也。以甲子名之,20而复其初,是以20蔀为纪。纪岁青龙未终,三终岁后复青龙为元。

四分历岁余4年积1日,1岁之余为1/4日,故曰四分。冬至时刻每岁较365日移后1/4日,4岁1461日日始又恢复起始位置。80岁29220日正好为4和60的公倍数(487甲子),余分皆尽,冬至又起于甲子日始。故《淮南子·天文训》谓,80岁而复故日。《续汉书·律历志》云,“纪岁青龙未终,三终岁后复青龙为元”,这与《淮南子·天文训》称“三终而复得甲寅之元”,含义全同。只不过《续汉书·律历志》未实指元首岁名而已。青龙即前文苍龙,即现在说的纪岁甲子。

综上可知,《淮南子·天文训》记述了一种古代四分历。这可能是关于四分术最早的传世文献。根据所书“天一元始,正月建寅,日月俱入营室五度”的岁首建正和历元太阳位置,与上述蔡邕月令论、刘洪论月食中所说的颛顼历相合。因而可认定《淮南子·天文训》记述的是颛顼历。但蔡邕明言,“颛顼元用乙卯”、“天元正月己巳朔旦立春,俱以日月起于天庙营室五度”;刘洪也称,“推汉己巳元,则《考灵曜》旃蒙之岁乙卯元也”,“乙卯之元人正己巳朔旦立春,三光聚天庙五度”。由此可见,在西汉前期,颛顼历仍以焉逢摄提格甲寅为元。颛顼元用乙卯乃东汉学者所为,数有更易。仅此一例可证,汉传六历法数已非战国汉初之旧。



(四)历元和步法可能也有变化

战国时期成书的《左传》记载有分至启闭。僖五年传云:“春王正月辛亥朔,日南至。公既视朔,遂登观台以望,而书,礼也,凡分至启闭,必书云物,为备故也。”这里的分至为二分二至;启,立春、立夏;闭,立秋、立冬。知至迟战国时期已有八节。战国文献《楚辞》、《吕氏春秋》中有霜降、白露、小暑等节气名称。又有“蛰虫始振”、“始雨水”、“溽暑”、“霜始降”等称谓。但既与后世所传节、候名称不尽相同,又没有形成体系。完整的二十四节气名称始见于《淮南子·天文训》。

《史记·历书》云:“王者易姓受命,必慎始初,改正朔易服色,推本天元,顺承厥意。”颁历是君权神授的象征。臣民奉谁的正朔就表示接受他的统治。因此,“自殷周皆创业改制”,至清末三千多年,中国历法数十改,制历逾百家,是世界上历法科学最发达的国家。颁行的历法中,除太平天国天历外,全是阴阳合历。年月日悉依据天象得出,这是阴阳历的典型特征。中国以农业立国。顺应天时,安排农事是中国历法的主要功能。所以《尚书·尧典》说,“乃命羲、和,钦若昊天,历象日月星辰,敬授民时”。《史记·太史公自序》曰:“夫春生、夏长、秋收、冬藏,此天道之大经也,弗顺则无以为天下纲纪。故曰,四时之大顺,不可失也。”二十四节气就是为这个目的而设置的。两千多年来,我国农民耕田播种收割贮藏完全按节气行事。故中历又被称作农历。

清代以前,历法一直采用平气,二十四气由回归年等分而成。清至今日,以定气注历。将黄道均分24份,每份15°,太阳运行到每个分点,即为交节之时。由于它的时日,由回归年或太阳运动决定,长度与月亮朔望盈亏无关,属于阳历系统,使中历具有很强的阳历性质。另外,二十四气是中国的独创,也是中历有别于其他国家历法和阴阳历的关键所在。

二十四节气是在四时八节基础上发展而成。殷周之际已知四时,春秋至迟战国已有分至启闭八节,四立为四时之始,分至是四季之仲。完整的二十四气名称虽始见于《淮南子》,而节气体系则可能形成于战国末期。至今在传世或出土的秦汉初文献、简牍中还未发现以八节之外十六气注记的历日。东汉历简似也未见。当然,这并非说西汉历法只用八节没有其他节气。因为西汉施行太初历以后,置闰依闰余或中气而定。文献和简牍中年中闰月屡有所见。王莽之际,刘歆作三统,规定“朔不得中,是谓闰月”。就是说在哪一个朔望月中没有中气,即以该月为闰月。三统历统术中,刘歆并给出计算闰月和二十四气的推步方法。

所以,至迟在两汉施行三统历时期,已将二十四气引入历法,并用以确定年中闰月的位置。秦至汉初历法都没有采用无中置闰,而将闰月置于年终,称后九月。

是时以冬至总在历法中固定的月份作为设置闰月的依据,如天正历法的正月或寅正历法的十一月。

秦至汉初,已有二十四气制度,但历法中并未依此作为设闰的依据。古六历先后创制于战国,并分别在战国、秦汉初时期行用。战国时代更早,二十四节气或不完整,或还没有形成体系。杜预、祖冲之悉依无中置闰法,以汉传古六历研究春秋历日和日食的合历情况。先秦时期是否使用这种闰法,是很值得怀疑的。而且目前亦无可靠的材料予以证实。云梦秦简《为吏之道·魏户律》所书"廿五年闰再十二月丙午朔",朔闰俱合夏历,但夏历是年无中之月适在年终,无法判断其时确切的闰法。《左传》有年中闰月的记载,如文公元年闰三月,《史记》引之,知所记确系先秦旧文,但学者全都予以否定。昭二十年闰月,夹在八月、十月记事之中。我们前节已指出,是否为闰八月,仍有可议之处。无中置闰是历法的一种推步方法,有其规律可循。退一步讲,左传或秦简中如确有某个年中闰月记载,孤证单行也不足为征。根据对春秋历日的考查及上面对二十四气的分析,鲁国历法及战国六历很可能仍采用年终闰。杜预、祖冲之采用的无中置闰法,以及所称颛顼历以小雪中气必在十月作为置闰标准等步法,可能均非战国六历之术数。无中置闰法与固定冬至月闰法不仅闰月有别,对于采用夏正的历法,如颛顼历、夏历,其设置闰月的年份也不尽相同。

第七节　六历法数与推步

一、六历法数

汉传古六历,都是四分法,所差者仅上元和历元气朔不同而已。四分术法数如下:

章岁 19　　章闰 7　　章月 235

蔀岁 76　　蔀月 940　　蔀日 27759

元法 4560　　纪法 1520

$$1\text{岁日数}=\text{蔀日}/\text{蔀岁}=27759/76=365\frac{1}{4}\text{日}$$

岁的余分 4 年积 1 日,每岁 1/4 日,故曰四分。

$$1\text{岁月数}=\text{蔀月}/\text{蔀岁}=940/76=12\frac{28}{76}=12\frac{7}{19}\text{月}$$

$$1\text{月日数}=\text{蔀日}/\text{蔀月}=27759/940=29\frac{499}{940}\text{日}$$



$$中节日数=岁实/24=365\frac{1}{4}/24=15\frac{7}{32}日$$

阴阳合历的年月日全依据天象，年、月的长度皆不能为日整除，而历法要求历年所含的月、历月的日悉为整数。在阴阳历中，年只能取 12 或 13 个月；月必须定为 29、30 日。年 12 月称平年、13 月叫闰年，所加之月谓闰月；月 30 日为大月，29 日是小月。农事活动有很强的时间性，为了保证岁首稳定，时节与月名有紧密的对应关系，就要求及时地设置闰月，以便历年的平均长度在较短的周期内与回归年相近。这就是历法所说的“以闰月定四时成岁”。同样，月相醒目，易于识辨，必须安排大小月，才能调整日序与盈亏相侔。1 岁比 12 月长出 7/19 个朔望月。显然，19 个回归年(岁)包含有 235 个朔望月($19\times12\frac{9}{17}$月=235 月)，比 19 个平年($19\times12=228$)多 7 个月。因此，只要在 19 历年中，设 7 个闰月。这样，19 个历年长度与 19 个回归年的长度正好相等。就是说，只要在 19 个历年中，安排 12 个平年、7 闰年，则在这个时间里得出的历年平均长度与回归年完全一致。四分法称 19 年为章，章 235 月内有闰月 7。

若某年天正月合朔和冬至同日同时并恰好在夜半(0^h)。那么 19 年(1 章)后，冬至和合朔又会同日同时，但时刻不在夜半 0^h 而是 18^h。因为

$$19个冬至相距=19\times365\frac{1}{4}=6939\frac{3}{4}日$$

$$235个朔望月长=235\times29\frac{499}{940}=6939\frac{3}{4}日$$

4 章为蔀，蔀 76 年是 940 月、27759 日。故一蔀后，至朔同日同时(相齐)又起于夜半。

20 蔀为纪，1 纪 1520 年、555180 日。日数可为 60 除尽。故，1 纪后，至朔、日名方可复原。

3 纪为元，1 元 4560 年，为 60 的整数倍。这样，1 元后，至朔、日名、岁名悉皆复初。所以，元是四分法气朔、纪年、纪日干支悉数复始的大循环周期。

综上所述，四分法章蔀纪元有下列关系：

至朔相齐谓之章，同在日首谓之蔀，蔀终六旬谓之纪，岁朔又复谓之元。

每年岁始，冬至与天正合朔间的时距称作闰余。由此定义知，闰余实际上就是冬至月龄。它可用日，也可用月的分数来表示。是四分法设闰的依据。古六历除颛顼外，其他五历皆建子，以含冬至之月为正月。蔀首之年(称入蔀第 1 年)，冬至合朔相齐起于甲子日夜半。冬至月龄，即闰余为 0。年 12 月。而 1 岁，即冬至到下一冬至相距 $365\frac{1}{4}$天、$12\frac{7}{19}$个月。次年(入蔀第 2 年)岁始，天正正月朔大余 54，小

余 348(以 940 为分母);冬至大余 5,小余 8(以 32 为分母)。至朔相距(冬至月龄或闰余)$10\frac{827}{940}$日,即$\frac{7}{19}$月。再一年(入蔀第 3 年)岁始,天正月朔大余 48,小余 696;冬至大余 10,小余 16。至朔相距,即冬至月龄或闰余为 $21\frac{714}{940}$日、$\frac{14}{19}$月。

由于回归年(冬至到冬至)比 12 个朔望月长 $10\frac{827}{940}$日或$\frac{7}{19}$月,若以每年 12 个月,则 3 年后岁始之月合朔将与冬至相距$32\frac{601}{940}$天或 $1\frac{2}{19}$月。大于 1 个月。这样,岁首将不是建子而成为冬至前斗柄指亥之月了。为保证岁首斗建不移,就必须在其前一年设 1 闰月。这样,四分法中入蔀第 3 年为闰年,有 13 个月。置了闰月之后,四分术入蔀第 4 年岁始,天正月朔大余 12,小余 603;冬至大余 15,小余 24。岁首仍为建子,含冬至之月。岁始闰余$3\frac{102}{940}$日或$\frac{2}{19}$月。

上列各朔,至大小余数值是这样得出的:

$$12\text{ 朔望月}=12\times 29\frac{499}{940}=354\frac{348}{940}\text{日}$$

$$\text{冬至到冬至}=\text{回归年长}=365\frac{1}{4}=365\frac{235}{940}\text{日}$$

两数相减,得 $10\frac{827}{940}$日。朔望月长 $29\frac{499}{940}$日,$\frac{7}{19}$月为$\frac{7}{19}\times 29\frac{499}{940}=10\frac{827}{940}$日,各年大小余计算,皆与此类似。

古以甲子纪日,甲子以 60 为周期。历法计算推得的日数要化为干支,必须去掉 60 的倍数。求出的小于 60 之余数值称作大余。为此可以用累减 60 的方法,对于较大的数值这样做可能太麻烦,所以多采用以 60 来除,所得整数去之,余数即为所求之大余值。中历推步常要碰到求余数的计算。本书以后将用方括号外加下标 R 表示这种求余的算法。例如

$$\text{合朔大小余}=\left[N\times 29\frac{499}{940}/60\right]_R$$

$$\text{冬至大小余}=\left[M\times 365\frac{1}{4}/60\right]_R$$

或表示为下列同余式

$$N\cdot\text{朔望月}\equiv\text{合朔大小余}\pmod{60}$$

$$M\cdot\text{回归年}\equiv\text{冬至大小余}\pmod{60}$$

上例中,N、M 为正整数。同余式中 N、M 可为任意整数、分数或小数。

闰余注以月的分数形式比较整齐直观。故常以 1/19 月为单位表示之。如,蔀



首之年闰余为0，人蔀2年闰余7，3年14，4年2，5年9，6年16，7年4，8年11，9年18，等等。为各年岁始之值。其值自0始，止于18，每年增加7。某年加7其值等于或大于19，则斯年置闰，闰余值加7后减19为次年岁始值。即，岁始闰余大于等于12之年闰，设13月。通常闰月置其年年终。如此，虽可保持岁首建正稳定，但有些时候，如岁始闰余为17、18等大数值年份，时令与月名可有较多偏离。为解决这个问题，于是就发展形成了年中置闰的方法。

早年设年中闰月，仍是采用闰余来确定。闰余每年增加7，即冬至月龄每年加大$\frac{7}{19}$月或10$\frac{827}{940}$日。年12月，则相当每月闰余增$\frac{7}{19}/12=\frac{7}{228}$月。岁始闰余大于12(分子分母各乘以12，可写成$\frac{144}{228}$月)之年有闰，当闰何月，则用岁始闰余累加7/228月，当其和等于或刚超过1个月($\frac{228}{228}$月)时，是月即为闰月。就是说，自冬至月数起(是月不计)，计数达到或超过$\frac{228}{228}$月所加之7/228的次数，即得该闰之月名。年中闰月的设置，可以较早地调整时令的偏移。

秦汉以后，历法中引入二十四气，特别是三统历规定“朔不得中，是谓闰月”后，农时、节气在历法中的位置更加稳定。自此至今2000年来，历法中的闰月都是按照这个原则设置的。八节中，二分二至昏时，斗柄指向子午卯酉、北南东西四正向；时值仲春、仲秋、仲夏、仲冬四“仲”，称作“中”。立春、立夏、立秋、立冬四立，时当四孟，斗指东北、东南、西南、西北四维，是谓“节”。故《汉志》曰，“启闭者，节也；分至者，中也。”由此，将二十四气分为中、节。十二气为中气，十二气是节气。冬至为二十四气之首，斗柄指子，为中气。自冬至开始，中节相间，二十四气依次排列。《左传》云：“先王之正时也，履端于始，举正于中，归余于终。履端于始，序则不愆；举正于中，民则不惑；归余于终，事则不悖。”三统历据此规定，“节不必在其月”，“时中必在正数之月”。每个月都有固定对应的中气，每个中气必须保持在历法规定的月中。例如，冬至为天正月(子月)中气，大寒为地正月(丑月)中气，雨水为人正月(寅月)中气，春分为卯月中气，等等。它们不能出现在历法上其他的月份之中。岁终置闰只能保持岁首稳定，冬至总在子月，但不能维系其他中气与规定的月名一一对应。

四分术每气长15$\frac{7}{32}$天。一中一节为30$\frac{14}{32}$日，比一朔望月多852.25/940日(0.9066489362日)，合1.030701754月(1$\frac{7}{228}$月)。1岁二十四气，章19年正好与19岁等长。一章19年中有456气，内228节气，228中气。章月235。这样235个

朔望月中，总有 7 个月内没有节气，另外 7 个月里没有中气。根据"朔不得中，是谓闰月"，就将不含中气的这 7 个月作为章内的闰月。这种置闰方法称作"无中置闰法"。

岁首闰余大于$\frac{12}{19}$月（$\frac{144}{228}$月）的年份，每月累加$\frac{7}{228}$月，当其和积满 1 整月$\left(\frac{228}{228}\right)$的月份，即是闰月。前面介绍的这种置年中闰月方法确定的闰月，有时前后还会有 1 个月的摆动。比之无中置闰稍为逊色。后者能保持每年中气悉在规定的月份之内。各月的节气在本月的上半月或前月的下半月之间。使得与农业生产紧密相关的二十四气日期，总在它的平均时刻前后不出 15 天的范围之内。基本可以满足农事活动的需要。

无中置闰法与岁终闰法（又称固定冬至月闰法）不仅闰月位置不同，对于岁首建寅（夏正、寅正）的历法，设置闰月的年份也有一定参差。而这个差别对采用周正（建子、子正）的历法却并不存在。也就是说，对于黄帝、殷、周、鲁历而言，设年中闰、年终闰的年份是一致的。古六历在一蔀内，年中、年终闰月位置列于表3－12可供参考。

四分术的元（4560 年）是至朔、日名、年名悉数复始的大循环周期。由六历各元首的年名、日名可依次列出各纪首岁名及各蔀首的日名和岁名。根据四分术法数可很方便地算出一蔀 76 年 940 月 1824 个节气的朔气积日和大小余、每年岁始闰余值和每年的月数。这样，欲推算任一年的历日气朔，只要求出是年所入纪、蔀年数，即可很容易地查出和推得。可是《汉书》、《续汉书》都没有记载六历起算的年数，使人无从下手。直到《开元占经》给出六历上元甲子和积年，由此布算所得结果与各代史志、纬书中的零散记述互相印证，六历情况才算比较清楚了。

《开元占经》所传六历上元甲子及积年，数据如下：

古今历上元以来至今开元二年（714）甲寅岁积

黄帝历上元辛卯至今 2760863 年，当前 2760150；

颛顼历上元乙卯至今 2761019 年，当前 2760306；

夏历上元乙丑至今 2760589 年，当前 2759876；

殷历上元甲寅至今 2761080 年，当前 2760367；

周历上元丁巳至今 2761137 年，当前 2760424；

鲁历上元庚子至今 2761334 年，当前 2760621。

《续汉书》谓夏历上元用丙寅，与《开元占经》不同。依据夏历校验春秋史日、日食及战国简牍考知，上元应为乙丑，《开元占经》所传为是。

表 3－12 古六历一蔀内闰月位置表(固定冬至月闰月置年终)

历／闰法／入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
1										
2					闰		闰		后九月	后九(闰四)
3	闰	闰八月	闰	闰六月		闰六月		闰八月		
4										
5					闰		闰		后九月	后九(闰十二)
6	闰	闰五月	闰	闰三月		闰三月		闰五月		
7									后九月	后九(闰九)
8			闰	闰十二月	闰	闰十二月	闰			
9	闰	闰二月						闰二月		
10					闰				后九月	后九(闰六)
11	闰	闰十一月	闰	闰八月		闰九月	闰	闰十一月		
12										
13					闰		闰		后九月	后九(闰二)
14	闰	闰七月	闰	闰五月		闰五月		闰七月		
15									后九月	
16					闰		闰			后九(闰十)
17	闰	闰三月	闰	闰二月		闰正月		闰三月		
18					闰				后九月	后九(闰七)
19	闰	闰十二月	闰	闰十一月		闰十月	闰	闰十二月		

续表

历 / 闰法 / 入蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
20										
21					闰		闰		后九月	后九（闰四）
22	闰	闰九月	闰	闰七月		闰七月		闰九月		
23										
24					闰		闰		后九月	后九（闰正）
25	闰	闰五月	闰	闰三月		闰三月		闰五月		
26									后九月	后九（闰九）
27			闰	闰十二月	闰	闰十一月	闰			
28	闰	闰正月						闰正月		
29					闰		闰		后九月	后九（闰五）
30	闰	闰十月	闰	闰九月		闰八月		闰十月		
31										
32					闰		闰		后九月	后九（闰二）
33	闰	闰七月	闰	闰五月		闰五月		闰七月		
34										
35					闰		闰		后九月	后九（闰十一）
36	闰	闰三月	闰	闰正月		闰正月		闰三月		
37					闰				后九月	后九（闰七）
38	闰	闰十一月	闰	闰十月		闰九月	闰	闰十一月		



续表

历法/闰/人部年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅，立春，十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
39										
40					闰		闰		后九月	后九（闰三）
41	闰	闰九月	闰	闰七月		闰七月		闰七月		
42										
43					闰		闰		后九月	后九（闰正）
44	闰	闰六月	闰	闰三月		闰四月		闰六月		
45									后九月	后九（闰九）
46			闰	闰十一月	闰	闰十二月	闰			
47	闰	闰二月						闰二月		
48					闰		闰		后九月	后九（闰五）
49	闰	闰十月	闰	闰九月		闰八月		闰十月		
50										
51					闰		闰		后九月	后九（闰二）
52	闰	闰七月	闰	闰六月		闰五月		闰七月		
53										
54					闰		闰		后九月	后九（闰十一）
55	闰	闰四月	闰	闰二月		闰二月		闰四月		
56					闰				后九月	后九（闰七）
57	闰	闰十二月	闰	闰十月		闰十月	闰	闰十二月		

续表

历 闰法 人蔀年	黄帝、殷、周（建子、冬至）		鲁历（闰余1，建子、冬至）		夏历（建寅，历元冬至）		夏历（建寅，历元雨水）		颛顼（建寅、立春、十月）	
	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰	固定至月	无中闰
58										
59					闰		闰		后九月	后九（闰三）
60	闰	闰八月	闰	闰七月		闰六月		闰八月		
61										
62					闰		闰		后九月	后九（闰十二）
63	闰	闰五月	闰	闰四月		闰三月		闰五月		
64									后九月	后九（闰九）
65			闰	闰十二月	闰	闰十二月	闰			
66	闰	闰二月						闰二月		
67					闰		闰		后九月	后九（闰六）
68	闰	闰十月	闰	闰八月		闰八月		闰十月		
69										
70					闰		闰		后九月	后九（闰三）
71	闰	闰六月	闰	闰五月		闰四月		闰六月		
72									后九月	
73					闰		闰			后九（闰十）
74	闰	闰三月	闰	闰二月		闰正月		闰三月		
75					闰				后九月	后九（闰七）
76	闰	闰十二月	闰	闰十月		闰十月	闰	闰十二月		



二、六历步法

(一)推入蔀年

置上元至所求年积年，满元法 4560 去之，所余在纪法 1520 以下者，即入天纪年数；以上者，满 1520 去之，余为入地纪年数；如满 3040，去之，余为入人纪年数。

置入纪年以蔀法 76 除之，所得及余数加 1，分别为所入蔀及入蔀年。即

$$入元年 = [上元积年 / 元法\ 4560]_R$$

$$入纪年 = 入元年 / 纪法\ 1520$$

$$= 入纪数\frac{入纪年}{1520} = \begin{cases} 0\ \dfrac{入天纪年}{纪\quad 法} \\ 1\ \dfrac{入地纪年}{纪\quad 法} \\ 2\ \dfrac{入人纪年}{纪\quad 法} \end{cases}$$

$$入蔀年 = 入纪年/蔀法\ 76 = 入蔀数\frac{入蔀年}{76}$$

得数、余数皆自 1 起，算外(1 不计入)，即，商、余皆加 1，为入纪、蔀数，入纪、蔀年。

(二)求积月、闰余

$$(入蔀年-1)\times\frac{章月\ 235}{章法\ 19} = 积月\frac{闰余}{章法\ 19}$$

黄帝、颛顼、夏、殷、周五历用此式。鲁历为：

$$[(入蔀年-1)\times 章月\ 235 + 蔀首闰余\ 1]/ 章法\ 19$$

$$= 积月\frac{闰余}{章法\ 19}$$

鲁历推步详见下节。

(三)求朔积日、大小余

$$朔积日 = 积月 \times 蔀日\ 27759/ 蔀月\ 940$$

$$正朔大小余 = [朔积日 /60]_R$$

大余从所入蔀名起，算外(蔀首日名不计)，则得黄帝、殷、周、鲁历天正朔，颛顼、夏历人正朔。小余 441 以上，其月大。

$$次月朔大小余 = 正朔大小余 + 29 + \frac{499}{940}$$

累加，得各月。大余满 60 去之，小余满 940，得 1，进位，从大余。

(四)求冬至、立春及各节气

$$气积日 = (人蔀年 - 1) \times 365\frac{1}{4}$$

$$冬至(立春)大小余 = \left[(人蔀年 - 1) \times 5\frac{1}{4}/60\right]_R$$

大余从所入蔀名起,算外。黄帝、夏、殷、周、鲁历为冬至,颛顼历为立春日。

$$次气大小余 = 冬至(立春)大小余 + 15 + \frac{7}{32}$$

累加,得各气,大余满 60 去之,小余满 32 得 1,进位成大余。

四分术推步方法非常简单。蔀首之日气朔相齐,起于夜半。朔气积日、大小余悉皆为 0。递加朔望月 $29+\frac{499}{940}$日得各月朔积日、小余;递加气策 $15+\frac{7}{32}$日,为各气气积日及小余。朔、气策分别累加 940 和 1824 次,得朔气积日 27759,小余又全为 0,为一部 76 年气朔积日、小余值。气朔积日各以 60 去之,得一蔀 940 月、1824 气,各月朔、中节大小余历谱。以所入蔀首日名命之,算外,即各朔、气干支、小余。一岁有 24 气,在谱上一一注明。使岁首月名固定是设闰的基本目的。以每岁冬至(颛顼为立春)积日找与其对应的月朔积日,得各年岁首、平闰。对于闰年,将是年各月朔积日一一寻对应的中气,其无中气之朔,即为按无中置闰法当闰之月。

六历中,黄帝、夏、殷、周、鲁五历皆以天正朔旦冬至相齐起于甲子夜半为历元(计算起点),其各年冬至大小余、月龄有下列关系(t 为距元的年数):

$$元首年\ t = 0,冬至大小余 = \left[365\frac{1}{4} \times 0/60\right]_R = 0$$

$$t=1,冬至大小余=\left[365\frac{1}{4}\times 1/60\right]_R = 5\frac{1}{4}$$

$$t=2,冬至大小余=\left[365\frac{1}{4}\times 2/60\right]_R = 5\frac{1}{4}\times 2$$

$$t=3,冬至大小余=\left[365\frac{1}{4}\times 3/60\right]_R = 5\frac{1}{4}\times 3$$

$$入元\ t\ 年,冬至大小余=\left[365\frac{1}{4}\times t/60\right]_R$$

冬至与天正朔的时距为月龄,又称闰余。

$$t=0,冬至月龄=\left[365\frac{1}{4}\times 0/29\frac{499}{940}\right]_R = 0$$

$$t=1,冬至月龄=\left[365\frac{1}{4}\times 1/29\frac{499}{940}\right]_R$$



$$=10\frac{827}{940}\text{日}=\frac{7}{19}\text{月}$$

$t=2$，冬至月龄$=\left[365\frac{1}{4}\times 2/29\frac{499}{940}\right]_R$

$$=2\times\frac{7}{19}\text{月}$$

$t=3$，冬至月龄$=\left[365\frac{1}{4}\times 3/29\frac{499}{940}\right]_R$

$$=3\times\frac{7}{19}\text{月}$$

入元 t 年，冬至月龄$=\left[365\frac{1}{4}\times t/29\frac{499}{940}\right]_R$

因为

$$\left[365\frac{1}{4}/60\right]_R=5\frac{1}{4}$$

$$\left[365\frac{1}{4}/29\frac{499}{940}\right]_R=10\frac{827}{940}$$

所以，四分历步气朔公式可简化为：

冬至大小余$=\left[5\frac{1}{4}t/60\right]_R$

冬至月龄（闰余）$=\left[10\frac{827}{940}t/29\frac{499}{940}\right]_R$

天正朔大小余＝冬至大小余－冬至月龄

六历中，颛顼历以人正朔旦立春起于己巳夜半为历元，其步气朔公式为：

立春大小余$=\left[5\frac{1}{4}t/60\right]_R$

立春平月龄（闰余）$=\left[10\frac{827}{940}t/29\frac{499}{940}\right]_R$

人正朔大小余＝立春大小余－立春月龄

颛顼历朔气大余自己巳数起，算外，得人正朔、立春干支；余五历皆以甲子起算，甲子不计，为天正朔、冬至日。不难看出：$5\frac{1}{4}\times 80=7\times 60$，为 7 个甲子周期；$10\frac{827}{940}\times 19=7\times 29\frac{499}{940}$，是 7 个朔望月长度。

即有

$$\left[5\frac{1}{4}\times 80/60\right]_R=0$$



$$\left[10\frac{827}{940}\times 19/29\frac{499}{940}\right]_R=0$$

因此，四分法中有如下关系：冬至大小余 80 年一循环，而冬至月龄以 19 年（一章）为周期。于是令

$$t_1=[t/80]_R,t_2=[t/19]_R$$

代入前式，得：

$$冬至大小余=\left[5\frac{1}{4}\times t_1/60\right]_R$$

$$冬至月龄=\left[10\frac{827}{940}\times t_2/29\frac{499}{940}\right]_R$$

计算出 80 年的冬至大小余和 19 年冬至月龄（闰余）值，做成表（表 3－13、表3－14）。四分术中，一元 4560 年是气朔、日名、岁名悉数复初的大周期。因此，只要知道，所求之岁的入元年数 t，黄帝、夏、殷、周、鲁五历天正朔、冬至，颛顼历人正朔、立春大小余，以及闰余、闰月，皆可由 t_1、t_2 立即查出。递加朔策、气策得各月各气干支、时刻。

表 3－13　四分术冬至大小余表

t_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	$5\frac{1}{4}$	$10\frac{2}{4}$	$15\frac{3}{4}$	21	$26\frac{1}{4}$	$31\frac{2}{4}$	$36\frac{3}{4}$	42	$47\frac{1}{4}$	$52\frac{2}{4}$
10	$57\frac{3}{4}$	3	$8\frac{1}{4}$	$13\frac{2}{4}$	$18\frac{3}{4}$	24	$29\frac{1}{4}$	$34\frac{2}{4}$	$39\frac{3}{4}$	45
20	$50\frac{1}{4}$	$55\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	6	$11\frac{1}{4}$	$16\frac{2}{4}$	$21\frac{3}{4}$	27	$32\frac{1}{4}$	$37\frac{2}{4}$
30	$42\frac{3}{4}$	48	$53\frac{1}{4}$	$58\frac{2}{4}$	$3\frac{3}{4}$	9	$14\frac{1}{4}$	$19\frac{2}{4}$	$24\frac{3}{4}$	30
40	$35\frac{1}{4}$	$40\frac{2}{4}$	$45\frac{3}{4}$	51	$56\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{4}$	$6\frac{3}{4}$	12	$17\frac{1}{4}$	$22\frac{2}{4}$
50	$27\frac{3}{4}$	33	$38\frac{1}{4}$	$43\frac{2}{4}$	$48\frac{3}{4}$	54	$59\frac{1}{4}$	$4\frac{2}{4}$	$9\frac{3}{4}$	15
60	$20\frac{1}{4}$	$25\frac{2}{4}$	$30\frac{3}{4}$	36	$41\frac{1}{4}$	$46\frac{2}{4}$	$51\frac{3}{4}$	57	$2\frac{1}{4}$	$7\frac{2}{4}$
70	$12\frac{3}{4}$	18	$23\frac{1}{4}$	$28\frac{2}{4}$	$33\frac{3}{4}$	39	$44\frac{1}{4}$	$49\frac{2}{4}$	$54\frac{3}{4}$	0

注：颛顼历为立春大小余。

颛顼历可由前式得出立春月龄，即立春距人正朔的日数。立春月龄加气策 $15\frac{7}{32}$ 日得雨水月龄。每年闰余增加 $\frac{7}{19}$ 月或 $10\frac{827}{940}$ 日，则相当每月增加 $\frac{7}{19}/12$ 月（$\frac{7}{228}$ 月）或 $10\frac{827}{940}/12=\frac{852.25}{940}$ 日。雨水为冬至后二月、寅月中气。因此，欲返求颛顼历冬至月龄，只需以 $\frac{7}{228}$ 月或 $\frac{852.25}{940}$ 日连续减雨水月龄两次即得。可写作：

$$雨水月龄=立春月龄+气策\ 15\frac{7}{32}日$$



$$冬至月龄=雨水月龄-2\times\frac{852.25}{940}日$$

$$=立春月龄+15\frac{7}{32}-2\times\frac{852.25}{940}日$$

$$=\left[10\frac{827}{940}\times t_2/29\frac{499}{940}\right]_R+15\frac{7}{32}-1\frac{764.5}{940}日$$

表3－14 四分术冬至月龄(闰余)值

t_2	闰 余	闰 月	t_2	闰 余	闰 月
0	0		10	$20\frac{193}{940}$ $\frac{13}{19}$	九十(十、十一)
1	$10\frac{827}{940}$ $\frac{7}{19}$		11	$1\frac{521}{940}$ $\frac{1}{19}$	
2	$21\frac{714}{940}$ $\frac{14}{19}$	七八(八九)	12	$12\frac{408}{940}$ $\frac{8}{19}$	
3	$3\frac{102}{940}$ $\frac{2}{19}$		13	$23\frac{295}{940}$ $\frac{15}{19}$	五六(六七)
4	$13\frac{929}{940}$ $\frac{9}{19}$		14	$4\frac{623}{940}$ $\frac{3}{19}$	
5	$24\frac{816}{940}$ $\frac{16}{19}$	三四(五六)	15	$15\frac{510}{940}$ $\frac{10}{19}$	
6	$6\frac{204}{940}$ $\frac{4}{19}$		16	$26\frac{397}{940}$ $\frac{17}{19}$	正二(三四)
7	$17\frac{91}{940}$ $\frac{11}{19}$		17	$7\frac{725}{940}$ $\frac{5}{19}$	
8	$27\frac{918}{940}$ $\frac{18}{19}$	十一十二(正二)	18	$18\frac{612}{940}$ $\frac{12}{19}$	(十一十二)
9	$9\frac{306}{940}$ $\frac{6}{19}$				

注：颛顼历为立春月龄。

六历中，凡冬至月龄大于$\frac{12}{19}$月或$18\frac{612}{940}$日之年有闰。一般置闰于是年年终。如设闰年中，则以$\frac{7}{228}$月($\frac{852.25}{940}$日)累加冬至月龄，至满$\frac{228}{228}$月(或$29\frac{499}{940}$日)时，即于该月设闰。颛顼历闰月皆置本年九月后，称后九月。

夏历用人正，以建寅之月为岁首。故闰余$\frac{11}{19}$月(或$17\frac{91}{940}$日)已上之年有闰。岁前冬至月龄为$\frac{11}{19}$月之年，闰斯年年终十二月，称闰再十二月。

《开元占经》所传六历上元积年，皆与纬书开辟之元相近。去605元，得各历近距之元为：

黄帝历　前1350年辛卯

颛顼历　前1506年乙卯

夏　历　前 1076 年乙丑

殷　历　前 1567 年甲寅

周　历　前 1624 年丁巳

鲁　历　前 1821 年庚子

由六历近距之元至所求年 t，依上法，求出 t_1、t_2，查表 3－13、表 3－14，得各年朔气。

由 $t_1=[t/80]_R$，$t_2=[t/19]_R$，即 $t\equiv t_1(\mathrm{mod}80)$，$t\equiv t_2(\mathrm{mod}19)$。

已知 t_1、t_2，解一次同余式，可以返求 t（取最小值），从而可判断其时所用六历是哪一种。这有两种情况：

(1)已知冬至干支(大余)和日序。由此查四分术 80 年冬至干支表(表 3－13)可得出 t_1，冬至日序即月龄的加余进位整数，根据表 3－14，四分历一章冬至月龄表寻求 t_2。解上列一次同余式，求出 t。但冬至干支大余在表 3－13 的 80 数值中会有 20 个重复。因此有时 t_1 需进一步探求。四分法冬至干支悉可表示为$\frac{3}{4}n$，其中 n 为 0 至 80 的整数，n、t_1 可表示为

$$n=\mathrm{Int}\left[\text{冬至大余}/\frac{3}{4}\right]$$

$$t_1=[23n/80]_R,\text{即 } t_1\equiv 23n(\mathrm{mod}80)$$

冬至干支相距 23 年，小余增加$\frac{3}{4}$。由此关系可求出 t_1。式中，Int 表示求方括号算式的整数。

(2)年中闰月及朔日干支已知。根据前面介绍的由闰余计算年中闰月的方法，反过来，可由年中闰月推闰余。因此以闰月查表 3－14，可选求 t_2 及冬至月龄值。由于

天正朔大小余＝冬至大小余－冬至月龄

显然，闰月朔可由下式求出

$$\text{闰月朔大小余}=\left[\text{天正朔}+m\times 29\,\frac{499}{940}/60\right]_R$$

$$=\left[\text{冬至大小余}-\text{冬至月龄}+m\times 29\,\frac{499}{940}/60\right]_R$$

m 为闰月距天正的月数。此式中冬至月龄由 t_2 得出，m 及闰月朔大余皆为已知，故冬至大小余可求。由此依表 3－13 得 t_1。t_1、t_2 已知，则 t 可解出。

由所求年距近距元为入元年，可很简单推出入蔀数、入蔀年。根据四分术一蔀历谱，也可很方便地得出任一年的朔气干支、时刻。六历各蔀首日名及春秋、战国、秦汉初时期，各历入蔀年列于表 3－15。



表 3—15　古六历入蔀年

历 \ 蔀名	五历入蔀年(公元前)							颛顼历蔀年	
	鲁历			殷历	周历	黄帝历	夏历	蔀名	公元前
	闰余 0	《开元占经》	闰余 1						
甲子	321	301	481					己巳	
癸卯	245	225						戊申	
壬午	169	149						丁亥	
辛酉								丙寅	
庚子								乙巳	
己卯							696	甲申	
戊午							620	癸亥	
丁酉							544	壬寅	
丙子							468	辛巳	
乙卯							392	庚申	
甲午							316	己亥	
癸酉				731	788	514	240	戊寅	670
壬子				655	712	438	164	丁巳	594
辛卯				579	636	362		丙申	518
庚午	777	757		503	560	286		乙亥	442
己酉	701	681		427	484	210		甲寅	366
戊子	625	605	785	351	408	134		癸巳	290
丁卯	549	529	709	275	332			壬申	214
丙午	473	453	633	199	256			辛亥	138
乙酉	397	377	557	123	180			庚寅	

《史记·历书·历术甲子篇》记载了四分术一蔀 76 年每年的月数、天正月(含冬至之月)合朔、冬至大小余数值,及每章章首冬至合朔加时太阳所在的方位:正北、正西、正南、正东。依表 3—15 六历入蔀年查出所求年入何蔀、入何年,由《历术甲子篇》即得是年平闰、天正朔、冬至大小余数值。递加朔策 $29+\frac{499}{940}$日、气策 $15+\frac{7}{32}$日得各月、各气。平年 12 月、闰年 13 月,闰月置年终。

因此,利用表 3－15 和《历术甲子篇》是推步六历最便捷的方法。《甲子篇》末列出每年岁首闰余之值,说明先秦、汉初古历很可能皆置闰年终。欲设年中闰,可

将《甲子篇》每年月数12、13之前加上"闰余"二字及其数值。闰余值以19年为周期，章首，即标注四正方位（正北、正西、正南、正东）之年其值为0，章19年，每年闰余数值如表3－16。

表3－16　一章19年闰余数表

入章年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
闰余值	0	7	14	2	9	16	4	11	18	6	13	1	8	15	3	10	17	5	12

由《甲子篇》可知，闰余大于12之年为闰年13月。年中当闰之月，由岁始闰余值乘12，累加7，加满228之月，即为所求闰月。上列闰余值，以1/19月为单位。由闰余推求年中闰月的详细步法，前面已述，此处从略。

三、六历算例

下面以云梦秦简《为吏之道》附"魏户律"、"魏奔命律"所记"廿五年闰再十二月丙午朔"为例，介绍六历推步的具体过程。历史学家、考古学家证认此为魏安釐王二十五年（前252）历日。我们首先考查此朔所用何历。

黄帝、夏、殷、周四历中，只夏历用寅正，余皆行周正（建子）。且只有历元为冬至的夏历闰十二月为章内第8年（入章第9年），余皆为第18年（参见表3－14或表3－12），故先以此试论之。

依夏历（历元冬至），由闰十二月得$t_2=8$，闰余（冬至月龄）必为$\frac{18}{19}$月或$27\frac{918}{940}$日，闰月平朔丙午，大余42（丙午的干支序数），小余不知，由关系

$$闰月朔大小余=(冬至大小余-冬至月龄)+m\times29\frac{499}{940}$$

代入上述各值，闰十二月为冬至后二月，故$m=2$，有

$$冬至大小余-27\frac{918}{940}+2\times29\frac{499}{940}=42\frac{小余}{940}$$

整理移项，得

$$冬至大小余=42\frac{小余}{940}+27\frac{918}{940}-2\times29\frac{499}{940}$$

$$=42\frac{小余}{940}-31\frac{80}{940}=10\frac{860}{640}\sim11\frac{859}{940}$$

四分历冬至干支为$\frac{3}{4}n$，故在上式范围内只可能为$11\frac{1}{4}(n=15)$。冬至大小余已知（$11\frac{1}{4}$），则



$$闰月朔大小余=\left(11\frac{235}{940}-27\frac{918}{940}\right)+2\times 29\frac{499}{940}$$

$$=11\frac{235}{940}+31\frac{80}{940}=42\frac{315}{940}$$

以冬至干支 $11\frac{1}{4}$ 查表 3－13，得 $t_1=25$

解

$$[t/80]_R=25,[t/19]_R=8$$

得

$$t=825$$

闰十二月为冬至后二月，其朔在公元前 251 年。

前 251＋前 825＝前 1076 年，正合夏历近距之元。知此历日为魏用夏历所得。

接着，我们以六历分别推算魏安釐王二十五年的历谱，进一步论证斯时魏国所行并非殷周等五历，确为夏历。

(一)求入部年

入元年＝近距上元－魏安釐王二十五年

夏　历　前 1076—前 252＝824 年

周　历　前 1624—前 252＝1372 年

颛顼历　前 1506—前 252＝1254 年

殷　历　前 1567—前 252＝1315 年

黄　帝　前 1350—前 252＝1098 年

鲁　历[①] 前 1841—前 252＝1589 年

除鲁历外，距元皆不足纪法，故五历入天纪，鲁历入地纪 70 年。

$$\frac{入纪年}{76}=入蔀数\frac{入蔀年}{76}=n\frac{m}{76}$$

为入 $n+1$ 蔀第 $m+1$ 年。

夏　历　$\frac{824}{76}=10\frac{64}{76}$　入甲午蔀 65 年 4 章 8 年

周　历　$\frac{1372}{76}=18\frac{4}{76}$　入丙午蔀 5 年 1 章 5 年

颛顼历　$\frac{1254}{76}=16\frac{38}{76}$　入癸巳蔀 39 年 3 章 1 年

① 鲁历推步参见下节。

殷　历　$\frac{1315}{76}=17\frac{23}{76}$　入丁卯蔀 24 年 2 章 5 年

黄帝历　$\frac{1098}{76}=14\frac{34}{76}$　入庚午蔀 35 年 2 章 16 年

鲁　历　$\frac{69}{76}=0\frac{69}{76}$　入甲子蔀 70 年 4 章 13 年

(二)求六历天正合朔、冬至大小余、闰余

以六历入蔀年，查《历术甲子篇》得各历天正合朔、冬至大小余、闰余数值如表 3－17 所示。

表 3－17　魏安釐王二十五年六历天正朔、冬至大小余及闰余值

	天正朔			冬至			冬至月龄		闰月
	大余	干支	小余	大余	干支	小余	$\frac{1}{19}$月	日	
夏　历	18	壬子	849	36	庚午	0	11	$17\frac{91}{940}$	闰十二月
周　历	7	癸丑	11	21	丁卯	0	9	$13\frac{929}{940}$	不闰
颛顼历	20	癸丑	412	33	丙寅	27	8.625	$13\frac{381.1}{940}$	不闰
殷　历	46	癸丑	716	0	丁卯	24	9	$13\frac{929}{940}$	不闰
黄帝历	42	壬子	900	58	戊辰	16	10	$15\frac{510}{940}$	不闰
鲁　历	49	癸丑	767	2	丙寅	8	8	$12\frac{408}{940}$	不闰

颛顼历冬至月龄是由立春月龄加气策，再以 $2\times\frac{7}{228}$月减之得出，方法见前。六历中，除夏历外，余五历皆闰次年。夏历行寅正。岁前冬至月龄为 $17\frac{91}{940}$日（$\frac{11}{19}$月），是岁十一月合朔在冬至前$\frac{18}{19}$月（$27\frac{918}{940}$日）。化为$\frac{216}{228}$月，加 $2\times\frac{7}{228}$得$\frac{230}{228}$，超过 1 月之数，故冬至后第二月为闰月，即闰十二月。以为无正月中气雨水之月。确证魏用夏历无疑。

(三)各月朔干支小余

天正合朔、冬至大小余，递加朔策、气策，得各月各气。六历推步魏安釐王二十五年各月合朔干支、小余，年中无中气当闰之月列于表 3－18。

表 3—18 魏安釐王二十五年六历各月朔干支、小余值年中无中气月

秦年	秦昭襄王五十五年															五十六年				
魏年				魏安釐王二十五年													二十六年			
合朔偶历	公元前 253		公元前 252													公元前 251				
	11.11	12.11	1.9	2.8	3.9	4.8	5.7	6.6	7.5	8.4	9.2	10.2	11.1	11.30	12.30	1.28	2.27	3.28	4.26	5.26
干支	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	甲戌	甲辰
夏历		十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	闰再十二	正月	二月	三月	四月
		壬子	壬午	辛亥	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳	甲戌	甲辰
		849	408	907	466	25	524	83	582	141	640	199	698	冬至	756	无中气	814	373	872	431
周历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	闰五月	六月
		癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳	乙亥	甲辰
		11	510	69	568	127	626	185	684	243	742	301	800	359	858	417	916	475	无中气	533
颛顼历	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月
	癸未	癸丑	壬午	壬子	壬午	辛亥	辛巳	庚戌	庚辰	己酉	己卯	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	乙亥	甲辰
	853	412	911	470	29	528	87	586	145	644	203	702	261	760	319	818	377	876	无中气	934

续表

秦年	秦昭襄王五十五年													五十六年						
魏年			魏安釐王二十五年													二十六年				
合朔儒历	公元前253		公元前252												公元前251					
	11.11	12.11	1.9	2.8	3.9	4.8	5.7	6.6	7.5	8.4	9.2	10.2	11.1	11.30	12.30	1.28	2.27	3.28	4.26	5.26
干支	癸未	癸丑	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	戊寅	丁未	丁丑	丙午	丙子	乙巳	甲戌	甲辰
殷历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	闰五月	六月
		癸丑	癸未	壬子	壬午	辛亥	辛巳	庚戌	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳
		716	275	774	333	832	391	890	449	8	507	66	565	124	623	182	681	240	无中气	298
黄帝历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	闰三月	四月	五月	六月
		壬子	壬午	壬子	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳	甲戌	甲辰
		900	459	18	517	76	575	134	633	192	691	250	749	308	807	366	无中气	424	923	482
鲁历		正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	闰六月
		癸丑	癸未	壬子	壬午	辛亥	辛巳	辛亥	庚辰	庚戌	己卯	己酉	戊寅	戊申	丁丑	丁未	丙子	丙午	乙亥	乙巳
		767	326	825	384	883	442	1	500	59	558	117	616	175	674	233	732	291	790	无中气



第八节　鲁历以闰余一之岁为蔀首

六历中，黄帝、颛顼、殷、周四历材料较多，用《开元占经》给出的上元积年推算，结果大致相符。汉魏时期所传夏历已有正月甲子朔旦雨水、十一月甲子朔旦冬至两种历元气朔。经考查上元甲子应为乙丑，《开元占经》给出的值为是。史志所记，鲁历材料较少，且有一些矛盾。本节对此试做讨论。

《汉书・律历志》说，"周道既衰，幽王既丧，天子不能班朔，鲁历不正，以闰余1之岁为蔀首。"古历四分法19年有7闰月，平均每年有闰月7/19个，称为闰余7。它实际上是冬至与天正朔之间的时距，又叫冬至月龄。当闰余达到19之年，即得19/19＝1，则该年设一闰月。可见它是历法推算中安排闰月的一种参数。闰余无表示至朔同日同时。闰余1是月朔在冬至前1/19月。鲁历以闰余1之岁为蔀首，就是说，鲁历蔀首，从而历元之岁天正合朔在冬至之前1/19个月，即$1\frac{521}{940}$日。

《续汉书・律历志》称鲁历上元干支是庚子，《开元占经》给出鲁历上元庚子至开元二年甲寅(714)岁积2761334年。其606元天纪甲子蔀首距开元二年为2534年，即公元前1821年庚子。可见，《开元占经》所传鲁历上元甲子与积年数是一致的。前301年为地纪甲子蔀首。

依《开元占经》鲁历上元积年及"以闰余一之岁为蔀首"的条件推算，得出鲁僖公五年入己酉蔀27年，天正丙午朔，小余798；日南至乙丑，小余16(以32为分母)。但《大衍历议》谓鲁历僖公五年辛亥为十二月晦，壬子为正月朔；南至先周历3/4日，朔后51/940日。两者显然不合。用《开元占经》鲁历上元积年数据，采用以"闰余无"之岁为蔀首(历元气朔相齐)计算，得出，鲁僖公五年入己酉蔀27年，天正戊申朔，小余379；日南至乙丑，小余16。也与《大衍历议》有别。是《开元占经》、《续汉书・律历志》给出的上元甲子、积年有误呢，还是三统历说的"鲁历不正，以闰余1之岁为蔀首"不对呢？鲁历到底是什么样子？两千年来，不少学者做过研究，似都未能做出圆满的解答。为讨论这个问题，现先来分析一下《大衍历议》给出的周历、鲁历数据。

对《左传》"僖公五年正月辛亥朔日南至"这条记载，一行《大衍历议》是这样说的："以周历推之，入壬子蔀第四章，以辛亥一分(四分日之一)合朔冬至。殷历则壬子蔀首也。鲁历南至，又先周历四分日之三，而朔后九百四十分之五十一。故僖公五年辛亥为十二月晦，壬子为正月朔。又推日食出于殷历，其以闰余一为章首，亦取合于当时也。"就是说，鲁历是以"闰余一"之岁为章蔀首的。用鲁历推僖公四年

得十二月庚戌冬至，小余 2 分。若鲁历僖五年正月朔仅比周历后 51/940，则不能得到正月壬子朔。因周历僖五年入壬子蔀 58 年，为 4 章章首。正月辛亥朔，小余 235。后 51 分仍为辛亥朔，仅小余增至 286 分而已，相当于辛亥日 30 刻合朔，距壬子日首还有近 70 刻。显然，《新唐书·历志》这段话有脱误。校改成，"鲁历南至，又先周历四分日之三，而朔后此值（四分日之三）又九百四十分之五十一"，如此，鲁历正月壬子朔，小余 51 分，就合理了。

如果这样理解和校改是正确的话，据此可以复原鲁历。从《汉书·律历志》所传"鲁历以闰余一之岁为蔀首"出发，排出四分术一蔀的历谱。在这种历谱中，入丁卯蔀第 55 年的历日，其岁前冬至及天正朔的干支、小余都正好与大衍历议中关于鲁历僖五年历日的记述相合。斯历以"闰余一"之岁为蔀首。因此，它应该就是《大衍历议》所说的鲁历。僖五年（前 655）入丁卯蔀 55 年，则前 709 年为丁卯蔀首，前 785 年为戊子蔀首。其后，前 633 年为丙子蔀首，前 557 年为乙酉蔀首，前 481 年庚申为地纪甲子蔀首。鲁历第 606 元天纪甲子蔀首乃前 2001 年庚子。鲁历的上元庚子年为前 2760801 年，距开元二年 2761514 年。

由此可知，《开元占经》所述鲁历积年有误，少 180 年。但上元甲子是庚子，《开元占经》及《续汉书·律历志》的记载是对的。且确系以"闰余一"之岁为蔀首。这样，《汉书·律历志》所传的鲁历就得以复原了。

如此复原的"鲁历"，是否符合史志记述呢？

3 世纪杜预根据汉末宋仲子所集七历以考春秋日食合历。我们依据上述复原的鲁历及占经所传其余五历的积年推步，月名和朔日干支全合春秋经记录者：周历得 1 食，黄帝历得 1 食，颛顼历得 8 食，夏历得 14 食，真夏历（历元冬至）得 1 食，殷历得 13 食，鲁历得 13 食。这个结果与杜预所考完全一致。考查时，六历置闰全依"无中置闰"的方法。我们的结果也与姜岌、祖冲之所考相同。请参看《中国先秦史历表》附表 4，此处从略。

此外，一行《大衍历议·日度议》中列出一些周、殷、颛顼历的章蔀首年名、日名、朔气大小余数值。经考验，它们悉与用开元占经上元积年推步所得相合。它们是：

僖五年"正月辛亥朔日南至"，周历入壬子蔀第 4 章，以辛亥 1 分合朔冬至。殷历为壬子蔀首。

昭二十年"二月己丑朔日南至"，周历得己丑 2 分，殷历得庚寅 1 分。

宣五年丁卯岁，颛顼历第 13 丁巳蔀首。

宣十一年癸亥，周历以庚戌日中冬至。

哀十一年丁巳，周历入己酉蔀首。



惠王四十三年己丑，周历入丁卯蔀首。

始皇三十三年丁亥，得颛顼历壬申蔀首。

吕后八年辛酉，周历人乙酉蔀首。

太初元年，周历甲子蔀首甲子夜半合朔冬至，等等。

因此可知，《开元占经》所传五历上元甲子和积年都是可信的；根据《汉书・律历志》、《大衍历议》复原的鲁历也是准确无疑的。

清代学者李锐、汪曰桢、顾观光，近人朱文鑫、高平子对古六历都有深入研究。顾观光用演纪术推得鲁历上元至开元二年为 2764394 年，比《开元占经》增加 3060 年。其 607 元天纪甲子蔀首为前 321 年庚子。我们推得鲁历上元庚子为公元前 2760801 年，距开元二年 2761514 年，比《开元占经》积年多 180 年；鲁历第 606 元天纪甲子蔀首为前 2001 年庚子，前 481 年庚申（孔子获麟之年）为地纪甲子蔀首。这两种复原方法都以庚子为上元，推算的朔闰也基本一致。但前者以闰余 0 之岁作蔀首，与《汉书・律历志》、《新唐书・历志》记述不符。我们是根据"鲁历不正，以闰余一之岁为蔀首"复原的，与汉唐所传鲁历相合。

第九节　元光历谱与汉初历法

西汉中叶施行太初历以后，我国历法开始有了完整系统的记述。先秦时期专门谈历法的著作一种也没有流传下来。只有一些零散的材料。因此，先秦、秦汉之际的历法问题，至今仍多有争论而未能彻底解决。

20 世纪 70 年代，先后出土了几种反映秦、汉初历法的新材料，如，山东临沂银雀山二号汉墓竹简《汉武帝元光元年历谱》、马王堆三号汉墓文帝十二年木牍、江陵凤凰山九号汉墓文帝十六年木牍和云梦睡虎地秦简《南郡守腾文书》、《大事记》，等等。其中《元光元年历谱》是汉初历书的实物，它基本完整地记载了一年的朔气干支和历注，尤为珍贵。根据文献和这些新材料，有可能对秦汉初历法的研究向前推进一步。

《史记・历书》对秦汉初历法是这样说的：

> 因秦灭六国，兵戎极烦，又升至尊之日浅，未暇遑也。而亦颇推五胜，而自以为获水德之瑞，更名河曰德水，而正以十月，色上黑。
>
> 始皇推终始五德之传，改年始，朝贺皆自十月朔。

司马迁指出了秦统一六国后，历法有"更"、"改"及汉初"袭秦正朔服色"事。

《汉书・律历志》云，自殷周，历法皆创业改制。汉兴，方纲纪大基，庶事草创，

袭秦正朔。以北平侯张苍言，用颛顼历，比于六历，疏阔中最为微近。《汉书》成书于东汉初年。东汉以后，于是有了汉初袭秦、用颛顼历的说法，如，东汉后期，蔡邕也说，汉兴承秦，历用颛顼。而《史记》以及成书于初汉的《淮南子》都没有提汉初施行何种历法，也无颛顼历之名。后汉以后，各代历志多沿袭汉志颛顼历的说法。颛顼历是古六历之一。文献所书汉初历日依颛顼历术推步常有不合，而多与殷历相近。所以宋人刘羲叟认为"汉初用殷历，或云用颛顼历"。在他所作长历中"今两存之"。清末汪曰桢"以史文考之"，汉初历法"似殷历为合"。在他写的《长术辑要》中仍并列殷历、颛顼历的推步结果。20 世纪出版的历表都以这两部长历为依据。但汉初行用何种历法的问题，并未解决。

马王堆三号汉墓木牍记载汉文帝十二年二月朔日为乙巳，凤凰山九号汉墓木牍标注文帝十六年后九月朔日戊申，而临沂出土的《武帝元光元年历谱》给出了是年十三个月朔日以及冬至、立春、夏至、立秋 4 个节气的干支。这样，新出汉初简牍共记下了 15 个朔日干支。我们将它们与用颛顼历、殷历推步所得朔日做了比较，结果列于表 3－19。

表 3－19　新出简牍历朔与颛顼历殷历比较

		简牍朔日	颛顼朔日	殷历朔日
文帝十二年	二　月	乙巳	甲辰	甲辰
文帝十六年	后九月	戊申	丁未	戊申
武帝元光元年	十　月	己丑	己丑	己丑
	十一月	己未	戊午	己未
	十二月	戊子	戊子	戊子
	正　月	戊午	戊午	戊午
	二　月	戊子	丁亥	丁亥
	三　月	丁巳	丁巳	丁巳
	四　月	丁亥	丙戌	丙戌
	五　月	丙辰	丙辰	丙辰
	六　月	丙戌	乙酉	乙酉
	七　月	乙卯	乙卯	乙卯
	八　月	乙酉	甲申	乙酉
	九　月	甲寅	甲寅	甲寅
	后九月	甲申	癸未	甲申



如表所示，15个朔日中，颛顼历推步仅得6个，占40%；而与殷历计算相合的却有11个，为73%。由此可以看出，汉初历法既不是颛顼历，也不是殷历。这是新出汉初简牍历日解决的第一个问题。但它确实与殷历比较接近，这就是刘羲叟、汪曰桢、陈垣等学者认为“汉初用殷历”，“似殷历为合”的道理。

不是殷历，也不是颛顼历，根据计算，新出汉初简牍历日与其他六历也不相合。那么，汉初到底行用的是什么样的历法呢？下面根据《元光元年历谱》对汉初历法试作复原。

由《元光元年历谱》所记4个节气、13朔日分析得出，汉初实行的历法，在元光元年这一年各月的朔、气干支和大小余一定要满足表3－20所示的状况。这是一个很窄的范围。在表中我们也列出用颛顼历推算元光元年朔日和立春、立秋、夏至、冬至4气的干支和小余数值。《元光元年历谱》是汉初历书的实物。由表看出，汉初历法与颛顼历推步所得合朔时刻相差近半日（$10^h59^m\sim12^h26^m$），即朔小余相差430～487分（以940为分母）。因此根据元光元年历谱复原汉初历法可有58种可能性，上下限相差可达87分钟。就是说，仅据出土的一组《元光元年历谱》13朔日，还不可能把汉初实行历法准确、唯一地复原出来。

《元光元年历谱》记载了4个节气：十一月二十八日丙戌冬至，正月十五日壬申立春，六月初三戊子夏至，七月二十日甲戌立秋。其中特别值得注意的是壬申立春和戊子夏至。由战国六历到《史记·历术甲子篇》，可知，战国至汉初历法为四分术。另一方面，清时宪历以前中国历法一直用平气注历。四分术气策$15\frac{7}{32}$日。立春距夏至9个节气长$136\frac{31}{32}$日。而正月十五壬申距六月初三戊子136日。就是说，只有壬申立春节气的小余为0的情况下（立春时刻在壬申夜半），夏至才会在六月初三戊子（小余为31）。此外任何情况，即立春在壬申日其他任何时刻，夏至都在六月初四己丑。因此，由《元光元年历谱》可确定汉初历法这一年各节气准确唯一的小余值。尽管汉初历法步朔小余值有58种可能性，但节气小余值却可肯定只有一种安排，即汉初实行历法元光元年节气大小余必为：冬至丙戌，小余11；立春壬申，小余0；夏至戊子，小余31；立秋甲戌，小余20。而在黄帝、颛顼、夏、殷、周、鲁古六历中，只有用颛顼历推步元光元年节气大小余，会得到上述结果，其他五历皆与此不合。前面说过，汉初历法合朔时刻（小余）与颛顼历相差近半日，但节气时刻与颛顼历相合。因此，有的论著中仍称汉初历法为颛顼历。

根据《元光元年历谱》复原汉初历法共有58种可能性，在没有其他新材料的情况下，无法进一步判断这58种可能中谁对谁错、谁密谁疏。每人都可有自己的复原方法。至今已发表的论著中复原历法共有三种。其一，为过半进位法，又称借半

日法。即以颛顼历推步汉初历法的气朔大小余，朔小余大于470的月份，进位为大余。就是把颛顼历朔小余值加大470分，作为汉初历法的朔小余值，而节气小余不变。其二，以颛顼历推步月朔，而将朔小余值增加441分，作为汉初历法朔小余，故又称"加大朔小余441分"法，但此法不用颛顼历计算节气。由于四分术以分母为940的分数表示日的奇零部分。第一种方法采用过半进位法或四舍五入法，将小余加大470分，复原的汉初历法比颛顼历合朔时刻大12^h。第二种方法加大颛顼历月朔小余441分为汉初历法。复原的汉历比颛顼历合朔时刻迟11^h16^m。方法二是出于四分术中，朔小余大于441分之月，其月为大月30日的考虑。因四分法朔望月长$29\frac{499}{940}$日，合朔时刻（小余）大于46.915刻（小余441）之月，441加499等于940，小余满蔀月（940）进位为日，故该月有30日。我们采用寻找汉初历法蔀首的方法算是第三种。目的是找到一个合朔交节同日同时又起于夜半（小余为0）的汉初历法的计算起点。

因为四分历每蔀76年940月，这940月的小余值从0到939是互不相同的。每个月朔的小余总比其前一月的小余大499。一岁有二十四气，每两气之间小余增加7，经过32个节气，小余值循环一次。前已指出，汉初历法的节气小余值由《元光历谱》可以唯一地确定下来，这可使复原计算简化。据此，可很容易找出，从元光元年正月往前数第82个月的月朔，从立春向前数第160个节气，气朔的积日干支是相同的，而小余都为0，即合朔交节同日同时起于夜半。这一天，汉景帝后元三年（前141）五月芒种合朔，就是我们所要找的汉初历法的蔀首。所复原的汉初历法，是以五月朔旦芒种夜半相齐作为蔀首的四分术。根据四分法的计算方法，可再往上推，得到公元前672年五月甲子朔旦芒种夜半作为汉初历法的元首。如此，元光元年距元538年，入丁酉蔀第7年。历元符合朔气相齐起于甲子夜半的条件。

依四分法推步，丁酉蔀第7年的历谱、朔气大小余，与银雀山二号墓《元光元年历谱》完全相合。结果也列于表3—20中，表中同时列出第一、第二种复原方法所推算的结果。第二种方法节气未按颛顼历计算，所得干支、大小余与《元光历谱》不合，因而并非汉初施行的历法。

根据汉初文献记载的32次日月食及历史上、出土文献中可靠的后九月记载，我们研究了汉初闰年的安排。得出：汉初历法是以固定冬至在十一月作为设闰的标准，但在文帝后元前后，做过变动。把以冬至总在十一月改成以雨水不出正月当作置闰的依据。



表 3—20　元光元年朔气干支及小余范围

元光元年	《元光元年历谱》			元光元年历法朔气干支小余范围			颛顼历推算		复原方法 2		复原方法 1		复原方法 3	
	朔日	节　气					朔	气	朔	气	朔	气	朔	气
	干支	日期	干支	朔	小余	节气小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余	干支 小余
十　月	己丑			己丑	824～881		己丑 394		己丑 835		己丑 864		己丑 881	
十一月	己未	二十八 冬至	丙戌	己未	383～440	冬至 丙戌 11	戊午 893	冬至 丙戌 11	己未 394	冬至丙戌 16	己未 423	冬至 丙戌 11	己未 440	冬至 丙戌 11
十二月	戊子			戊子	882～939		戊子 452		戊子 893		戊子 922		戊子 939	
正　月	戊午	十五 立春	壬申	戊午	441～498	立春 壬申 0	戊午 11	立　春 壬申 0	戊午 452	立春 壬申 5	戊午 481	立春 壬申 0	戊午 498	立春 壬申 0
二　月	戊子			戊子	0～57		丁亥 510		戊子 11		戊子 40		戊子 57	
三　月	丁巳			丁巳	499～556		丁巳 69		丁巳 510		丁巳 539		丁巳 556	
四　月	丁亥			丁亥	58～115		丙戌 568		丁亥 69		丁亥 98		丁亥 115	
五　月	丙辰			丙辰	557～614		丙辰 127		丙辰 568		丙辰 597		丙辰 614	
六　月	丙戌	三日 夏至	戊子	丙戌	116～173	夏至 戊子 31	乙酉 626	夏至 戊子 31	丙戌 127	夏至 己丑 4	丙戌 156	夏至 戊子 31	丙戌 173	夏至 戊子 31
七　月	乙卯	二十 立秋	甲戌	乙卯	615～672	立秋 甲戌 20	乙卯 185	立秋 甲戌 20	乙卯 626	立秋 甲戌 25	乙卯 655	立秋 甲戌 20	乙卯 672	立秋 甲戌 20
八　月	乙酉			乙酉	174～231		甲申 684		乙酉 185		乙酉 214		乙酉 231	
九　月	甲寅			甲寅	673～730		甲寅 243		甲寅 684		甲寅 713		甲寅 730	
后九月	甲申			甲申	232～289		癸未 742		甲申 243		甲申 272		甲申 289	

第十节 秦与汉初历法不同

一、秦与汉初历法是不一样的

前面依据对《元光元年历谱》的分析，得出了汉初历法。虽然它有一定的变动出入范围，不是唯一确切的结果，但它不是颛顼历、殷历，也不是古六历的任何一种，却是可以肯定的。历史上说，汉初袭秦正朔服色，那么秦所行用的是不是与汉初相同的历法呢？

过去文献中，没有地方谈到战国后期各国实际行用历法的情况。有关的史日干支记载也很少。尤其朔日，仅有"维秦八年岁在涒滩秋甲子朔"一条。因此，战国时期及灭六国后秦用什么历法无法做深入的研究。1975 年年底，湖北云梦睡虎地出土的秦简《南郡守腾文书》和《大事记》中，有自秦昭王元年直到始皇三十年的一些历日、后九月记载。尤其《南郡守腾文书》还给出了文件发布日期为秦王政"廿年四月丙戌朔丁亥"。在《大事记》中又记下了同一年"七月甲寅"的日子。后面我们将指出，这个"七月甲寅"实际上就是秦王政二十年七月的朔日。同一年中秦简提供了两个朔日干支，对研讨秦汉历法很是重要。下面据此试探秦汉初所行的是不是同一种历法。

我们据《元光历谱》复原了汉初历法。这种历法是不是太初改历前一直行用的历法呢？为此，先用马王堆三号墓和凤凰山九号墓木牍的历日来检验一下。这两个木牍分别给出了文帝十二年（前 168）二月朔乙巳和文帝十六年（前 164）后九月朔日戊申两个朔日干支。它们与元光元年二月朔、后九月朔正好分别相距 34 年和 30 年。由表 3－20 看出，汉初施行历法元光元年二月朔日干支为戊子，小余必在 0～57之间；后九月朔日干支是甲申，小余定为 232～289。从元光元年二月、后九月的大小余出发，用四分法推步得出的文帝十二年二月、十六年后九月的朔日干支分别为乙巳和戊申。这正好与出土的这两块木牍所记朔日相合。由此可知，至少汉文帝至武帝元光间行用同一历法。

秦王政二十年（前 227）七月朔距汉武帝元光元年（前 134）七月朔正好 93 年。根据四分法，93 年为 1 蔀又 17 年。这其中应有 34 个闰月（4×7＋6＝34），所以 93 年共计有 1150 个朔望月。四分法每月 $29\frac{499}{940}$天，1150 月共计 $33960\frac{450}{940}$。如果秦王政二十年到元光元年间用同一种历法，那么从元光元年七月朔日（乙卯日，小余 615～672，儒略日为 1672682）减去 $33960\frac{450}{940}$日，减余就应该是秦王政二十年七月



朔日的干支(大余)和小余。相减的结果是

$$1672682\frac{615}{940}-33960\frac{450}{940}=1638722\frac{165}{940}=\text{乙卯}\frac{165}{940}$$

$$1672682\frac{672}{940}-33960\frac{450}{940}=1638722\frac{222}{940}=\text{乙卯}\frac{222}{940}$$

秦王政二十年七月朔日干支为乙卯(儒略日1638722),小余为165～222。就是说,根据汉初行用的历法来推算,秦王政二十年七月没有甲寅这一天。甲寅应为六月晦。但在出土的云梦秦简《大事记》中,七月有甲寅。这就完全说明了秦王政二十年时所用历法与汉元光元年是不相同的。

前已指出,汉初历法不是殷历、颛顼历,这里又论证了秦王政二十年所行历法与汉初不同。仅就近年新出土的《元光元年历谱》、马王堆和凤凰山汉墓木牍、云梦秦简而言,就不可能找出一种历法,同时满足它们所给出的历日。秦王政二十年离汉文帝、武帝虽仅几十年,但由此可知在这期间历法有过变革。《史记》明言,秦统一后,历法有过"更"、"改",而汉初袭秦正朔服色。战国时期各国行用各自不同的历法。如云梦简《为吏之道》末尾附抄的两条魏律,其颁布时间注明是"廿五年闰再十二月丙午朔辛亥日"。考查得出,是时魏行夏历,就与秦历不同。秦灭六国统一中国后,当然要采取措施统一历法。这有两种可能,一是废止各国历法,一律行用秦历;二是统一后进行历法改革调整,施行新历。我们比较倾向第二种可能。历法自殷周皆创业改制,统一中国是件大事,理应改行新历,这是一;其次,《史记》记载,始皇改年始,朝贺皆自十月朔。而由秦简《大事记》知,至迟在昭王时,秦历早以十月为年始了。那么始皇统一后历法到底"改"的是什么呢?显然只能是改正朔了。云梦秦简秦王政二十年七月甲寅的记载又为秦统一后进行过历法变革提供了证据。根据计算,始皇三十年(前217),这一年五月戊午正好芒种合朔相近。很有可能斯时依据观测推算得到了这个气朔相合,就以这较难得的气朔相合作为制订新历的依据。这一天也就成为新历的计算起点——蔀首。自始皇三十一年始行此历。汉兴承秦,一直行用这种历法,直到太初改历。这就是我们依《元光历谱》复原汉初历法的构思。当然前面说过,汉初历法仅就《元光历谱》来说,就有58种可能。不易做出哪一种是唯一正确的结论。因此,我们的复原也仅是58种可能中的一种而已。因此,退一步讲,即使我们复原的汉初历法较疏,并非汉初施行的唯一正确历法。但,秦与汉初历法是不一样的这个结论应该是对的,除非有一天发现新材料证实云梦简历日有错。

二、秦用颛顼历问题

历史上记有秦用颛顼历,汉初承秦。但从出土简牍及文献记载的历日考查得出汉

初行用的历法却不是颛顼历，这是怎么回事呢？我们认为，战国后期和兼并六国前后，秦所施行的可能是颛顼历。

(一)云梦秦简历日特征合颛顼历

云梦秦简历日以十月为岁首(如《大事记》所书昭王“四十五年十二月甲午”，乃岁前十二月，下一个十二月中无甲午日)，闰月置年终称后九月的做法符合颛顼历的特征。而考查简中闰月安排和历日干支，都与颛顼历推算结果相合。

(二)三个秦历朔日皆与颛顼历一致

经计算验证，目前已知三个秦历朔日，皆可由颛顼历推算得出。

(1)《吕氏春秋·序意》所记“维秦八年，岁在涒滩，秋甲子朔”。秦王政八年(前239)入颛顼历癸巳蔀52年，推得秋七月为甲子朔，小余143。

(2)云梦简《南郡守腾文书》注明发布日期是秦王政“二十年四月丙戌朔丁亥”。是年(前227)入颛顼历癸巳蔀64年，四月丙戌朔，小余118。简合颛顼。

(3)云梦简《大事记》所书秦王政“二十年七月甲寅”。是年颛顼历入癸巳蔀64年七月得甲寅朔，小余675。知甲寅为颛顼历七月朔日。

由上可知，战国后期，灭六国前后秦行用颛顼历。而汉初历法与颛顼历有别，朔差半日，说明这期间历有变更。战国后期及统一前后秦所用历法与汉初不同。汉初历法比颛顼历合朔差近半日，后天较多，日食多发生在晦、晦前一日。所以《史记》、《汉书》上说，这时历法的“历度闰余，未能睹其真也”。





第十一节　秦至汉初历法研究的新进展

银雀山汉墓《元光元年历谱》的发现，使秦汉初历法研究向前跨了一步。前面说过，尽管学者们据《元光元年历谱》复原的汉初施行历法稍有差异，但它与殷历、颛顼历不同却是取得共识的。汉初历法朔小余比颛顼历大430～487，时刻相差近半日($10^h.98$～$12^h.43$)，气小余与颛顼历相合。汉初历法朔小余比殷历大126～183，合朔时刻在其后$3^h.22$～$4^h.67$，交气时刻却较殷历要早29/32日($21^h.75$)。就是说汉初历法合朔时刻比殷历迟4^h左右，比颛顼历晚约半日。从合朔来说，更近殷历；交气时刻与颛顼历同，而比殷历早近1日。据《元光元年历谱》复原的汉初历法有58种可能性，上下可差$1^h.46$($87^m.3$)。至于这58种可能中究竟何者正确，这只有待新材料的发现才能判断。

1983年年底到1984年年初，江陵张家山西汉初年古墓出土了大量竹简。这



是近年考古的一次重大发现。竹简内容除法律文书、奏谳书等文献外，还有日书、算书和历谱。从目前已经发表的部分材料来看，其中记载的某些历朔和历谱资料可能对研究秦汉初历法很有用处。

在已公布的材料中，有一支记载汉惠帝三年(前 192)朔日的历简。这支简比《元光元年历谱》早 58 年。内容简单，仅列有惠帝三年十二个月的朔日干支。但它在历法上的作用不能小觑。它一方面证实了《元光元年历谱》及由它复原汉初历法的方法、内容是可信的；另一方面，它与《元光元年历谱》配合，使人们对汉初历法的了解深入一步。

惠帝三年入颛顼历壬申蔀 23 年、殷历丙午蔀 8 年。与《元光元年历谱》相似，《惠帝三年历谱》朔日与用殷历、颛顼历推步得出的结果都有差异。12 个朔日中与颛顼历相合者仅得 5 个，占 42%；而有 9 个合殷历，为 75%。表 3－21 列出用殷历、颛顼历推步所得惠帝三年各月朔日干支及小余数值。依据历简朔日和四分术推步法数，表中同时也给出汉初历法惠帝三年合朔时间必定满足的小余范围。

表 3－21 惠帝三年历简小余范围

惠帝三年	殷 历	颛顼历	惠帝历简
历 简 朔日	朔日 小余	朔日 小余	小余范围
十 月 丙申	丙申 115	乙未 751	267～324
十一月 乙丑	乙丑 614	乙丑 310	766～823
十二月 乙未	乙未 173	甲午 809	325～382
正 月 甲子	甲子 672	甲子 368	824～881
二 月 甲午	甲午 231	癸巳 867	383～440
三 月 癸亥	癸亥 730	癸亥 426	882～939
四 月 癸巳	癸巳 289	壬辰 925	441～498
五 月 癸亥	壬戌 788	壬戌 484	0～57
六 月 壬辰	壬辰 347	壬辰 43	499～556
七 月 壬戌	辛酉 846	辛酉 542	58～115
八 月 辛卯	辛卯 405	辛卯 101	557～614
九 月 辛酉	庚申 904	庚申 600	116～173

由《惠帝三年历谱》看出，汉初历法合朔比殷历小余大 152～209，较颛顼历小余大 456～513。即合朔时刻分别比殷历、颛顼历迟 $3^h.88$～$5^h.45$ 和 $11^h.64$～$13^h.10$。而由元光历谱已知，汉初历法合朔小余比颛顼历大 430～487，较殷历大 126～183。汉初施行的历法只有一种，它一定既在由元光元年历谱得出的 58 种可能之内，又要符合《惠帝三年历谱》。由此可得出，汉初历法一定满足这样的条件：

它的合朔小余较颛顼历大 456～487，或比殷历大 152～183。这就是说，根据《元光元年历谱》知道，汉初施行的历法有 58 种可能性。而由张家山《惠帝三年历谱》的出土，又缩小了考查的范围，得出汉初历法仅有 32 种可能性。使汉初历法的研究又有了新的发展。

根据《惠帝三年历谱》，现在可以肯定地说，前面所述已发表的三种汉初历法的复原方案中，“加大朔小余 441 分”法是不对的，可以排除。其余两种皆在 32 种可能之中，是非暂时还无法认定。

但是，张家山汉简也给秦汉初朔法研究提出了新问题。

在已发表的《奏谳书》案例中，记载了五条秦汉初历日资料。其中汉高祖八年四月甲辰朔、十年七月辛卯朔、十一年八月甲申朔皆合以上复原的汉初历法；秦王政二年十月朔癸酉合颛顼历，都没有问题。值得推敲的是，“六年八月丙子朔”。根据简文中，①最里属于咸阳，咸阳高祖元年已更名；②“里典”即里正，避秦王政讳；③“恒游旗下”句中，不避汉文帝讳，这三条理由，学者都将它考订为秦王政六年八月。可是根据颛顼历推步，秦王政六年（前 241）入颛顼历癸巳蔀 50 年，八月为乙亥朔，小余 387。而不是丙子朔，差 1 日。是年入殷历丁卯蔀 35 年，八月也是乙亥朔，小余 691。推步结果见表 3－22。

秦王政六年六月颛顼历是丙子朔，小余 329。但案例前文中有六月癸卯。而八年六月或八月皆非丙子朔。看来似乎也不易用简文误字来解释。《大衍历议》说，颛顼历上元甲寅岁正月甲寅晨初合朔立春，七曜皆直艮维之首……其后吕不韦得之，以为秦法，更考中星，断取近距，以乙卯岁正月己巳合朔立春为上元。根据一行的这个说法，秦用颛顼历是吕不韦用事以后所为。由表3－22看出，维秦八年和秦王政二十年的历朔俱合颛顼历。因此，有无可能颛顼历为秦王政八年所改行。这样，就又出现两个新问题：

表 3－22　秦历朔日合历考查

竹简文献历朔		颛顼历推	殷历推步
秦王政二年	十月癸酉朔	癸酉　86	癸酉　390
秦王政六年	八月丙子朔	乙亥　387	乙亥　691
维秦八年	秋甲子朔	甲子　143	甲子　447
秦王政廿年	四月丙戌朔	丙戌　118	丙戌　422
	七月甲寅	甲寅　675	乙卯　39

（1）维秦八年以前秦用何历。六年八月以颛顼历、殷历推算俱得乙亥朔。用鲁历推得乙亥，小余 742 分。而用黄帝历、夏历、周历推皆为甲戌朔，小余分别为 875、



824 和 926。说明秦王政八年以前所行历法不是六历中的任何一种。此处俱以夏正八月而言。黄帝、殷、周、鲁诸历皆行周正，如以周正八月来看，殷、鲁两历六年八月为丙子朔，小余分别为 633 和 684。但这样一来，秦王政二年十月又皆非癸酉朔，显然也是不对的。

(2)如秦八年才改行颛顼，汉初历法合朔与颛顼差约半日。说明历史上颛顼历仅在秦王政时行用过不长时期。因为前面讲过，惠帝三年与《元光元年历谱》不合颛顼历、殷历；而云梦简所书秦二十年七月甲寅与由元光元年、惠帝三年历谱复原的汉初历法又均不相容。

考古发掘报告称，张家山西汉初年古墓时代不迟于汉文前元时期。如果简文不误，自秦王政至汉文帝，从历日上看，"六年八月丙子朔"，只有文帝六年尚属可能。由惠帝三年、元光元年历谱复原汉初历法可有 32 种可能。其中有 26 种排出的汉初历法，文帝六年八月为丙子朔。就是说，如《奏谳书》所书六年八月丙子朔确为文帝时期的案例，那么，加上这条历朔，可得出：汉初历法合朔小余一定比颛顼历大 456～481 分，较殷历大 152～177 分。这样，汉初实行历法的考查范围又进一步缩小了。当然，以上分析是基于简文无误，时代正确，所记确为文帝六年案例这几个前提下进行的。是否如此，以及怎样解释文帝案例不避文帝而避秦王政讳三条理由，等等，希望历史学家对这些问题能做出解答。

近年，秦和汉初历日简牍都有重大发现。2001 年，"江陵张家山 247 号汉墓"出土的历日，已经全部发表。简文记载自汉高祖五年(前 202)到吕后二年(前 186)，共 17 年的 173 个月的朔日干支，是目前已知年代最早的西汉初年的实用历日。2002 年，湖北荆州周家台关沮秦简和 2003 年湖南龙山里耶秦简的出土发表，又提供了多年秦代实行的历朔实证。这些材料对研究秦和汉初的历法是极为珍贵的。

这些新出的历日材料，对秦和汉初历法的情况提供了许多新信息。由"江陵张家山 247 号汉墓"历日和《汉武帝元光元年历日》就可看出，很可能汉高祖到武帝时期，历法发生过变化，而考查周家台关沮秦简和龙山里耶秦简历日更可知，秦和汉初的历法又有差别。即，秦和汉初的历法不同，置闰方法也与汉初历法有别。秦历比汉传颛顼历步朔小余要大 639 到 649 分，汉初历法比颛顼历步朔小余要大 487 到 500 分，而高祖到武帝时期又不一样。

前文提到在秦和汉初的历法研究中所出现的很多新问题或疑惑，由新出的秦汉初历日简牍基本上都可得到解决和澄清。[①]

---

① 有关秦和汉初的历法研究的新进展，可参看《根据新出秦汉历日简牍试论秦和汉初的历法》，《中原文物》，2007 年第 5 期。

第四章　太初历和三统历

太初历是西汉武帝时代一次重大历法改革的成果。

三统历是我国第一部有完整术文传世的历法。它由西汉末年王莽的国师刘歆所作。

通常认为三统历是刘歆根据汉武帝时邓平、落下闳的太初历改编而成的。之所以这样说是因为三统历的基本历法数据和太初历相同。两者都以太初元年前十一月甲子朔旦冬至为历元；两者都以 81 为日法，因而有相同的朔望月和回归年长度（因为两者都以19 年7 闰为置闰周期，即 235 个朔望月的时间长度等于 19 个回归年）。上述观点原则上是对的，但尚需做进一步讨论。

既然三统历与太初历有密切关系，那么我们在研究三统历之前，应当先研究一下太初历。

第一节　太初历

记述太初历原始史料的只有《史记·历书》、《汉书·律历志上》及《汉书·天文志》三项[1]。但是《汉书·天文志》只给出了各年岁星晨出东方时所在的二十八宿名称。《史记·历书》记有“太初改历”的简单起因，并在文末附上一份称为《历术甲子篇》的历表。从这份历表的内容来看，它使用的是一种四分历，即以$365\frac{1}{4}$日为一年，其朔望月则为$29\frac{499}{940}$日。这与三统历的数据及与《汉书·律历志上》所谈到的太初历数据都不一样。至于《史记》所载改历经过，也和《汉书》所记大有差别。由于这个原因，往往使人怀疑，太初历当是一种四分历，而班固则是出于误会，把刘歆的三统历当成了太初历。因此，我们应当先讨论太初改历到底改的是什么历。



一、关于太初改历的史料

（一）《史记·历书》

《史记·历书》只在全文末段记有：

---

① 这里只是指有关历法本身的原始史料，而不是指关于改历的原始史料。后者的史料载体要多一些。



至今上即位，招致方士唐都，分其天部；而巴落下闳运算转历，然后日辰之度与夏正同。乃改元，更官号，封泰山。因诏御史曰："乃者，有司言星度之未定也，……今日顺夏至，……自是以后，气复正，……以至子日当冬至，则阴阳离合之道行焉。十一月甲子朔旦冬至已詹。其更以七年为太初元年[1]。年名焉逢摄提格，月名毕聚，日得甲子，夜半朔旦冬至。"

据《尔雅·释天》，所谓焉逢摄提格，是指这一年的太岁所在的干支名为甲寅；所谓毕是指月名为甲；所谓聚（有的书中又作陬）是指这月为正月[2]。也就是说，汉武帝的改历诏书把元封七年改元为太初元年，并把冬至所在之月改名为正月。这意味着，汉武帝的改历诏采用了周正的历日制度。而这一点却与前面所说的"日辰之度与夏正同"相矛盾。

（二）褚补《史记·孝武本纪》

其中说到改历问题："（元封七年）夏，汉改历，以正月为岁首，……因为太初元年。"这意味着，是在元封七年，几乎过了一半之后才改的历。

（三）《史记·太史公自序》

其中说到，司马迁当太史令后，"五年而当太初元年，十一月甲子朔旦冬至，天历始改，建于明堂，诸神受纪"。照此说来，在元封七年十一月甲子朔旦冬至的那一天，就在明堂颁布了新历。这与上引《本纪》中所说"夏，汉改历"之说明显矛盾。不过这个矛盾好解决，我们到下面再叙述。

（四）《汉书·武帝本纪》

在元封六年（前105）之后接着记道："太初元年冬十月，……夏五月，正历，以正月为岁首。"这表明，改历是在太初元年五月。由此得知：

第一，太初元年这一年非常特殊，从冬十月开始，到第二个十二月结束，共有15个月之多。

第二，改历的时间是在原颛顼历的五月，此条与《史记·孝武本纪》相合而更明确。

第三，新历的岁首是原颛顼历的正月。这与《史记》所载汉武帝改历诏书中所说的以十一月为正月的说法矛盾。但却与《史记·历书》中所说的"日辰之度与夏正同"相合。

---

① 颁改历诏之前，汉代一直用颛顼历。这种历法以冬至所在之月为十一月，年首之月为十月。

② 毕、聚之释也见《尔雅·释天》。

(五)《汉书·律历志上》

这是关于太初改历过程讲得最详细的文献。先说在元封七年时有大中大夫公孙卿、壶遂和太史令司马迁等人进言："历纪坏废，宜改正朔。"经过一番讨论，武帝向御史颁了改历诏。诏书文字与《史记·历书》所载大体相同而略有简略。但文字只引到"其以七年为(太初)元年"就戛然而止。

接着讲到，诏卿、遂、迁及侍郎尊、大典星射姓等造汉历。这些人"乃定东西，立晷仪，下漏刻，以追二十八宿相距于四方"，下了一番观测和推算的工夫之后，定出元封七年是阏(即焉)逢摄提格之岁；这年的"中冬十一月甲子朔旦冬至，日月在建星，太岁在子"。

这说法又有两个矛盾。其一，既称"摄提格之岁"，那就是太岁在寅了，可是却又称"太岁在子"。其二，从后世的干支纪年逆推上去，太初元年是丁丑年，而一般的历史纪年表都把元封六年记为丙子年。这与元封七年"太岁在子"之说矛盾。

有意思的是，《汉书·律历志上》接着说了一件令人不解，且尤前人解决的事："已得太初本星度、新正，姓等奏：'不能为算。愿募治历者，更造密度，各自增减，以造汉太初历。"既然已得到了"太初本星度、新正"，则何以有些改历人员会提出"不能为算"的自贬声誉的奏章，要求皇上另请高明？尤其领头上奏的大典星射姓当是位天文工作者，其他人当也非无能之辈。在汉代的历法尚属简单的情况下，提出另请高明的请求实在是不可思议的。唯一合理的解释是，这个改历的群体遇到无法克服的困难；且他们之间发生了意见分歧。因为这群人中官阶最高的是大中大夫公孙卿、壶遂，而主管天文历法工作的最高负责人是太史令司马迁，可是这份另请高明的报告却又不是他们所打的。从下文我们还可看到，再请的高明者中已没有了卿、遂、迁等人的名字。

又请了些什么人呢？《汉书·律历志上》中记有："乃选治历邓平及长乐司马可、酒泉侯宜君、侍郎尊，及与民间治历者凡二十余人，方士唐都、巴郡落下闳与焉。都分天部，而闳运算转历。"这些人中，落下闳的方法是"以律起历"，"与邓平所治同。于是，皆观新星度、日月行，更以算推，如闳、平法。"

这一回，大家意见一致了。于是乎，汉武帝"乃诏迁：用邓平所造八十一分律历，罢废尤疏远者十七家。"其后又请人校核过，仍认为"太初历晦朔弦望皆最密。日月如合璧，五星如连珠。"于是，更坚定了使用邓平历的决心。邓平也升官为太史丞。

《汉书·律历志上》中并未详述太初历的具体内容，只谈到了几个数据的来由。

第一，落下闳提出："律容一龠，积八十一寸，则一日之分也。"这里明确提出的



是太初历日法八十一的数字是来源于黄钟律管的容积。黄钟律管长九寸，内管底面积为九平方分。体积为八百一十立方分。落下闳视之为八十一寸。而他的历法中的日法定为八十一。落下闳由此把他的历法数据与音律挂上了钩。

第二，邓平、落下闳都认为，他们定的朔望月长度为："一月之日二十九日八十一分日之四十三。"再根据当时大家公认为19年7闰的规律，可以推得一回归年长度为365 $\frac{385}{1539}$日。其他节气等也都可由此而推出来。

第三，非常奇怪的是邓平提出了藉半日法的问题："先藉半日，名曰阳历；不藉，名曰阴历。所谓阳历者，先朔月生；阴历者，朔而后月乃生。"邓平认为，"阳历朔，皆先旦月生[①]，以朝，诸侯、王、群臣便"。太初改历之前用没用过藉半日法，天文学史家有不同意见。但邓平改太初历是用的此法，这是为什么？在朔前后的一、二日里，月亮实际上是看不见的。所以，邓平说的用了阳历就"先旦月生，以朝，诸侯、王、群臣便"，实在是说说而已[②]，毫无意义。看来是别有缘故。

二、太初改历真相

(一)明显可以推定的事实

在上引五种改历史料中，有很多矛盾。不过也有许多是明显可以推定的事实。

1. 太初改历的原因

太初改历有两个原因。其一是自然的，即《汉书·律历志上》中所载，公孙卿、壶遂、司马迁等所说"历纪坏废"，指出"汉兴，方纲纪大基，庶事草创，袭秦正朔。以北平侯张苍言，用颛顼历，比于六历，疏阔中最为微近。然正朔服色未睹其真。而朔晦月见，弦望满亏多非是。"也即，颛顼历用到汉武帝时，误差已很显著，不得不改。其二是考虑到汉王朝的权威问题。汉初，袭秦正朔，那是因为顾不上。到汉武帝中期，武力强盛，国力大张，海内统一，汉武帝自觉王基巩固，于是有时间来搞些封禅之类的更加显示其君权神授的活动。因此，当臣下上奏说："帝王必改正朔，易服色，所以明受命于天也"，当然高兴得很。



2. 汉武帝为改历下的七次诏书

第一次是接到公孙卿等人"宜改正朔"的上言之后下诏御史大夫儿宽，让他与

---

① 陈久金、陈美东在《从元光历谱及马王堆帛书〈五星占〉的出土再探颛顼历问题》一文中首次对"藉半日法"的问题做了解释。在历法推算中，如果推出下一个合朔时刻的日以下余数部分大于二分之一日，应在上个月。到历面上本朔日时，月已离太阳而东。此所谓"先朔月生"。此时，月在太阳之东，故太阳先出地平，即"先旦月生"。见《中国天文学史文集》，科学出版社，1978年，第95～117页。

② 所谓"先旦月生"，表明这是个旦前见于东方的残月。而新月则应当是在黄昏时分见于西方的，根本谈不上对诸侯、王、群臣上朝时有什么便利不便利的问题。

博士们共议此事。第二次是接到儿宽等人都赞同改历后下诏给御史，决定改历。此即《史记·历书》中所载。第三次是诏公孙卿等人，让他们具体处理改历的事务。第四次是接到大典星射姓等人奏报"不能为算"之后，另选多人编算新历。第五次是下诏给司马迁，让他用邓平所造八十一分律历。第六次诏，使人校验律历。等到校者太监淳于陵渠回奏邓平历法最密后，最后诏定用邓平历法，且给邓平加官。从以上7次诏书可见，整个改历过程是在汉武帝密切关怀下进行的。

3. 邓平的历法大体与落下闳的一致

这是在《汉书·律历志上》中多次强调的：落下闳法"与邓平所治同"；"如闳、平法"等。只不过，邓平使用藉半日法，落下闳是否也用，则不明。

4. 元封七年定过焉逢摄提格的岁名

此事也见于《汉书·律历志上》，故《史记·历书》诏书中的岁名并非衍文。

(二)一些矛盾的消除

1. 关于改历时间的矛盾

《史记·太史公自序》认为，在太初元年"十一月甲子朔旦冬至，天历始改"。而褚补《史记·孝武本纪》、《汉书·武帝本纪》均称是在"元封七年"的夏天或"太初元年的五月"。

如果我们知道武帝下过几次改历诏书，而且有射姓等奏不能为算的事，那么显然可以肯定，两者之说都是有道理的。即，《太史公自序》记的是第一次改历的事，这一次颁布了新的历元；而《孝武本纪》和《武帝本纪》记的是第二次另组班子后进行的改历。这次改历采用了邓平的历法。

2. 新历的正月究竟是什么月份

《史记·历书》既称改历后"日辰之度与夏正同"，而改历诏书却说元封七年"十一月甲子朔旦冬至已詹"的月份为"甲正月"，即，为周正。如果明白太初改历改了两次，则可以肯定，第一次改历，用的是周正。第二次改历才改用夏正。

3. 元封七年是太岁在子、在丑，还是在寅

太岁在寅是不可能的。因为是寅的话，就在甲寅，这与后世的纪年完全连接不上，中间隔断了38年左右。或者说，甲寅之年是第一次改历诏书中所颁布的。而子年则是为第一次改历所进行的测算中所定的(《汉书·律历志上》所记大体不差)。至于丙子和丁丑的矛盾大致可这样解释：元封六年是从原颛顼历的十月到九月。元封七年则是从第二年的十月到九月。而太初元年则为从原颛顼历的第二年十月到第三年的十二月。如果维持1年12个月的习惯，则可以把元封七年定为原颛顼历的第二年十月到第二年十二月，而太初元年则定为原颛顼历的第二年正月



到第二年十二月(12个月)。而就太初历的观点来看,则元封七年可依从元封六年的太岁所在干支名——丙子。

(三)"不能为算"之谜的破解

现在还剩下两个矛盾未曾解决:一个是大典星射姓等人在"已得太初本星度、新正"之后突然提出"不能为算";一个是邓平为什么平白无故要提出"藉半日法"。两者其实是相关的。

究竟在改历中发现了什么困难,以致连大典星射姓那样的专业行家都"不能为算"了呢?细查全部有关遗存史料,可知其他都无关大局,只有一件事令当时的行家们极为挠头。那就是:这些专家们通过仔细天文观测,测得元封七年,"中冬十一月甲子朔旦冬至,日月在建星,太岁在子"。太岁在子,岁名应是困敦。太岁虽是个假想的天体,但它的位置却不是随意安排的,而是与真正的天体——岁星的位置有关的。因此,太岁在子也是一种天文实际的反映。这个实际又是与以往的太岁纪年相关联的。然而,大典星射姓等天文专家们测得的这个太岁位置,却与汉武帝第二次改历诏书,即向御史大夫下令改历的诏书中所记的太岁纪年名称大相径庭。那次诏书中汉武帝显然是根据公孙卿、壶遂、司马迁等人的意见,把元封七年年名定为焉逢摄提格,即甲寅。而如果按相关联的年名计算[①],这一年应当是丙子年,即,游兆困敦年。甲寅年是丙子年之后的第38年,或是,在丙子年之前的第22年。总之,两者之间有很大的间隔。因此,如果要执行诏书中所颁定的年名,将会在天文学上造成困难(寅年的岁星位置和元封七年冬至岁星所在的实际位置相差太远),也会在历史学上造成困难(年名间断太长)。此所以令当时的专家们束手无策:反对皇帝的诏书,那是绝无此胆;顺应皇帝的诏书,那又违反实际,的确算不下去。被迫无奈之下,才会有"不能为算"的报告,请皇帝另请高明来解这个难题。



在这种情况下,敢来应征接手这件事的人,必然有其特殊的办法。而最有效的办法就是把自己的历法弄得更神秘,更显得有天意,由此就可以釜底抽薪,把原来诏书中的历元年名的困难搁置起来,而公开地使用符合实际的历元名称。在皇帝看到新历法更显出自己"受命于天"之时,龙颜大悦之下,他原来诏书里面的历元年名究竟是否真正得到了遵用,就不会多加追究。说到底,汉武帝并非历法专家,要"瞒天过海",是不难的。其实,如果他真是历法行家,那么在他的诏书中也不会颁

① 这里再三强调的是太岁纪年年名的相关联性,而不是相连续性。因为岁星的恒星周期不是12年整,而是11.86年,故每过85~86年,岁星会超过预推位置1次。由此产生太岁纪年中的超辰现象。

布这样的历元年名了[①]。

那么，新班子中的人是用什么办法渡过此难关的呢？其一，就是落下闳、邓平的办法，把历法与音律挂起钩来。早在先秦时代就已经有人提出把天文和音律相联系的思想了。《国语·周语》中周景王与伶州鸠的一段对话记录中，伶州鸠阐发的就是这个思想。这段对话发生在周景王二十三年（前522）。景王问伶州鸠"七律者何?"，伶州鸠回答了一通武王伐纣时的天象。他认为，当时的岁星和月亮之间相去七宿（他称为七列）；岁星和太阳、辰星等的位置相去七辰（他称为七同）。接着指出："凡神人以数合之，以声昭之。数合、声和，然后可同也。故以七同其数，而以律和其声，于是乎有七律。"这里指出了神和人"以数合之，以声昭之"，而这数又来自天文学。

伶州鸠之说在现代人看来固然可笑，但在古代却是被很郑重地对待的。其后又发现了音律中有十二律，它与一年的月数又正好对应。因此，通过音乐可以使神、人相通的思想，在中国天文学史上曾流传了一千多年。落下闳、邓平正是利用这种思想，把自己的历法予以神化，这对时时盼望与神相会的汉武帝来说，自然有其独特的吸引力。

至于年名的矛盾，落下闳、邓平等人采用了含糊敷衍的办法。《汉书·律历志上》在记录大典星射姓等人的历元观测时说道："乃以前历上元太初四千六百一十七岁，至于元封七年，复得焉逢摄提格之岁，……日月在建星，太岁在子。"这里的"四千六百一十七岁"这个数字乃是落下闳、邓平八十一分律历的结果[②]，在邓平、落下闳之前是无人知道的，大典星射姓更不会知道。而居然在这里出现，本应令人奇怪。故王先谦《汉书补注》在注这一句时引王引之的话说，"今案四千六百一十七岁，本作四千五百六十岁。此后人以三统历改之也。"

说这是三统历的数据，那是对的；但说是后人所改则没什么根据。一则中国古人极为尊重历史记载。一般个人妄改是几乎不可能的。私意改动的本子居然得以流传开来，那更是不可思议[③]。再则，妄改总有其目的。而照字面来说，经过四千

① 《史记索隐》在给这个历元年名作注时引了东晋天文学家虞喜的话："天元之始，于十一月甲子夜半朔旦冬至，日月如连珠，俱起牵牛之初，岁，雄在焉逢，雌在摄提格。月，雄在毕，雌在訾，訾则娵訾之宿。日，雄在甲，雌则在子。此则甲寅之元、天道之首。"由这段话中可体会出，武帝诏书中所颁历元为甲寅元，是"天道之首"。这是该历元的政治意义之所在：谁颁行这个历元就表明谁掌握了天道，说明他受命于天。但对甲寅元的这种说法，用到别的元上又有何不可？例如，在东汉时代人们对甲寅元的看法就不这样神秘（见《续汉书·律历志中》）。因此，从政治上说汉武帝也未必非甲寅元不可。

② 参阅后文"三统历"。

③ 传抄中的讹误确有流传下来的。但讹误与妄改不同。讹误都有其规律，或形似，或声似，诸如此类，都可找出其致讹的原因。妄改则不然。虽也都有原因，但皆出于妄改者的某种误解，而与文字的形、音等没多大关系。而四千六百一十七岁和四千五百六十岁相去甚远，也不可能是传抄讹误。



六百一十七岁之后，岁名是不会重复的。即使加进当时可能已掌握的“太岁超辰”规律在内也罢。因此，这样的改动丝毫没有意义。除非我们对这一上元做完全不同于四分历的理解，否则我们无法摆脱困境。

所以，我们认为，这一段文字其实本是邓平等人历法中的内容[①]，是以此来迷惑汉武帝的。班固不知其故，将其录入邓平等人出现之前的史实中，因而更使矛盾显得扑朔迷离。

(四)“藉半日法”之谜

我们前面已经提到邓平声言使用“藉半日法”的理由。而这种理由只能是说说而已。真正有实践意义的“先旦月生”，当是历面在朔旦，而天文实际是在晦或晦之前的一天。这就是所谓的历法先天(预报的天象比实际的天象发生得早)。仔细推敲一下，《汉书·律历志上》在记述藉半日法时称：“先藉半日，名曰阳历；不藉，名曰阴历。所谓阳历者，先朔月生[②]；阴历者，朔而后月乃生。”这段话中所说的阳历，和邓平所说的“阳历朔皆先旦月生”概念中的“阳历”是不同的。《汉书·律历志上》所称“先朔月生”，乃是一种实际新月发生在前，历面朔发生在后的现象，古代称之为历法后天(历法预报的天象发生在实际天象发生之后)。

按照邓平的要求，他安排的是一个先天的历法，即，他定的阳历朔是在上个月末结束之前的一天：晦或晦前1日。也就是说，他安排的历谱，第二个月不是大月30日，而是只有29日。所谓“藉半日法”，当是指将历元的时刻扣去半天，而不是如过去所理解的将历元时刻加上半天。过去所理解的“藉半日法”将会使历法后天，它的第一个月将是30天的大月。

搞清楚了邓平所需要的“藉半日法”的概念，我们才可以反过头来问，他为什么要这样做？因为无论怎么藉半日法，总是一种人为的特殊措施。采取这种特殊措施，一定有它的特殊理由。

这个特殊的理由，我们认为，实在是与太初历所定的历元有问题。邓平发现了这一点，于是不得不使用藉半日法来做一个补救。或者也可说，这是大典星射姓等人发现的第二个使他们“不能为算”的难题。邓平说藉半日法的理由，乃是为了摆脱又一重困境。

---

① 司马迁本人是反对八十一分律历的，他的《史记·历书》中根本不提邓平的名字，他的《历术甲子篇》是地道的四分历。公孙卿等人后来在改历中销声匿迹，其学术观点当与他大致相同。故他们不可能提出四千六百一十七岁这样与八十一分法相关的数据来。

② 先朔，月生。此时月见于日之东方。月出东方地平线上时，太阳已经在东方地平上升高。这种天象对于上早朝的大臣们来说，根本无所谓便利。

我们知道，公孙卿、壶遂、司马迁等人提出改历，既有其历法本身误差增大的自然原因，也有为汉武帝宣扬君权神授需要服务的社会原因。而之所以在元封七年前后提出，还有一个很凑巧的自然原因，那就是：根据汉颛顼历的推算，这一年的十一月甲子日夜半时刻正好是冬至和合朔相会。而这样的相会需 1520 年才有一次①。故当时的天文学家们必然会为遇到这样千载难逢的时刻而兴奋不已，以这样的时刻来作为新历的历元，当然是吉祥无比的了。

然而，他们在这样做时却没有想到，既然旧历会有"朔晦月见，弦望满亏多非是"的毛病，则据此推出的元封七年十一月甲子夜半朔旦冬至的这个时刻又岂能做得准，又怎能以之为历元？然而，显然他们是在大喜之下冲昏了头脑，把这个历元上报给了汉武帝。汉武帝因此才能在改历诏书中予以宣布。等到大典星射姓等人真正做了一番观测之后，自然不难发现这个御颁的历元至少在合朔时刻方面是不准的。面对这种窘境，他们除了提出"不能为算"之外，又能怎么样呢？

以上虽然是我们的推测，但这推测是合理的，而且也可以找到证据。

根据现代天文学的推算，元封七年，十一月中的冬至发生在公元前 105 年 12 月 23 日下午 8 时；合朔发生在公元前 105 年 12 月 24 日 9 时 8 分。而甲子日则是在该年的 12 月 25 日。以上数据均采自《三千五百年历日天象》一书②。该书所给时刻均为北京时间，即中国标准时间。它比西安的地方时早了约 30 分钟。也就是说，在西安观测到的准确的冬至时刻应在公元前 105 年 12 月 23 日下午 7 时 30 分。合朔则发生在公元前 105 年 12 月 24 日 8 时 38 分。由于冬至前后太阳的去极度变化微小，因此，在古代的冬至时刻观测中发生 1～2 天的错误是常有的事，但合朔则不同。古代对朔望月的观测很早就达到了相当准确的程度。公孙卿等人在提出"历纪废坏"时的理由正是"朔晦月见，满亏弦望多非是"。因此我们可以肯定，汉武帝颁布的历元就合朔的误差而言是可以觉察的，大约有 15 时 22 分之多的误差，可以被定为有半天(12 时)的误差。如果历元有半天误差，则新的历法仍然脱逃不了"朔晦月见，弦望满亏多非是"的命运。

因此，邓平必须改此历元。为了不与诏书冲突，邓平不能明改历元，而只能以藉半日法为幌子，以"朝，诸侯、王、群臣便"为理由，而予以暗改。

---

① 颛顼历是一种四分历。即 1 年 $=365\frac{1}{4}$ 日。19 年有 7 个闰月，共 235 个朔望月。1 朔望月 $=19\times365\frac{1}{4}\div235=29\frac{499}{940}$ 日。19 年 $=19\times365\frac{1}{4}$ 日 $=6939\frac{3}{4}$ 日。故从历元开始，经 19 年之后冬至、合朔相会于同一时刻，但不在夜半。必须经 4×19 年 $=76$ 年，才会至朔相会于同一日的夜半。

4×19 年 $=27759$ 日，故从历元开始过 76 年之后至、朔还不会相会于与历元日同名的日子里的夜半。必须经过 20×76 年 $=1520$ 年 $=555180$ 日，才会相会于与历元日名相同的日子的夜半。

② 张培瑜：《三千五百年历日天象》，河南教育出版社，1990 年出版。



第二节 三统历

《三统历》原文也已无传。只因《汉书·律历志》里用一卷多的篇幅，详细介绍了该历，故后世之人对《三统历》原文，已并不如何珍视而予以不断传抄和翻刻。查《隋书·经籍志三·历数家》中有："梁又有《三统历法》三卷，刘歆撰，亡。"据此知，刘歆《三统历》原书有三卷之多，而此本在隋代已亡。但在《旧唐书·经籍志》和《新唐书·艺文志》中都还载有一卷本的刘歆《三统历》，只是在《宋史·艺文志》方始无见。故知在隋、唐时代尚有一卷本（或详细摘要本?）的刘歆《三统历》存在，其失传乃在宋、元时代。

今世得知三统历详情全凭班固传述之功。《汉书·律历志上》说得明白：

> 至孝成世，刘向总六历，列是非，作《五纪论》。向子歆，究其微眇，作《三统历》及《谱》，以说《春秋》，推法密要，故述焉。

班固所述的《三统历》大约可分三部分：序言、历法术文、《世经》。序言在《汉书·律历志上》之末。历法术文和《世经》则构成《汉书·律历志下》的全卷。今约略分析一、三两部分，而置重点于《三统历》术文的本身。

一、《三统历》序言

这篇序言于历法本身的进步，其实无关宏旨，只是它体现了一种用象数《易》来指导历法的思想。如果要讨论中国古代历法思想史，则本文乃是一篇难得的资料，故在此仍有对本文略加考查的必要。

（一）从音律向象数《易》之转变

三统历的数据和计算方法都脱胎于太初历，而太初历是倚仗音律为其神秘主义基础的。那么，刘歆为什么又要将这个基础往象数《易》方面转移呢？这里主要有两个原因。

一个是西汉中期以后象数《易》的兴起。这种源自于《易·系辞传》的数字神秘主义思想，给人提供了一种简捷的研究世界的方法。每种事物现象均可定出一个数，经过数的运算可以求出各种未知的事物现象。这种思想特别在经过西汉思想家董仲舒对古代的阴阳说和五行说加以改造和糅合，成为阴阳五行说之后，在解释事物现象时就变得更为容易。因此，自西汉中期孟喜、京房两位大象数《易》家的工作之后，象数《易》兴旺起来，几有统治当时思想论坛之势。风气所及，刘歆自然会受到深刻的影响。

另一个原因是，当时人们对音律的认识主要还只是三分损益律。因此，太初历的历法数据，基本都与3有关。而对与3无关的就束手无策，无可解释，只好不加理会，不予解释。这对一种作为彻底的方法论来说，当然是不能令人满意的。事实上，太初历家对自己的朔望月长度值 $29\frac{43}{81}$ 中的43这个数字就没法解释。而对于一个象数《易》学家来说，从1、2、3、4、5这些最简单的数字出发，运用加、减、乘、除这些简单的四则运算，几乎可以算出任何一个正整数来，尽管有许多运算和定数是十分牵强可笑的（下面我们会介绍），但总算有了一种说法。

（二）序言中的《易》和象数《易》

刘歆首先以《易·革卦》中的两句名言为自己历法的旗帜。该卦彖辞中说："汤武革命，顺乎天而应乎人。"该卦象辞中又说："治历明时。"有了这两句话作旗帜，刘歆就可以以私人身份来研究历法。刘歆说，这是"所以和人道也。"①他的历法工作也就有了重大的社会意义。

照刘歆看来，《易》甚至是和《春秋》相一致的。他说：

> 《（春秋）经》元一以统始，《易》太极之首也。春秋二以目岁，《易》两仪之中也。於春每月书王，《易》三极之统也。於四时虽亡事，必书时月，《易》四象之节也。时月以建分、至、启、闭之分，《易》八卦之位也。象事成败，《易》吉凶之效也。朝聘会盟，《易》大业之本也。故《易》与《春秋》，天人之道也。

这样就把《春秋》中作为编年体史书所必需的时间坐标系统一一与《易》相联系。从而使《春秋》一书也具有了神秘的色彩。《易》和《春秋》二书讲的是"天人之道"，而天人之道的表现就在时间坐标系统即历法问题上。

既然时间系统有了神秘的意义，那么用象数《易》的数字来解释历法就有了依据。故刘歆引《春秋左传》中的话说："《传》曰：'龟，象也。筮，数也。'物生而后有象，象而后有滋。滋而后有数。"②

在序言中刘歆就给出了用象数《易》来解释历法的几个例子。

先定出几个数字的神秘定义：

元始有象＝1

《春　秋》＝2

① 《汉书·律历志上》。以下刘歆及《三统历》原文，如无特别声明，则均引自《汉书·律历志上》。

② 这一段话，唐颜师古在注《汉书》时指出，乃是"《左氏传》载韩简之言也"。但他引的原文与刘歆所引不同："物生则有象，有象而滋益，滋益乃数起。龟以象告吉凶，筮以数示祸福。"



三　　统＝3

四　　时＝4

以上这4个数相加为10。以5乘10，称之为“成五体”，得50，就是《易·系辞上》中的大衍之数。其中之一，刘歆称之为道。50去“其一”，其余49，“所当用也，故蓍以为数”。[1]

将这个余数“以象两两之；又以象三三之；又以象四四之；又归奇象闰十九及所据一加之；因以再扐两之，是为月法之实”。译成算式就是：$[49\times2\times3\times4+19+1]\times2=2392$。[2] 这就是化成假分数的朔望月平均长度。以日法81除之，即得$29\frac{43}{81}$，于是就避免了对43解释之苦。

接着又引《易·系辞上》中一段有名的象数语言：

> 天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。

《易·系辞》的作者把从1到10这10个数目分成二类，5个是奇数：1、3、5、7、9，称之为天数。5个是偶数：2、4、6、8、10，称之为地数。5个天数之和是25，5个地数之和是30。全部10个数加起来，是55，称为天地之数。“五位相得而各有合”之句，被历代注释家认为是古代一种神秘的数字图形——“洛书”的反映，如图4－1。所谓“成变化而行鬼神”则当是指对“洛书”上这10个数运用四则运算，可以得到任意一个正整数，也即，能算出万事万物来。这自然是可以说“行鬼神”了。请看刘歆的历法数据：

闰法 $19=9+10$

这两个数都是天、地之数中最大的，人称终数。

会数 $47=3\times9+2\times10$

朔望之会 $135=3\times25+2\times30$

会月 $6345=47\times135$

章月 $235=47\times5$

中法 $140530=235\times\frac{2392}{4}$

---

① 《易·系辞上》原文为：“大衍之数五十，其用四十有九。”对另一个不用的并无任何说法。而刘歆则解之为“道”。

② 《易·系辞上》原文为：“分而为二以象两；挂一以象三；揲之以四以象四时；归奇于扐以象闰；五岁再闰，故再扐而后挂。”其各种数字之象征意义和算法与刘歆所说都不同。可见，刘歆只是借用其名辞，以显示其神秘意义而已。

图 4—1 洛书示意

周至 $57=3\times19$

七扐之数＝一月之闰法

$$=\frac{140530-57\times2392}{140530}=\frac{7}{235}$$

虽然越到后面的数字，其神秘意义越不明显，但既然是由前面具有神秘性的数字推演出来的，包含了神秘意义，在刘歆看来乃是再自然不过的事。

以上是就基本数据而言。刘歆还提出了一种庞大的周期，认为经过这一庞大周期之后，日月五星等天体的运动又回复到太极上元的状态。这个庞大周期数也是以神秘数据为出发点推求出来的，而且是配合《易·系辞上》而来的。

《易·系辞上》中说道：

乾之策二百一十有六；坤之策，百四十有四。凡三百有六十，当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。是故四营而成易。十有八变而成卦。八卦而小成。引而伸之。触类而长之。天下之能事毕矣！

刘歆的“复于太极上元”的算法乃是以上引《易·系辞上》的话为纲而展开的：

以“微”为 1，则

著＝3×1

象＝3 著＝$3\times3\times1=9$

卦＝2 象＝$2\times9=18$

此即“十有八变而成卦”。

易＝$4\times18=72$

此即“四营而成易”。

易又等于“参三统、两四时相乘之数”即：

$72=3\times3\times2\times4$

乾之策 $216=3\times72$



坤之策 $144=2\times72$

$72\times9=648$

此被称为“以阳九九之”；

$72\times6=432$

此被称为“以阴六六之”。

$648+432=1080$

此被称为“阴阳各一卦之微算策”。其实质即以 1 策＝3 微算策。

八卦小成 $=8\times1080=8640$

引而信之①，即：

$8\times$ 八卦小成 $=69120$

$69120\times2=138240$

此被称为“天地再之”，并名之为“然后大成，五星会终”。这所谓“五星会终”是指五星会合周期的最小共同周期，即五个数据的最小公倍数。在后文三统历的术文中给出五星的会合周期数，称为五星岁数。它们分别是：

木星岁数 $1728=2^6\times3^3$

金星岁数 $3456=2^7\times3^3$

土星岁数 $4320=2^5\times3^3\times5$

火星岁数 $13824=2^9\times3^3$

水星岁数 $9216=2^{10}\times3^2$

它们的最小共同周期为 $2^{10}\times3^3\times5=138240$。

$138240\times19=2626560$

此被称为“触类而长之”，其结果为“与日月会”。这意思是指从太极上元开始经过 2626560 年后不但五星重又相会，且与冬至和合朔也都相会。那是因为三统历也接受 19 年 7 闰的法则。故只要数据中包含 19 年这个因素，即可成为冬至和合朔都相会的周期数。



$$3\text{ 会}=3\times2626560=7879680$$

此被称为“与一统会”②。其意义是指五星、冬至、合朔又相会在每天的起始时刻，这个日的起始时刻至迟从太初历开始是定在每日的夜半（用现代通俗的说法即半夜 12 时正）。按照三统历的基本数据，从某个冬至、合朔发生在夜半的时刻开始，经过 1539 年，才能又发生冬至、合朔在夜半的现象。$1539=19\times3^4$。而 1 会的

① 《易》原文作“引而伸之”。颜师古注《汉书》，对之注道，“信读曰伸”。

② 《汉书·律历志上》原文作“与三统会”。事实上，1539 年只是一统。且“与三统会”句之下接着又是“三统……”，显然前后不协。故知“与三统会”，当为“与一统会”之讹误。

年数中只有 3^3 的因子，故必须取 3 会。

三统(会)＝3×一统会

＝3×7879680＝23639040

此数的含义指，如果起始是五星、冬至、合朔均相会于甲子日的夜半，则过三统会之后，同一天象又会发生在甲子日的夜半。刘歆称之为“复于太极上元”。

太极上元÷(19×9×6)＝23040

式中的 9，即《易》中所说的阳爻的代表数，而式中的 6 即为阴爻的代表数。这样求得的数，正好是《易・系辞上》中的万物之数的 2 倍，故刘歆取一半，称之为“阴、阳各万一千五百二十，当万物气体之数，天下之能事毕矣”！

《易》以 11520 为万物之数，这是在生产力极为低下，人的认识能力极其有限的情况下才会有的概念。到刘歆的时代，生产力较之《易・系辞上》的写作时代要高出许多，故他已经明白，天下万物当然绝不止 11520 之数。于是，他改之为“万物气体之数”。加上了玄妙的气体两字，则自然人们就无法以实有数来要求它。但不过这样一来，神秘数字就缺乏了物的底蕴，也就失去了存在的价值。这是刘歆数字神秘主义的悲剧。

二、《三统历》术文

《三统历》术文，记于《汉书・律历志下》中的，共六篇，即，统母、纪母、五步、统术、纪术、岁术。今分述之。

(一)统母

《三统历》术文篇首集中了三统历各项基本数据。其中大体又分两部分。一部分是关于日、月的数据，称为统母。另一部分则是关于五星的数据，称为纪母。

统母的全部数据如下：

日法：81。刘歆仍称之为“元始黄钟初九自乘”。又称之为“一龠之数”。黄钟初九自乘是太初历的说法。三统历仍然继承。至于所谓“一龠之数”中的龠，乃是一种量体积的单位。《汉书・律历志上》在前部有段文字讲到：

> 量者，龠、合、升、斗、斛也。所以量多少也。本起于黄钟之龠。……以子谷秬黍中者千有二百实其龠。以井水准其概。……龠者，黄钟律之实也。

这段文字把音乐和度量衡联在了一起。而日法 81 又来自黄钟律管九寸的自乘。由此又使音乐和天文联在了一起。这样，音律、天文、度量衡等，在《汉书・律历志》中都结成了一体。这种观念大概已远比邓平、落下闳等太初历的作者们要走得更



远了。

闰法:19。这是三统历使用的置闰规则:19 年 7 闰。故《汉书·律历志下》载,“因为章岁”。古人以冬至和合朔相会在同一时刻的周期为一章。章岁就是一章的年数,故,此章岁为 19 年。刘歆又称“合天地终数,得闰法”。这句在上文已解释过。

统法:1539。以闰法乘日法而得。经过 1 统之年,冬至和合朔再次相会在同一日的夜半时刻。

元法:4617。这是统法的 3 倍。经过 1 元之年,冬至和合朔再次相会在甲子日的夜半时刻。

会数:47。刘歆重复前文的神秘说法:参天九,两地十,得会数。

章月:235。刘歆称“五位乘会数,得章月”。5×47 固然是 235。但章月的天文意义是一章岁中所含有的朔望月数,即 $12\times19+7=235$。

月法:2392。刘歆对此称:“推大衍象,得月法”。这里只用一句话就代表了上文中所提到的复杂而神秘的公式。

通法:598。这是月法的 1/4。

中法:140530。前文已提到它的算法。清钱大昕指出[①],如用元法 4617 除之,得 $30\frac{2020}{4617}$,这就是两个中气之间的时间间隔,或者也可称之为一个中气的时间长度。事实上,一个回归年的时间长度为 $365\frac{385}{1539}$ 日[②]。一年 12 个中气,故一个中气的时间长度为 $365\frac{385}{1539}\div12=\frac{\frac{562120}{1539}}{12}=\frac{140530}{1539\times3}=\frac{140530}{4617}$。三统历统母数据都取整数。故以 140530 为中法。

周天:562120。以章月乘月法而得。这是以 1 日分为 1539 分的一个回归年长度分值。古人认为太阳的运动是均匀的。故将周天一圈划分成以日为单位的一个回归年长度的刻度,这样,太阳在星空背景上 1 天就走 1 度。而刘歆在此处分周天刻度时,只考虑了 1 回归年长度的分子数,却并未写出它的分母。这是因为它的分母即统法,已在前面给出,在后文计算中凡要归结出度数时,自会有相应的计算步

---

① 见钱大昕:《三统术衍》卷二。

② 三统历的朔望月长度取为 $29\frac{43}{81}$ 日,又取 19 年 7 闰的规则,这些都和太初历一致,故其回归年的长度也和太初历一致为:$\frac{29\frac{43}{81}\times(12\times19+7)}{19}=\frac{2392\times235}{19\times81}=\frac{562120}{1539}=365\frac{385}{1539}$。

骤提出，故在篇首的统母数据中可以不管这个分母。这种手法在中国古代历法中是惯用的。

岁中：12。刘歆称此12的来历为"以三统乘四时，得岁中"。所谓岁中，就是指一个回归年中有的中气数。按一年分二十四节气的制度，则岁中为12本是十分自然的事。但刘歆却要将四时去乘三统，即认为，每一季节都有三统，这就变成一年有12统。此举实在令人不可解。在这里，刘歆为了使数字带上神秘色彩，就牺牲了数据本身的天文意义，实在不可取。

月周：254。刘歆称，"以章月加闰法，得月周"。月周，实际就是一章中的恒星月数目。所谓恒星月，是指地上的人看来，月亮从某个恒星背景出发，从西向东，绕天一周，又回到原来的恒星背景之上，所需的时间长度。由于在这一段时间里，太阳也在星空背景上向东缓慢移动着，故一个恒星月之后，月亮相对于太阳而言，并不回到同一个方向。必须再赶一段时间，才会回到相对太阳而言的同一个方向。这种相对太阳而言月亮回到同一个方向所需的时间，即一个朔望月。故一个朔望月总是大于一个恒星月。经过一个回归年之后，太阳绕天一周，月亮也整整多赶了一周。所以，在一个回归年中，恒星月的个数正好比朔望月的个数多1个。1章有19年，故1章的恒星月数比朔望月数正好多19个。这就是章月加闰法得月周的来历。

朔望之会：135。其神秘算法已在上文述及。实际上这是个极为重要的科学数据。它是中国现知最早的数据确凿的交食周期[①]。在地上的人看来，月亮走到与太阳同一个方向上，月亮挡住了太阳，就发生日食。太阳走到地球背面，向前投射出一条地球的影子。当月亮走到地影中时，就发生月食。月亮在星空背景所走的轨道叫白道。太阳在星空背景上所走的轨道叫黄道。白道和黄道有一个交角。而且黄白二道的两个交点又在沿着黄道做缓慢的运动。由于这些复杂运动的关系，所以，虽然古人早就知道日食发生在朔，月食发生在望，但却不是每逢朔都有日食，每逢望都有月食。只有当朔、望发生在日、月都在黄白交点附近时，才会有日食或月食。月亮从一个交点出发绕天一周回到同一个交点所需的时间叫一个交点月。太阳从一个交点出发回到同一个交点的时间长度叫一个交点年。朔望月、交点月、交点年这三个数据都是无理数，彼此之间也不可通约。但是，总可以找到一种相对而言比较简单的比率，使朔望月、交点月、交点年这三个数据中的某两个的比率与之十分接近。此时，日、月、地三者相对于某个黄白交点而言大体上又回到原来的情况。于是，过去发生的日食和月食情况大体又相继重复出现。这种比率所决定

① 在此之前，《史记·天官书》中已记有一种交食周期。但因数千年传抄之误，已不可知其确切数据。



的朔望月数、交点月或交点年数，就称为交食周期。三统历的数据本是重要的科学成果[①]，但经刘歆一神秘化，使人顿时莫名其妙。

会月：6345。以会数47乘朔望之会135朔望月就得会月。事实上会月乃一章朔望月数和一会朔望月数的最小公倍数。

统月：19035。此数乃会月数的3倍。它也是1统1539年中所含的朔望月数。因为1统共81章（1539＝19×81），故统月＝81×235＝19035。

元月：57105。这是统月的3倍，因为1元之年4617是1统之年1539的3倍。

章中：228。这是1章19年所含的中气数。1年有12中气，故章中228＝12×19。

统中：18468。这是1统的中气数，即以章中数乘81章，可得。

元中：55404。这是1元的中气数，以统中数乘3而得。

策余：8080。这里所谓的策余是指将一个回归年多于360日的部分化成分数后的分子数。三统历一回归年为$365\frac{385}{1539}$日，比360日多出$5\frac{385}{1539}$日。化成分数为$\frac{8080}{1539}$日，故三统历取策余为8080。而刘歆在本项下注的得数来源是："什乘元中，以减周天"。即，策余＝562120－10×55404＝8080。其数值虽然一致，但其天文意义却湮而不彰。

周至：57。刘歆称："参闰法，得周至。"钱大昕则称"四分章中之一"为周至[②]，两者结果一样。

（二）纪母[③]

木、金、土、火、水五颗行星，古代总称五星。它们在星空背景上做显著的有规律的运动。古代天文学家对它们的运动很注意。长沙马王堆汉墓帛书《五星占》中就有相当详细地介绍五星运动的推算和占候的记载。作为历法的一部分，五星运动的预推究竟从哪一部历法开始的，因为缺乏资料，现在还难断言。但至少，太初历应该已经具有。《汉书·律历志上》记载到太初改历时曾说，当初曾命宦者淳于陵渠检校过太初历。淳于陵渠在奏复时不但称"太初历晦、朔、弦、望皆最密"，而且



① 根据现代天文学的精密测算，1朔望月＝29.53059日，1交点月＝27.21222日，1交点年＝346.62003日。135朔望月＝3986.62965日，146.5交点月＝3986.59033日，11.5交点年＝3986.13034日。后3个数据最大相差不过0.5日。可见，作为交食周期，135朔望月的数据是有一定科学性的。

② 据李锐《三统术注》卷二改。原《汉书》各本作"统母"。

③ 《汉书·律历志下》将"纪母"仍称为"统母"，由此形成重复。李锐在《三统术注》中指出，此"统母"为"纪母"之误。今从此说。

是"日月如合璧,五星如连珠"。尽管这里说的是太初历历元时日月五星的位置状态,但是,如果没有有关五星运动的推步知识,那是不可能得到这个结论的。但是,由于太初历的术文已经失传,因此,三统历就成为第一部留下有关五星运动的详细算法的中国历法。

现代天文学告诉我们,古人所认识的五星中,火、木、土三颗行星属于外行星,即,它们绕日运动的轨道在地球绕日轨道之外。另外,水、金二星则属于内行星,即,它们的轨道在地球轨道之内。在地球上的观测者来看,内行星和外行星的运动有一些不同。外行星的绕日运动速度比地球要慢。对于地球上的观测者而言,它们在一个会合周期中只与太阳有一次合,然后,慢慢地行星在太阳的西边出现。这时是在凌晨日出之前,靠近东方的地平线。以后行星离太阳越来越远。到与太阳相距 180°时,外行星离地球最近,称为冲。以后又从太阳的东边向之越来越靠近。最后在将日落时,因靠近太阳太近而被淹没在太阳光里。

内行星在一个会合周期里会与太阳合二次。一次在太阳的背后,称为上合;一次在地球与太阳之间,称为下合。内行星与太阳的角距离有个限度,称为大距。它在上合之后的若干天,与外行星一样,早晨出现于东方。但它在达到东大距之后若干天,又在早晨淹没于东方日出的阳光里。然后经过下合,转在黄昏时出现在西方。待到达到西大距之后,又在黄昏时淹没在西方的太阳光里。

这些不同的运动现象,古人当然说不清它的原因,但是现象的本身却可以观测得很仔细,而且推算也会有进步。在《三统历》的统母篇里,刘歆给出的数据就比帛书《五星占》的数据精确性有很大提高。由于上面所说的地面观测者所见的外行星和内行星的运动状态不同,但是三颗外行星之间和两颗内行星之间却又彼此相似,故下面我们只介绍外行星中的木星和内行星中的金星的运动状态和数据。其他三颗星则分别在两份表格中统一给出,而不做进一步的说明了。

1. 关于木星

木星古称岁星。古人认为,木星 12 年绕天 1 周。因而分周天 1 圈为 12 等份,称为 12 次。木星 1 年走 1 次。这样,可以根据岁星所在的星空位置来纪年,因而称为岁星。

但是,12 年一周天的木星恒星周期其实是粗略的。汉代已发现,实际的恒星周期不到 12 年。或者用另一种说法则是,过了 12 年之后木星走过了比一周天还多的路程。在三统历中就提出,过了 144 年,木星就会多行 1 次。这就是所谓岁星超辰问题。此事下面将会谈到。

岁星岁数:1728。1728=144×12。这意味着木星过了 1728 年后在天上行了 145 圈整周天。因此,岁数的天文意义是指行星在天上走整周天圈数所需的最少



整年数。然而刘歆对此也用了神秘复杂的解释："木金相乘为十二，是为岁星小周，小周乘巛策，为千七百二十八"。这里的"木金相乘为十二"，就引进了洛书数的概念。洛书数把从1到10这10个自然数分配给五行。从1到5这5个数的五行分配是：1水、2火、3木、4金、5土。故刘歆以木星数为3，又取其五行相克之物为金，金数为4。故有"木金相乘为十二"之说。又，木星数为3，3为奇数，为阳。故将12再乘巛策。巛为坤的占字。巛策144，这在前文中已谈到。$12\times144=1728$。数字是凑出来了，刘歆，或许还有古代的象数学家对之很为满意，但天文意义却完全掩盖不见了。而且，这种凑数方法也并不能五星都一致。故此，凑得虽然好像很漂亮，实际却毫无价值。

见中分：20736。此数等于1728×12。故知见中分为木星一个岁数中所含的中气个数。

积中：13；中余：157。这两个数字的意义下文再述。

见中法：1583。三统历既取1728年木星行145周天，则木星的恒星周期为$\frac{1728}{145}$年。根据现代天文学上的公式，对于行星而言，它的会合周期（对地上观测者而言，行星与太阳连续两次相合的时间长度）和恒星周期有如下公式：$\frac{1}{\text{会合周期}}=1-\frac{1}{\text{恒星周期}}$。由此可算得木星的会合周期为$\frac{1728}{1583}$年。于是可得，在1728年中，木星与太阳会合共$1728/\frac{1728}{1583}=1583$次。这就是见中法的天文意义[①]。又，1728年内有20736个中气。则会合1次的中气数为$\frac{20736}{1583}=13\frac{157}{1583}$。此13即上文之积中，而157即为中余。顺便说一句，见中法在后文中又称为大统见复数。

见闰分：12096。因为19年中有7个闰月。1728年中则有闰月数为：$1728\times\frac{7}{19}=\frac{12096}{19}$。故称12096为见闰分。

积月：13；月余：15079。意义见下文。

见月法：30077。1木星岁数中有朔望月数为：$1728\times\frac{235}{19}=\frac{406080}{19}$，则一个会合周期中的朔望月数为：$\frac{406080}{19}/1583=13\frac{15079}{1583\times19}=13\frac{15079}{30077}$。13即上述的积月数。分子15079即上文的月余。而分母即为见月法。

---

① 在早期，古人不用从合到下次合为一个会合周期，而是取早晨行星初见于东方，到下一次早晨初见于东方，为一个会合周期，并称此周期为"一见"。故这里也称"见中法"，或如原文注解，称"见数"。

见中日法:7308711。该数等于 4617×1583。其意义见下。

见月日法:2436237。此数等于 30077×81=1583×19×81=1583×1539。此数源起于见月法与日法的通分,即,为二者的共同分母。而见中日法则为见月日法的 3 倍。

2. 关于金星

金星古名太白。因它是天空中除了日、月之外最亮的天体;且在人目看来,它呈白色,故名太白。

金星岁数:3456。此数的天文意义与木星岁数同。但刘歆对其数的来源则说得更甚:"金火相乘为八。又以火乘之,为十六而小复。小复乘乾策为三千四百五十六"。金为 4。火克金,火为 2。故有"金火相乘为八"之说。但"又以火乘之,为十六而小复",却与木、土等星的算例不协,就是从象数学的观点来看,也觉意外。金既为 4,则为偶数,为阴。故取小复 16 乘乾策 216。由此得 3456。

金星的大部分数据,其意义和求法与木星的有关数据相似。但因金星是内行星,故有晨见和夕见两种情况(所以,金星的一个会合周期不称为一见,而称一复。水星也一样)。因此,尽管有外行星的全部 9 项数据,却在此外又有 8 项分配为晨、夕两部分的数据(这些数据却是木、火、土三颗外行星所没有的)。它们是晨中分、夕中分及各自的积中、中余;晨闰分、夕闰分及各闰的积月、月余。其意义和见中分、见闰分的意义极其相似。因此,下文我们将以表格的形式排出所有这些数据(表 4—1)。在此需要指出的一点是,从金星(水星也是一样)的晨中分、夕中分和晨闰分、夕闰分分析可知,它们都具有 9∶7 的固定比例。

此外,还需要介绍的也许就是土、火、水星的岁数的神秘算法了。但也许并不是大家对之都感兴趣,因此,我们只将它们放在小注里给出,以便供有兴趣的读者查考①。

---

① 土星岁数:4320。算法:"土木相乘而合纬经为三十,是为镇星小周。小周乘巛策,为四千三百二十。"土数 5;木克土,木数 3。3×5=15。所谓"合经纬"就是将原数 2 倍,得 30。土 5 为奇数,为阳数,故乘巛策。30×144=4320。

火星岁数:13824。其算法:"火经特成,故二岁而过初,三十二过初为六十四岁而小周。小周乘乾策,则太阳大周,为万三千八百二十四岁。"说起来算式很简单:2×32×216=13824。其中火数 2,为阴数,故乘乾策。至于为什么要 32 过初,则无任何解释。

水星岁数:9216。算法:"水经特成,故一岁而及初,六十四及初而小复。小复乘巛策,则太阴大周,为九千二百一十六岁。"水数 1,故,乘巛策。但为什么要取 64 及初,以及为什么不乘相克的土数 5? 均无解释。

土星古名填星,火星古名荧惑,水星古名辰星。各有其原由,在此不赘。



表 4－1　五星纪母表

	木	金	土	火	水
岁数	1728	3456	4320	13824	9216
见中分＝岁数×12	20736	41472	51840	165888	110592
积中 $\frac{中余}{见中法}=\frac{见中分}{见中法}=1$ 见之中气数	$13\frac{157}{1583}$	$19\frac{413}{2161}$	$12\frac{1740}{4175}$	$25\frac{4163}{6469}$	$3\frac{23469}{29041}$[1]
见中法＝1岁数中所含见、复数	1583	2161	4175	6469	29041
见闰分＝岁数×7	12096	24192	30240	96768	64512
积月 $\frac{月余}{见月法}=\frac{岁数\times235}{见月法}$	$13\frac{15079}{30077}$	$19\frac{32039}{41059}$	$12\frac{63300}{79325}$	$26\frac{52954}{122911}$	$3\frac{510423}{551779}$
见月法＝见中法×19	30077	41059	79325	122911	551779
见中日法＝3×见月日法	7308711	9977337	19275975	29867373	134082297
见月日法＝见中法×1539	2436237	3325779	6425325	9955791	44694099
晨中分＝见中分×$\frac{9}{16}$		23328			62208
晨积中 $\frac{中余}{见中法}=\frac{晨中分}{见中法}$		$10\frac{1718}{2161}$			$2\frac{4126}{29041}$
夕中分＝见中分×$\frac{7}{16}$		18144			48384
夕积中 $\frac{中余}{见中法}=\frac{夕中分}{见中法}$		$8\frac{856}{2161}$			$1\frac{19343}{29041}$
晨闰分＝见闰分×$\frac{9}{16}$		13608			36288
晨积月 $\frac{月余}{见月法}=\frac{岁数\times235}{见月法}\times\frac{9}{16}$		$11\frac{5191}{41059}$			$2\frac{114682}{551779}$
夕闰分＝见闰分×$\frac{7}{16}$		10584			28224
夕积月 $\frac{月余}{见月法}=\frac{岁数\times235}{见月法}\times\frac{7}{16}$		$8\frac{26848}{41059}$			$1\frac{395741}{551779}$

《汉书》原文为"中余三万二千四百六十九"，经校算，应为"中余二万三千四百六十九"。

(三)五步

"五步"其实是一份五星在一个会合周期中的动态表,不过是用文字叙述而已(见表4—2和表4—3)。

表4—2 外行星动态表

	木星		土星		火星	
动态	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数
晨始见		(去日半次)		(去日半次)		(去日半次)
顺行	121	2/11	87	1/15	276	53/92
留	25	0	34	0	10	0
逆行	84	1/7	101	5/81	62	17/62
留	$24\frac{3}{7308711}$	0	$33\frac{862455}{19275975}$	0	10	0
顺行	$111\frac{1828362}{7308711}$	2/11	85	1/15	276	53/92
伏	$33\frac{3330737}{7308711}$	共行 $3\frac{1673451}{7308711}$	$37\frac{17170170}{19275975}$	共行 $7\frac{8736570}{19275975}$	$146\frac{15689700}{29867373}$	共行 $114\frac{8218005}{29867373}$
一见	$398\frac{5163012}{7308711}$	星行 $33\frac{3334737}{7308711}$	$377\frac{18032625}{19275975}$	星行 $12\frac{13210500}{19275975}$	$780\frac{15689700}{29867373}$	星行 $415\frac{8218005}{29867373}$
日行		145/1728		145/4320		7355/13824

表4—3 内行星动态表

	金星		水星	
动态	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数
晨始见		(去日半次)		(去日半次)
逆行	6	$\frac{1}{2}$	1	2
留	8	0	2	0
顺行	46	$\frac{33}{46}$	7	$\frac{6}{7}$
顺行疾	184	$1\frac{15}{92}$	18	$1\frac{1}{3}$
伏	83	$1\frac{33有奇}{92}$[1]	$37\frac{122029605}{134082297}$	$1\frac{7有奇}{9}$[2]
晨见伏	总共 327	行星 $357\frac{4365220}{9977337}$	$65\frac{122029605}{134082297}$	行 $96\frac{46610128}{134082297}$
夕始见		(去日半次)		(去日半次)

续表

	金星		水星	
动态	时间(日)	日行度数	时间(日)	日行度数
顺行	$181\frac{45}{107}$	$1\frac{15}{92}$	$16\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$
顺行迟	46	$\frac{33}{46}$	7	$\frac{6}{7}$
留	$7\frac{62}{107}$	0	$1\frac{1}{2}$	0
逆行	6	$\frac{1}{2}$	1	2
伏逆	$16\frac{1295352}{9977337}$	星行 $14\frac{3069868}{9977337}$[③]	24	$6\frac{58662820}{134082297}$[④]
夕见伏	总共 $257\frac{1295352}{9977337}$	星行 $226\frac{6907649}{9977337}$	50	行星 $19\frac{15419477}{134082297}$
一复	共 $584\frac{1295352}{9977337}$	星行 $584\frac{1295352}{9977337}$	$115\frac{122029605}{134082297}$	行星 $\frac{122029605}{134082297}$

注:①按有关数据推算,可知,此有奇当为$\frac{611124317}{828118971}$。此数字极为复杂,故文中只得称之为"有奇"。

②伏逆日行也有$\frac{7\text{有奇}}{8}$这样不明确的数字,但根据伏逆日数和星行总数也可算出此有奇的确数。

③此有奇也可根据伏行日数和所行的总度数有得为$\frac{1148663412}{5083074594}$。

④同注②。

表中有几个名词应该解释一下:

顺行:行星在星空背景上从西往东运动。

逆行:由于地球也在绕日运动,所以行星在星空背景上的运动是行星和地球绕日运动的合成结果。在地上观测者看来,行星有时会从东往西运动。这种运动称为逆行。

留:从顺行转变到逆行,或从逆行转变为顺行时,将会有一段时间行星好像完全停止不动。这样现象称为留。

伏:行星走到太阳附近,被太阳光淹没不见,称为伏。

始见:行星刚刚脱离被太阳光淹没状态的时刻。

(四)统术

以上统母、纪母和五步可说是三统历所给出的种种天文数据。而下面的统术、纪术、岁术则是三统历的计算方法。本篇统术乃是讲的计算节气、朔、闰及日、月位

置和月食等项。

1. 推日、月元统

设立这项算法是因为三统历的历元——太极上元，是个很大的数字。它与现实需推求历日的年份相去过于遥远。这使得整个运算非常笨重、累赘，为此设立了本项计算，以求一个较近的近距历元以来的年数，以减轻以后的计算劳动。其具体算法如下：

设从太极上元以来到所求历日之年为 S，则可求得：

$$s=[S/4617]_R$$

这里的太极上元究竟是在哪一年，基本数据中没有给出，但在后文的《世经》篇里多次给出了从三统历上元到发生重大历史事件时的年数，如，到伐桀、伐纣、鲁釐公五年（这一年正月辛亥朔日正好有朔旦冬至相合的天文事件）、汉高祖立国及太初元年等等的年数。《世经》中说道："汉历太初元年距上元十四万三千一百二十七岁"。从这个数字出发，就可以推算太初元年之后任何一年的 S 及 s。

当 $s<$ 统法 1539，则所求年入天统甲子以来年数。

当 $2\times1539>s\geqslant1539$，则所求年入地统甲辰年以来年数。

当 $4617>s\geqslant2\times1539$，则所求之年入人统甲申以来年数。

2. 推天正

这是指从上元以来到所求之年前十一月之前的全部月份数，古称积月。因三统历将一年二十四节的开始排在冬至，且名冬至所在之月为十一月之故。至于所谓天正，则是指冬至所在之月。地正为冬至所在之月的下一月。而人正则是冬至所在之月的下下一月。

设所求之年的入统岁数为 s。则：

$$s\times235\div19=N+\frac{T}{19}\text{，其中 } T<19$$

则 N 为上元以来至所求年的积月数。而 T 则称为闰余。一个回归年有 $12\frac{7}{19}$ 个朔望月，这 $\frac{7}{19}$ 个朔望月即为闰余。如果上式求出的 $T\geqslant12$，经过一年之后，将有 $T+7\geqslant19$，则，在这一年之内将会有 13 个月，即，会有闰月。

又，以上所求为从太极上元到所求年的前十一月之前积月数。此又称天正积月数。

而求地正积月数则为 $N+1$，求人正积月数，则为 $N+2$。



3. 推(天)正月朔[①]

取上文求得的 $N\times 2392\div 81=n+\frac{t}{81}$。$n$ 称为积日，即从太极上元到所求年天正月朔之前的全部整日数。t 则为该天正月朔不到 1 整日的余数，或者说是该天正月朔时刻到其所在日的夜半起始时刻的时间长度。这个长度以 1 日的$\frac{1}{81}$为单位。

因一个月为 $29\frac{43}{81}$日，故当 $t\geqslant 38$ 时，天正之月将有 $t+29\frac{43}{81}\geqslant 30$ 日，故本月为大月。反之，如 $t<38$，则本月为小月。

又，

$$n'=[n/60]_R$$

60 是干支周一周的日数。用 60 去除积日，就是求天正朔日的干支日名。太极上元之日和天统之首日日名均为甲子。地统首日日名为甲辰，人统首日日名为甲申[②]。因此，从 n'可查干支表得出该日的日名。不过要注意的是，在排日名时应以统首日的日名为 0，这在古代历法术语中称为“算外”。

求得天正朔日的日名和合朔时刻(n'日 t 时刻)之后，以后的上弦、下弦、望和次月朔等都好求了。因为三统历还是认为月亮运动是均匀等速的。故，求上弦，就是 $n'+7$，$t+31$；求望，$n'+14$，$t+62$；求下弦，$n'+22$，$t+(93-81=)12$；求次月朔，则 $n'+29$，$t+43$。如此等等。

4. 推闰余所在

这是求应取何月为闰月。当 $T\geqslant 12$ 时，这年有闰，但应闰何月？在古代，比如从春秋到汉初，大体都是把闰月放在年末，叫作“归余于终”。这当然很好办。但汉初以来二十四节气制度发展起来。由此可以提出，让中气保持在固定月份，而以无中气之月为闰月的规则。这样可以使中气、月份与物候相差不致太远，以利于农业生产和社会生活安排。

1 回归年 $=12\frac{7}{19}$朔望月 $=12$ 个中气[③]

1 太阴年 $=12$ 朔望月

---

① 原文为推正月朔。但三统历既然从冬至之月算起，则所求不应是正月朔，而是天正月朔，即，夺落“天”字。

② 一回归年 $=365\frac{385}{1539}$日 $=\frac{562120}{1539}$日。此数以 60 除之，余 40。故如天统之首日为甲子，则地统之首日必为甲辰。同理，人统之首日必为甲申。这是三统历数据的必然结果。三统历也因此以这个首日的干支来命名这三个年份。称天统之首年为甲子，地统之首年为甲辰，人统之首为甲申。

③ 这里的 1 个中气是指从本中气到下一个中气的时间长度，而不是纯粹的中气个数。

$$1\text{回归年}-1\text{太阴年}=\frac{7}{19}\text{朔望月}$$

$$1\text{中气}-1\text{朔望月}=\frac{7}{19\times 12}\text{朔望月}$$

如果从统首气、朔相合于同一日的夜半开始，则每过1个朔望月，合朔与相应的中气就差了$\frac{7}{19\times 12}$朔望月。如此逐月积累，合朔与相应中气的差距越来越远，当这差距大于1朔望月时，这就意味着这个月内将没有中气。如果把这个月定为闰月，即，不计算它的月序，则下个月序之月就又会包含有相应的中气了。当然在计算上我们不必如此复杂，一定要逐个地从统首之月算起。

前已提到，当$T\geqslant 12$时，这一年将有闰月。因为此时过了一年之后必有$7+T\geqslant 19$. 或$\frac{7}{19}+\frac{T}{19}\geqslant 1$。其实不一定必须过一年才会有上述不等式。例如取某个适当的i，就会有：

$$\frac{7}{19}\times\frac{i}{12}+\frac{T}{19}\geqslant 1\text{，或 }7i+12T\geqslant 228$$

式中的$i=1、2、3、\cdots、12$这12个数中最小的一个数。则天正之月以后的第i个月就是闰月。

5. 推冬至

这是求冬至的干支日名和时刻。因为一个回归年的时间长度为360日$+\frac{8080}{1539}$日，而360日可为60除尽，故可弃去。将入统岁数s乘以该余数部分$\frac{8080}{1539}$，其结果的整数部分可称之为积策余日。其日以下的余数部分也名之为小余。写成公式是：$S\times 8080\div 1539=H+\frac{h}{1539}$。式中小余$h<1539$。将积策余日$H$再以干支周60去整求余，即以$H'=[H/60]_R$。$H'$即从统首日干支日名算外的冬至日干支日名，称为大余[①]，而小余h则为冬至的时刻。

6. 推八节

一年二十四节气中又有所谓八节。这是指立春、立夏、立秋、立冬这四立和二分、二至，共8个节气。

1节的时间长度为$(360+\frac{8080}{1539})$日$\div 8=45$日$+\frac{1010}{1539}$日。故从冬至时刻求立春

---

① 原文中误将H称为大余，这是与三统历全文不协调的，也与古代各种历法的定义不合。考其原因，乃是有脱讹文。在"以策余乘入统岁数。盈统法得一"之后当或有"名曰积策余日。不盈者名曰小余。积策余日盈60除之。不盈者名曰大余。"



时刻，就可以将冬至大余加45（仍然是满60，除去之），小余加1080（满1539，除去之，并将大余增加1）。以下求春分、立夏等均可如法求之。

二十四节气中1节气的时间长度为1节时间长度的1/3。即，1节气$=15\frac{1010}{1539\times3}$日$=15\frac{1010}{4617}$日。将此数累加到冬至的大、小余之上，即可求出小寒、大寒……二十四节气的日名和时刻。不过要注意的是，此时的小余是以$1539\times3=4617=$元法为分母的，故原文中称"推中部二十四节，皆以元为法"。

7. 推五行

这里的五行是指将一回归年分成五个长度相等的部分，按一定的规则将之分配均匀，并求出其相应的开始时刻。

$$365\frac{385}{1539}\text{日}\div5=73\frac{77}{1539}\text{日}$$

这是五行中一行的时间长度。

以五行配合四季，自有其自然的困难。因此不得不采用种种特殊的方法。三统历的方法是，以四立开始的春、夏、秋、冬四季为木、火、金、水四行，而将土行的时间长度均分为四。

$$\frac{1}{4}\text{行}=\frac{1}{4}(73\frac{77}{1539}\text{日})=18\frac{404}{1539}\text{日}$$

把这每一小段分配到每行之末。例如，从冬至开始，冬季中的土行开始于冬至之后的$45\frac{1010}{1539}$日$-18\frac{404}{1539}$日$=27\frac{606}{1539}$日。将此加到冬至的大、小余上，就得到冬季土行开始的大、小余。

因为从方位的角度来说，土行为中央之行，故各季中土行的开始均称之为中央的开始。春、夏、秋三季的中央的开始的算法，与冬季相仿，不过分别是从春分、夏至、秋分的大、小余算起而已。

8. 推合晨所在星

此处晨为辰之假借。日月之会是谓辰，合辰即是合朔。本项是推算天正合朔时日月所在的位置，这个位置以二十八宿距星所组成的二十八宿赤道（经）度数系统来表示的。如要推算其他月份合朔时日月所在星也可以从本项计算法中举一反三地推出。本项具体算法如下：

前已推得，从统首时刻起到所求年天正月朔的时间长度，以日为单位的数字是：$(n+\frac{l}{81})$日。因为当时认为太阳1天行1度，而1周天的度数又正等于1回归年的日数（即$365\frac{385}{1539}$日，或$\frac{562120}{1539}$日），故可有下式：

$$d=\left[\left(n+\frac{t}{81}\right)\times\frac{1539}{562120}\right]_R$$

$D=\frac{d}{1539}$，这就是天正合朔时离统首时刻日月所在位置的距离。三统历认为统首时刻日月位置在牵牛初度，即，正与牵牛距星的赤道经度相合。从这一点算起，根据后文给出的二十八宿赤道度数表，可以推知所求年天正合朔所入的星度数。

9. 推其日夜半所在星

这是求天正合朔之日的夜半起始时刻太阳所在的赤道经度位置。因为夜半起始时刻当然发生在合朔时刻之前，故应当从上文求出的 D 中减去一个数。$D=\frac{d}{1539}=d_1+\frac{d_2}{1539}$。式中 d_1 为整数，d_2 为余数，即 $d_2<1539$。又，太阳 1 日才走 1 度。从夜半到合朔时刻不及 1 日，故也只是个小数。这个小数即上文求天正合朔时推得的$\frac{t}{81}$。将此数化成与 d_2 同样的分母，即得：

$$\frac{t}{81}\times 1539=t\times 19$$

$$d_2-t\times 19=d_3$$

则 $d_1+\frac{d_3}{1539}$就是天正合朔之日夜半时刻太阳所在的星度。

设，若 $d_3<0$，则可以改成

$$d_1-1+\frac{1539-d_3}{1539}$$

10. 推其月夜半所在星

这是求天正合朔之日的夜半时刻月亮所在的位置。

1 章有 254 恒星月，故 1 恒星月的时间长度为 $19\times 365\frac{385}{1539}\div 254$。月亮在 1 恒星月中都走 $365\frac{385}{1539}$度。故每天月亮平均走$365\frac{385}{1539}$度$\div\left(\frac{19\times 365\frac{385}{1539}}{254}\right)=\frac{254}{19}$度。

由此可知，从合朔之日的夜半到合朔时月亮共行$\frac{t}{81}\times\frac{254}{19}=\frac{t\times 254}{1539}$度。此数从合辰所在星度中减去，即得夜半时月所在星度。

11. 推诸加时

上面所求得的合朔时刻的小余、冬至时刻的小余，都有其各自的分母。这是以 1 日为单位的分数值。但在民用上，都是将 1 日化为 12 时辰，以十二支的名字命名各个时辰。所以，必须将各个小余化成时辰数。



因为，时辰数：12＝小余：分母。

故，时辰数＝小余×12/分母。

此公式对朔小余和冬至小余都适用，不过朔小余的分母为81，而冬至小余的分母为1539。时辰数以子时为0，丑时为1……

12. 推月食

这是利用月食周期推算未来的月食。

三统历以135月为1月食周。它与1章岁的月数235月有个共同周期：会月6345。统首以来到所求年的天正月朔共有积月 N。此数在上文第二项计算中已求出。

$$N'=[N/6345]_R$$

N'即称为会余岁积月。

三统历以135月为太阳过23次黄白交点的时间，而只有当太阳在交点附近时才会有月食，故135月中有23次月食。1次月食平均时间间隔为$\frac{135}{23}$月。$N'\div\frac{135}{23}=N'\times\frac{23}{135}$。这就是三统历术文中所说"置会余岁积月，以二十三乘之，盈百三十五，除之"的由来。

既然以135月为月食周期，故$\frac{N'\times 23}{135}$只是取其余数部分。即$n'=\left[\frac{N'\times 23}{135}\right]_R$，求得此$n'$后，若$n'=0$，则所求年天正之月有食。若$n'\neq 0$，则求解不等式：$n'+23j\geqslant 135$。式中$j=1、2、3、\cdots$。取$j$为最小之数，即天正之月以后的第$j$个月有月食。



月食一定发生在月望。如果不讲求地面观测者和地心观测者所见月食在时刻计算上有差异的问题（此问题其实在交食计算中是很重要的，它在以后的中国历法发展史上有不断深入的探讨），则月食时月面亏缺最大的时刻（称为食甚），正是太阳和月亮相冲的时刻。故原文中记曰："加时在望，日冲辰"。

（五）纪术

本篇讨论五星运动的问题。

1. 推五星见复

讨论五星运动与有关日、月朔、望、中气等的计算不同。有关日、月的运动计算都可以从统首算起，但有关五星运动的计算，却必须从太极上元算起。因为只有在太极上元时才是五星如连珠，成为五星运动中各种周期的共同起点。

设太极上元以来到所求年年末的总年数为 Y，某行星的岁数为 P，1岁数中该

行星的见复数(文中别称为大统见复数)为 M,则该行星的会合周期,或 1 见复的时间长度为$\frac{P}{M}$,其单位为回归年。

$$Y/\frac{P}{M}=m+y/\frac{p}{M}$$

式中右端 m 为正整数,这就是以太极上元以来该行星的整会合周数。

$$Y/\frac{P}{M}=Y\times M/P=m+y'/p$$

这就是三统历术文给出的公式。y'/p 则是不到一个整会合周期的余数。y'则是从上一次见结束到所求年年末的年数 y 与见复数的乘积,即,$y'=y\times M$。由此得:

$$y=y'/M$$

当 $y'\leqslant M$ 时,$y\leqslant 1$,这表示,在所求年之内会有新的会合周期开始,或者换句话说,新的 1 见或 1 复的开始将发生在所求年之内。

当 $2M\geqslant y'>M$ 时,$2\geqslant y>1$。这意味着新的会合周期将发生在所求年上 1 年。

当 $y'>2M$ 时,$y>2$。这意味着新的会合周期将发生在所求年上 2 年。

因为任何一颗行星的会合周期都小于 2 年,故行星的新会合周期一定只能发生在今年、去年或前年,不可能更早了。①

2. 推星所见中次

这是指所求年年度之前开始的行星新会合周期起始时刻,行星所在的中气数和十二次次数。

上一项计算中所求得的 m,在术文中被称为定见复数。$m\times\frac{P}{M}$即为以回归年为单位的m 个会合周的时间总长度。1 回归年有 12 个中气,故 m 个会合周的总中气数为:

$$m\times\frac{P}{M}\times 12=\frac{m\times P\times 12}{M}$$

其中 $P\times 12$ 即为见中分,设为 J。M 又称为见中法。则

$$\frac{m\times J}{M}=Z+\frac{z}{M}$$

---

① 这一点可以证明如下:因为一定有$\frac{p}{M}<2$,即 $p<2M$,故如果有 $y\geqslant 2$,则 $y'\geqslant 2M$。此时必有$\frac{y'}{p}\geqslant\frac{2M}{p}>\frac{2M}{2M}=1$。也即,必有$\frac{y'}{p}=1+\frac{y''}{p}$。由是$\frac{y\times M}{p}=m+1+\frac{y''}{p}$。因此,如果第 m 个会合周期结束于所求年的上 2 年之外,则第 $m+1$ 个会合周期必结束在所求年年底之前的 3 年之内。所以,我们只不过是把 m 这个数小算了 1 而已。



其中 Z 为式中所能容许的最大正整数；$0\leqslant z<M$。术文中称 Z 为积中，即，从太极上元起的 m 个会合周期内所含整中气的个数。z 在术文中称为中余。不过千万要注意，这积中 Z 和中余 z 与纪母中的积中、中余是完全不同的两回事。

一元 4617 年的中气数为 4617×12=55404，称为元中。

$$z_{元}=[Z/55404]_R$$

式中 $z_{元}$ 被称为中元余。

$$z_{章}=[z_{元}/228]_R$$

228 为章中，即 1 章之年的中气数。$z_{章}$ 被称为入章中数。

$$z_c=[z_{章}/12]_R$$

z_c 即是星所在的中气数和 12 次次数。其实，因 55404 和 228 都含有 12 的因子，所以上面三个式子的运算也可以会成一个，即

$$z_c=[Z/12]_R$$

中数从冬至起算，即，$z_c=0$，则星见于冬至气；$z_c=1$，星见于大寒气……

次数从星纪次起，即，$z_c=0$，则星见于星纪次；$z_c=1$，星见于玄枵次……

3. 推星见月

这是求一个新会合周期开始时星始见的月份。三统历的思路是先算出从上元到所求新周期星始见的时间长度中所包含的整朔望月数以及不足 1 月的余数。从这个整朔望月数就可以求出星始见所在的朔望月为何月。其具体算法如下：

岁数÷见中法=以年为单位的 1 见的时间长度

因为 19 年有 7 闰月，所以，$\frac{岁数}{见中法}\times\frac{7}{19}=1$ 见的时间内所有的闰月数。岁数×7 即见闰分，简称闰分。见中法×19 则称为见月法。$\frac{闰分}{见月法}\times$定见复数=自上元以来全部整会合周期内所有的闰月数。此数加上全部上元以来的每年 12 个月的总月数（其数量正是从上元以来到新的所求的会合周期开始前的全部中气个数。这个数字在上文第 2 项推算中得知，为：积中$+\frac{中余}{见中法}$）。故从上元起到所求的星始见时的总月数为：

$$\begin{aligned}&\frac{闰分}{见月法}\times定见复数+积中+\frac{中余}{见中法}\\&=\frac{闰分\times定见复数}{见月法}+\frac{中余\times19}{见中法\times19}+积中\\&=\frac{闰分\times定见复数+中余\times19}{见月法}+积中\\&=积月+\frac{月余}{见月法}\end{aligned}$$

上式中的积月是最大的整数，$\frac{月余}{见月法}$[①]则为不到 1 个月的余数。两者之和即为从太极上元到所求星始见时刻的全部时间长度，其单位则为 1 个朔望月。不过也应注意，这里的积月、月余和纪母篇中的积月、月余是完全不同的两回事。

下面来推求星始见所在之月的月名。此时可以只考虑积月，而不管月余数字，犹如上面第 2 项的计算中求星始见所在中气时可不管中余的道理一样。

1 元有 57105 个朔望月。将积月数中先 1 元 1 元去掉。其不尽的余数称为月元余：

$$月元余=[积月/57105]_R$$

再 1 章 1 章去掉，得：

$$入章月数=[月元余/235]_R$$

令：$入章月数-\sum_{i=0}^{n}(12\times i+k_i)=A$

式中 i 为入章以来的年份数。n 为入章以来到星始见所在之年的上一年的总年数。又，当 i 指有闰之年时，则 $k_i=1$。当 i 为无闰之年时，则 $k_i=0$。又，上式中求得之 A 必须符合以下不等式：

$$12+k_{n+1}>A\geqslant 0$$

如此，则根据 A 的数值可以得知星始见所在的月份。即，$A=0$，星始见于天正之月；$A=1$，星始见于夏历十二月；$A=2$，星始见于夏历正月……不过，要注意的是，如果星始见所在之年为有闰之年，设闰月为夏历第 r 月，如，闰五月，则 r 为 6；闰六月，则 r 为 7，等等。在这种情况下，如又有 $A-2\geqslant r$，则命 $A-2-r=A'$。当 $A'=0$，即星始见于闰月；$A'=1$，星始见于闰月后之第 1 个月，如此等等。

4. 推至日[②]

这一项计算从题目看，应是推求所求星始见之年的起始冬至日。但实际上从术文可知，所推算的乃是星始见所在中气的交气日名和时刻。

前述第 2 项计算过程中所得的中元余 $z_元$ 乃从所求星始见所在之元的元首起到星始见所在之气的全部中气数。

又，据前文统母篇中数据定义得知：1 中气的时间长度为 $\frac{中法}{元法}=\frac{140530}{4617}=30\frac{2020}{4617}$，其单位为日。故

---

① 月余，原文作“月中余”。中华书局标点本据钱大昕意见，认为其中的“中”字为衍文，故删去，但李锐《三统术注》对此中字并未删去。愚见，月余一词与中余一词相呼应，中字之有无无关紧要。

② “至”应为“中”之误。



$$\frac{中法 \times z_{元}}{元法} = 积日 + \frac{小余}{元法}$$

此为从元首起到所求星始见之气首的全部时间长度，其单位为日。因元首日为甲子，故以60除积日数，其余数按六十干支排列，以甲子为0，即可得所求星始见所在之气的气首日名。用数学式表达可写成：

$$q = [积日/60]_R$$

q 即为以甲子日为0的干支日名。

据《汉书·律历志下》所载，这一项的计算本是为冬至日名。而原术文中最后重申，所求得的 q，“则冬至也”。钱大昕、李锐两位大家都认为，按上述术文推算步骤，所得实为“星见前交中气日”（钱大昕语）或“此推星所见中日”（李锐语）。两人都认为《汉书·律历志下》所载术文称之为冬至日，不过是“举冬至为例”。然而，举冬至为例和求冬至日名是非常不同的两回事。按《汉书·律历志下》术文布算，的确钱、李两人断所求为“星见前交中气日”或“星所见中日”的断语是不错的。其所得的结果也是一个非常确定的中气，然而绝非是一连串中气而可以冬至为例的。对照下面一项计算是推星始见所在之月的“朔日”，可以推知本项计算应为推算星始见所在的中气的首日和时刻。故《汉书》所记的术文有误。“推至日”应为“推中日”之误；而这段术文之末的“则冬至也”当为“则中日也”之误。

5. 推朔日

这是推求星始见所在之月的朔日。

从元首到星见之月的全部月数为月元余。

$$月元余 \times \frac{2392}{81} = 从元首到星见之月朔日的全部日数和时刻$$

即，

$$月元余 \times \frac{2392}{81} = 积日 + \frac{小余}{81}$$

再推，

$$c = [积日/60]_R$$

c 即为所推朔日的干支日名，当然，仍以甲子日为0。

6. 推入中、次日、度数

这是推求星见之时在中气之后的日数和入次之后的度数。

从前面第2项和第4项的推算中得知，从星始见所人的中气到星始见这段时间是：$\frac{中余}{见中法}$，其单位为1个中气的时间。这段时间如以日为单位，则为 $\frac{中法\ 140530}{元法\ 4617} = 30\frac{2020}{4617}$ 日。故从星始见所人的中气到星始见的时间长度（以日为单

位）为：

$$\frac{中余\times中法}{见中法\times元法}=\frac{中余\times中法}{见中日法}$$

又，星始见所在中气的气始离该日的夜半的时间长度为第4项计算中所得的小余/元法。此数可以化成：

$$\frac{小余\times见中法}{元法\times见中法}=\frac{小余\times见中法}{见中日法}$$

所以，星始见离所在中气气始之日的夜半的时间长度总共为：

$$\frac{中余\times中法}{见中日法}+\frac{小余\times见中法}{见中日法}$$

$$=\frac{中余\times中法+小余\times见中法}{见中日法}$$

$$=Q+\frac{Q'}{见中日法}$$

上述算得的数中，其整数部分 Q 就是从中气所在日算外的日数，即，$Q=0$，则星始见就在中气气始所在之日；$Q=1$，星始见在气始所在之日的次日，如此等等。对星始见所入十二次度数而言，也是相仿。即，$Q=0$，则星始见就在中气气始所在之十二次度数内；$Q=1$，星始见在气始所在之度的下一度内，如此等等。至于 $\frac{Q'}{见中日法}$ 则代表着日或度以下的余数。

7. 推入月日数

这是推星始见于某月中的日数和日以下的余数。其算法大体与上项算法相似。从朔日夜半到星始见的时间总长度为：

$$\frac{月余}{见月法}\times\frac{月法}{81}+\frac{小余}{81}\times\frac{见月法}{见月法}$$

$$=\frac{月余\times月法}{见月日法}+\frac{小余\times见月法}{见月日法}$$

$$=\frac{月余\times月法+小余\times见中法}{见月日法}$$

$$=L+\frac{L'}{见月日法}$$

其中整数部分 L 就是星始见所入之月的朔日以来的整日数。$L=0$，星始见在朔日；$L=1$，星始见在朔日之次日。$\frac{L'}{见月日法}$ 为小数部分，即，从星始见之日的夜半到星始见的总时刻。

至于在术文中又提出，把 L 加上朔日的大余，那就是求星见之日的干支日名了。



8. 推后见中

这是推下一次星始见所在的中气。

在纪母篇中已求得每个行星都有自己的一见时间长度，它的单位是 1 中气。其整数部分称为积中，其余数部分称为$\frac{中余}{见中法}$。根据上述第 2 项的推算，已求出上一星始见的自元首以来的中气个数——中元余，和余数——中余。故下一次星始见可以将中元余＋积中[1]，得中气的整数个数，又将$\frac{中余+中余}{见中法}$，得余数。式中前 1 中余和后 1 中余的含义全然不同。前 1 中余是指 1 见中所含中气的余数，即纪母篇中的中余。后 1 中余是指从上元起到上一星始见的中气个数的余数。不清楚为什么《汉书・律历志下》所记术文中会出现用同一个专门术语来称呼实质不同的两个概念。鉴于用语上的混乱，我们认为，在纪母篇中的积中、中余可以改称为见中、见中余。

与之相仿，我们把纪母篇中的积月和月余也可改称见月、见月余。这一点在下面再谈。

且说下一星始见的中气余数为$\frac{见中余+中余}{见中法}$。如果见中余＋中余＞见中法，则此余数可定为（见中余＋中余）－见中法；此时，则在自元首以来的整中气个数中增加 1。

得到下一次星始见的整中气数和中气余数之后，即可按照第 4 项的推算，求该次星始见所在的中日和小余；按照第 6 项的推算，求该次星始见距所在的中气之后的日数和入次之后的度数。

9. 推后见月

这是推下一次星始见所在之月，其方法的原理大致与上项计算相同。

纪母篇中已给出 1 见（即行星的一个会合周期）所包含的整月数（积月，我们建议改称见月）和月的余数（月余，我们建议改称见月余）。以上述第 3 项推算得到的月元余，加上见月，得到自元首以来到下次星始见之间所包含的整月数。又以第 3 项推算中得到的月以下的余数$\frac{月中余}{见月法}$，加上$\frac{见月余}{见月法}$，得到自元首到下次星始见之间所包含的整月数之外的余数。不过要注意的是，如果$\frac{月中余+见月余}{见月法}\geqslant 1$，则当取$\frac{月中余+见月余-见月法}{见月法}$为余数，同时在上面求出的整月数上再加

---

[1] 按下文的建议，中元余＋积中当改为中元余＋见中。

上1。

得到确切的整月数后，可以仿照上述第3项推算，求出下次星始见所在之月的月名。

又可仿照上述第5项推算，求得下次星始见所在之月的朔日；仿照上述第7项的推算，求出下次星始见所入月份中的日数。

10. 推晨见、夕见

上述9项推算是对外行星而言的，它们只有晨始见。而对金、水这两颗内行星而言，尚有晨始见和夕始见之分。当然，我们也可以只考虑晨始见，则完全和外行星的上述9项算法一样，可以得到各项所需要的数据。得到这些晨始见的数据之后，再求夕始见，就可以仿照上述第8、9两项的推算原理，把纪母篇中所给的数据（晨中分、积中、中余；夕中分、积中、中余；晨闰分、积月、月余；夕闰分、积月、月余。但也应根据我们前述的建议，将积中、中余改为复中、复中余；积月、月余改为复月、复中余，并再在前面增加“晨”字或“夕”字）里的夕复中，夕复中余及夕复月、夕复月余，取代第8、第9项推算中的见中、见中余及见月、见月余的地位，由此可以得到夕始见时的相应数据。再求下一次晨始见时，则可从此夕始见算起。故在《汉书・律历志下》所记述文中称之为：“晨见加夕，夕见加晨。皆如上法”。

11. 推五步

这是推求自星始见之后的某个时刻星所在宿度。

前面已经推出星始见时行星所在的宿度（见上面第6项推算），在五步篇中又已给出了行星在一个会合周期中的动态表。动态表里给出了行星在某一动态下所逗留的时间总长度以及该动态下行星运动的每日所行的度数。因此，本项推算本是件很简单的事。先求出所要推求行星宿度的时刻是处在该星动态表中的哪一段。在这一段之前的全部时间数和星所行度数可从该星动态表中逐段相加而得。在这一段中的行度数则可将星在该段中的时间数（从星在该段之初的时刻到欲推求位置的时刻这一段时间的总长度）乘以星在该段中的运动速度，即得星在该段中所行的度数。将所求得之数和前面各段所行之度数相加，就得自星始见以来到所推求时刻的星的全部行度数。将之与上面第6项推算所求出的星所入的十二次度数相加，然后按照下文给出的十二次所在宿度表和二十八宿度数表，就可以得知在给定的时刻该星在十二次中的位置，或二十八宿中的位置。

在《汉书・律历志下》给出的术文中未介绍上述我们所说的算法，而只是介绍了二个分母不同的分数在相乘时的运算方法。也许刘歆或班固认为我们上述的算法，对于一个古代读者来说，不言而喻地是应该掌握了的，故在术文中就不必多加叙述了。



(六)岁术

所谓岁术，本是讨论岁星纪年或太岁纪年问题。但本篇实际上包含了许多与之相关的知识及推算项目，因此本篇的内容相对上述各篇而言，显得既复杂，又丰富。清代钱大昕曾经想把这篇分割成二篇乃至二篇以上，但终究未能成功。事实上，既然这一篇中种种繁杂的内容是相互联系的，则似乎也没有必要将之割裂。我们即以此为据，逐项叙述如下：

1. 推岁所在

所谓岁星纪年，实际是以岁星所在的十二次次名来纪年。要求某一年的岁星年名，实即求该年岁星所在的十二次次名。

天文学发展到刘歆的时代已有很大的进步。早就发现木星的恒星周期不及12年，故12年之后木星要比原来的恒星位置更往前了一点。这种现象当时就称之为木星超辰。在三统历中则认为，经过144年，木星超辰1次，也即，木星在144年中，在天上走了145次。过1728年，木星超辰满整整一周(144×12=1728)。因此，术文给出岁星所在十二次位置的方法如下：

设从太极上元到所求年的年数为S，则有

$$s_{木}=[S/1728]_R$$

$$\frac{s_{木}\times 145}{144}=积次+\frac{次余}{144}$$

积次为上式中允许的最大整数，次余为小于144的正数。设积次为J_c，可求得$J_c\equiv[d_c/12]_R$。d_c在术文中称为定次。$d_c=0$，为木星在星纪次；$d_c=1$，木星在玄枵次；等等。

又，术文中还给出了求太岁所在的方法。但从《汉书·律历志下》中所给术文看来，实际就是该年的干支年名。虽然在太初历中已可见到干支纪年的端倪，但其太岁纪年仍然只有十二支的名称，而不使用六十干支名称，六十干支纪年的使用年代尚是个未能确认的问题。《汉书·律历志下》所记表明六十干支纪年至晚已行用于刘歆的时代。至少其算法则是根据上文求出的J_c，求得

$$g=[J_c/60]_R$$

g即为太岁年名，或六十干支年名。不过它不是从甲子起，而是从丙子起的，即$g=0$时，年名为丙子；$g=1$时，年名为丁丑，如此等等。

2. 赢缩

中华书局标点本《汉书·律历志下》在推岁所在项之后给出了一段文字，标题称为“赢缩”。但细检这一段全文，绝大部分与历法问题无关。今把这一段文字抄录于下：

赢缩。《(左)传》曰:"岁弃其次而旅于明年之次,以害鸟帑,周、楚恶之。"五星之赢缩不是过也。过次者殃大,过舍者灾小,不过者亡咎。次度。六物者岁时日月星辰也。辰者,日月之会而建所指也。

可以看出,这一段文字的前半段,实际是讲星占学,与历法推算是没有关系的,所引《左传》的话是在襄公二十八年章内"春,无冰"条下所记郑国星占家裨灶的话。至于接着的一段"五星之赢缩不是过也。过次者殃大……"云云则是后世星占家的发挥。整个这前半段对于历法来说,乃是一种添加。这种添加有两种可能:

其一,这是刘歆本人所加。由此则可以推知,它当是班固删削之余,而《三统历》原文则这一类与《左传》、星占之类有关的话语当不在少数。不过这种可能性应当说比较小。因为班固是我国历史上著名的文字家和史学家,继其遗志,完成《汉书》全书的班昭和马续也都是我国学术史上的佼佼者,像这种明显的文字上的不协调问题,会逃过三位大家的法眼,实有点不可想象。

其二,则是某个传抄者无意中把一些无关的东西阴错阳差地篡入了《三统历》术文中,所以才会出现这种不协调。这种可能性在我们考查全段文字之下半段时更显得突出。

下半段说了三件事。第一是"次度"两个字,孤零零地,在本段中无可呼应。第二是解释何为六物。六物之名不仅不出现于本段,而且也不见于三统历术文本身之中。第三是解释何谓"辰",但辰的概念也未出现在本段之中。因此,总的看来,本段之下半段是杂乱无章的。

总之,按我们鄙见,本段绝大部分都应删去。只剩下"次度"两字。它应当是下文两份表格的标题。

3. 次度

这一项里包含了两份表,一份是十二次表(表 4－4),一份是二十八宿宿度表(表 4－5)。在前面多项求日、月、五星的位置时经常要用到这两份表。故三统历中必须具体地给出它们。

从上述这两份表中可以看出,所谓十二次,是将一周天均匀地分成 12 段。12 个节气为这相应 12 段的起始点;而 12 个中气,则为相应段的中央点。这 12 个起始点和 12 个中央点,只要根据天文观测确定 1 个点的位置之后,就可以藉助于二十八宿度数表求得其他 23 个点的位置。一般来说,上述 24 个点中经过实测确定的是冬至点。中国天文学史上留下了许多个不同年代里的冬至点位置。由于岁差的原因,冬至点在星空中的位置是在不断变化的。而历代留下的冬至点位置观测值正成为后来东晋天文学家虞喜发现岁差的主要依据。

表 4—4 十二次中气星度表

次名	次初	星度 节气	次中	星度 中气	次末	星度①
星纪	斗	十二度 大雪	牵牛	初度 冬至	婺女	七度
玄枵	婺女	八度 小寒	危	初度 大寒	危	十五度
娵訾	危	十六度 立春	营室	十四度 惊蛰	奎	四度
降娄	奎	五度 雨水	娄	四度 春分	胃	六度
大梁	胃	七度 谷雨	昴	八度 清明	毕	十一度
实沈	毕	十二度 立夏	井	初度 小满	井	十五度
鹑首	井	十六度 芒种	井	三十一度 夏至	柳	八度
鹑火	柳	九度 小暑	张	三度 大暑	张	十七度
鹑尾	张	十八度 立秋	翼	十五度 处暑	轸	十一度
寿星	轸	十二度 白露	角	十度 秋分	氐	四度
大火	氐	十五度 寒露	房	五度 霜降	尾	九度
析木	尾	十度 立冬	箕	七度 小雪	斗	十一度

注：①古人对度数的概念和今人不同。今人称婺女七度乃是指一个点，而古人之称包含了一个区间。即从婺女七度的开始到七度的结束，即八度之前，这整个一度都称为婺女七度。正因为如此，在上表中上一次之末和下一次之初总是差一度。但实际上两者仍然是连续的。

表 4—5 二十八宿度数表

角 十二①	亢 九	氐 十五	房 五	心 五
尾 十八	箕 十一		东	七十五度②
斗 二十六	牛 八	女 十二	虚 十	危 十七
营室 十六	壁 九		北	九十八度
奎 十六	娄 十二	胃 十四	昴 十一	毕 十六
觜 二	参 九		西	八十度
井 三十三	鬼 四	柳 十五	星 七	张 十八
翼 十八	轸 十七		南	百一十二度

注：①单位为度。下同。原文中"度"字省略。

②古代将二十八宿分为四象或四宫。每象七宿。角、亢、氐、房、心、尾、箕七宿古称为东宫，苍龙之象；下面，斗、牛、女、虚、危、营室、壁七宿为北宫，玄武之象；奎、娄、胃、昴、毕、觜、参七宿为西宫，白虎之象；井、鬼、柳、星、张、翼、轸七宿为南宫，朱鸟之象。

二十八宿度数所给出的实际上是从本宿距星到下宿距星之间的赤经差。中国古代测量天体的赤道位置，赤经方面都用的是相对差值，即，所给出的天体赤经数据往往是入××宿若干度。这意思也就是该天体和××宿距星的赤经差为若干度。因此，有了二十八宿度数表以后，还必须知道二十八宿中每一宿的距星。但这份距星表却从未在中国历代的历法著作中出现过。也许，在古人看来，这乃是一个众所周知的最简单明白的事实。然而，传承到现代，这 28 个距星究竟是哪 28 个星，已经成了必须经研究后方能得知的问题。今根据以往的研究①，列出汉代所用二十八宿距星的现代国际通行名称（见表 4－6），以便读者参考。

表 4－6　汉代所用二十八宿距星表

宿名	距星今用名	宿名	距星今用名	宿名	距星今用名	宿名	距星今用名
角	α Vir	斗	φ Sgr	奎	ζ And	东井	μ Gem
亢	κ Vir	牵牛	β Cap	娄	β Ari	鬼	θ Cnc
氐	α Lib	婺女	ϵ Aqr	胃	35 Ari	柳	σ Hya
房	π Sco	虚	β Aqr	昴	17 Tau	七星	α Hya
心	σ Sco	危	α Aqr	毕	ϵ Tau	张	ν_1 Hya
尾	μ_1 Sco	营室	α Peg	觜	φ_1 Ori	翼	α Crt
箕	γ Sgr	壁	γ Peg	参	δ Ori	轸	γ Crv

一些《天文年历》和星表中载有这些星的某个历元下的赤经、赤纬，以及计算这些数据的短期和长期变动的方法及公式，读者可以得到。

4. 章首日名

本项给出了一份一元三统之内各个章章首日名表。在表前有一段文字，这段文字虽说与下文之章首日名表不无关系，但总的说，关系并不紧密，甚至可以说，把这段文字删去也无影响，但它却有一点意外的讯息，故我们还是把这段文字引述如下，请读者明鉴。

> 九章岁为百七十一岁，而九道小终。九终千五百三十九岁而大终。三终而与元终。进退于牵牛之前四度五分。九会，阳以九终，故日有九道。阴兼而成之，故月在十九道。阳名成功，故九会而终。四营而成《易》，故四岁中余一，四章而朔余一，为篇首。八十一章而终一统。

1 大终 1539 年是 81 章，即 9 个 9 章。故可以把 9 章作为 1 小终。又，3 大终就是

① 中国天文学史整理研究小组：《中国天文学史》，科学出版社，1981 年，第 70 页。不过要注意的是该书中对双星的子星符号写为右上角角标，今改为现代通行的右下角角标。如尾距星原书写为 μ'Sco，今改为 μ_1Sco。



4617 年，是为 1 元。故称"三终而与元终"。但值得注意的是接着的一句："进退于牵牛之前四度五分"。我们前面已经看到，在"推合晨所在星"项里，认为在元首时刻，乃至统首时刻，日月所在位置为牵牛初度。此处却说，一元之后日月的位置大约在牵牛之前四度五分。这意味着这一段话的写作者对冬至点在星空中的位置的认识和"推合晨所在星"术文的观点是不一样的。天文学告诉我们，地球自转轴会绕着地球公转的黄极轴做缓慢的运动。这种运动的结果就是天上赤道（地球自转轨道平面和天球相交，割出的大圆）和黄道（地球绕日公转的轨道平面和天球相交，割出的大圆，也可以视之为太阳在天球上运动的轨道）相交的交点（即春分点和秋分点）会沿着黄道做缓慢的自东向西的运动。这种现象天文学上称之为岁差。由于岁差的关系，冬、夏至点在星空间的位置也在做缓慢的从东向西运动。冬至点在牵牛初度的数据大约是春秋末期、战国初年时的数据。到了太初改历的时代，冬至点已移到大约斗 21 度的地方。或者用上述引文中的话，到了牛前四度五分的地方。而从太初改历到刘歆作三统历又经过 100 年左右。因此，上述引文表明了几点。第一，这是太初历的数据，而不是三统历的。其二，刘歆尚未认识到岁差的现象和规律。他为了说《春秋》，不得不引用春秋时期的冬至点位置。但他不可能否定冬至点位置已较春秋时代有变化的现象，故在此透露了一句，一元之后冬至点在牵牛之前四度五分左右。

上述引文的中间一段是讨论九会问题。

在统母篇中已提到一会月为 6345 个朔望月。以章月 235 去除，得一会月共 27 章。1 章 19 年。故一个会月相当于 27×19＝513 年。9 会就是 513×9＝4617 年，即 1 元之年。此所以上述引文中会说"九会而终"。

至于说到"日有九道"，"月有十九道"，其源盖出阴阳家的神秘说法。所谓"阳以九终"，即阳数以 9 为最大（在 1、3、5、7、9 这五个阳数中而言）。"阴兼而成之"，即指以阳数最末一个 9 和阴数最末一个 10，两者相加得 19，故称"月有十九道"。总之，这些都是牵强附会的说法，我们不必多加考虑。

上述引文的最后几句，勉强可以说和下面的表有关。

"四营而成《易》"[①]被附会来解释"四岁中余一"的原因。其实，一年 $365\frac{385}{1539}$ 日 $>365\frac{1}{4}$ 日。故四年之后小余（即指年长度的余数部分）的积累为：$\frac{385}{1539}\times 4=$

---

① 此句原本出自《易·系辞上》，作："是故四营而成《易》，十有八变而成卦。"讲的是以蓍草求卦占卜时的一些方法。《易》在占卜时用 49 根蓍草，按一定的规则数蓍草，数时 4 根 4 根一数，故称之为"四营而成《易》"。要操作三遍，才得一个数，奇数为阳爻，偶数为阴爻。一卦有 6 爻。故要操作 18 遍，成一卦。此即所谓"十有八变而成卦"。这四营和十有八变都是人为规定，本无神秘的含义。刘歆以"四营而成《易》"作为"四岁中余一"的根据，其意图是增加其历法的神秘性。

$\frac{1540}{1539}=1\frac{1}{1539}$日。这就是“四岁中余一”的真正含义。可见，“四岁中余一”是个客观必然的事实，与《易》全不相干。

四章的朔余为 $4\times235\times\frac{43}{81}=\frac{40420}{81}=499\frac{1}{81}$。这就是四章而朔余一的来历。刘歆也把它归入“四营而成《易》”的反映，这除了使后人感到刘歆牵强附会之能以外，其实什么也说明不了。

在上述似乎有所多余的那段文字之后，三统历给出了一份章首日名表。所给的是每一统的各章首日的干支日名。由于原表排列不科学，使初学者乍一看觉得茫无头绪，不知怎么回事，今根据原表之意，改变成表 4－7 的形式。

表 4－7　三统章首日名表

统＼章	一章	二章	三章	四章	五章	六章	七章	八章	九章
一统	甲子	癸卯	癸未	癸亥	癸卯	壬午	壬戌	壬寅	壬午
二统	甲辰	癸未	癸亥	癸卯	癸未	壬戌	壬寅	壬午	壬戌
三统	甲申	癸亥	癸卯	癸未	癸亥	壬寅	壬午	壬戌	壬寅

统＼章	十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八
一统	辛酉	辛丑	辛巳	辛酉	庚子	庚辰	庚申	庚子	己卯
二统	辛丑	辛巳	辛酉	辛丑	庚辰	庚申	庚子	庚辰	己未
三统	辛巳	辛酉	辛丑	辛巳	庚申	庚子	庚辰	庚申	己亥

统＼章	十九	二十	二十一	二十二	二十三	二十四	二十五	二十六	二十七
一统	己未	己亥	己卯	戊午	戊戌	戊寅	戊午	丁酉	丁丑
二统	己亥	己卯	己未	戊戌	戊寅	戊午	戊戌	丁丑	丁巳
三统	己卯	己未	己亥	戊寅	戊午	戊戌	戊寅	丁巳	丁酉

统＼章	二十八	二十九	三十	三十一	三十二	三十三	三十四	三十五	三十六
一统	丁巳	丁酉	丙子	丙辰	丙申	丙子	乙卯	乙未	乙亥
二统	丁酉	丁丑	丙辰	丙申	丙子	丙辰	乙未	乙亥	乙卯
三统	丁丑	丁巳	丙申	丙子	丙辰	丙申	乙亥	乙卯	乙未

统＼章	三十七	三十八	三十九	四十	四十一	四十二	四十三	四十四	四十五
一统	乙卯	甲午	甲戌	甲寅	甲午	癸酉	癸丑	癸巳	癸酉
二统	乙未	甲戌	甲寅	甲午	甲戌	癸丑	癸巳	癸酉	癸丑
三统	乙亥	甲寅	甲午	甲戌	甲寅	癸巳	癸酉	癸丑	癸巳

续表

章 / 统	四十六	四十七	四十八	四十九	五十	五十一	五十二	五十三	五十四
一统	壬子	壬辰	壬申	壬子	辛卯	辛未	辛亥	辛卯	庚午
二统	壬辰	壬申	壬子	壬辰	辛未	辛亥	辛卯	辛未	庚戌
三统	壬申	壬子	壬辰	壬申	辛亥	辛卯	辛未	辛亥	庚寅
章 / 统	**五十五**	**五十六**	**五十七**	**五十八**	**五十九**	**六十**	**六十一**	**六十二**	**六十三**
一统	庚戌	戊寅	庚午[①]	己酉	己丑	己巳	己酉	戊子	戊辰
二统	庚寅	庚午	庚戌	己丑	己巳	己酉	己丑	戊辰	戊申
三统	庚午	庚戌	庚寅	己巳	己酉	己丑	己巳	戊申	戊子
章 / 统	**六十四**	**六十五**	**六十六**	**六十七**	**六十八**	**六十九**	**七十**	**七十一**	**七十二**
一统	戊申	戊子	丁卯	丁未	丁亥	丁卯	丙午	丙戌	丙寅
二统	戊子	戊辰	丁未	丁亥	丁卯	丁未	丙戌	丙寅	丙午
三统	戊辰	戊申	丁亥	丁卯	丁未	丁亥	丙寅	丙午	丙戌
章 / 统	**七十三**	**七十四**	**七十五**	**七十六**	**七十七**	**七十八**	**七十九**	**八十**	**八十一**
一统	丙午	乙酉	乙丑	乙巳	乙酉	甲子	甲辰	甲申	甲子
二统	丙戌	乙丑	乙巳	乙酉	乙丑	甲辰	甲申	甲子	甲辰
三统	丙寅	乙巳	乙酉	乙丑	乙巳	甲申	甲子	甲辰	甲申

①《汉书》原文作“庚子”，误。

5. 推章首朔日、冬至日

所谓章首朔日，是冬至和朔日发生在同一日的同一时刻。故章首朔日即冬至日。

$$1\text{朔望月}=29\frac{43}{81}\text{日}$$

$$1\text{章}=235\text{朔望月}=235\times\frac{2392}{81}=\frac{562120}{81}\text{日}=6939\frac{61}{81}\text{日}$$

$$39=[6939/60]_R$$

这就是三统历术文中说的“各从其统首起，求其后章，常加大余三十九，小余六十一”诸数的由来。至于加上诸数后，如大余超过60，就去掉60；小余超过81则减去81，并在大余上加1。这是古历计算中的常规步骤，术文中只说“数除如法”。

6. 推篇首和周至

所谓篇首即是上述第4项推算中所引到的：“四章而朔余一，为篇首。”

$$1\text{篇}=4\text{章}=4\times235\times29\frac{43}{81}=27759\frac{1}{81}\text{日}$$

$$39=[27759/60]_R$$

故术文中说："推篇，大余亦如之（即，也是加三十九），小余加一。"

所谓周至，据统母篇数据知为57，即三章。故

$$1\text{周至}=3\times235\times29\frac{43}{81}=20819\frac{21}{81}\text{日}$$

$$59=[20819/60]_R$$

故术文中说："求周至，加大余五十九，小余二十一。"不言而喻，对所得数据也要"数除如法"。

三、三统历《世经》

在《汉书·律历志上》中班固说到，刘歆作《三统历》及《〈三统历〉谱》。在《汉书·律历志下》中却未见此《谱》，而是见到一篇题为《世经》的文字。这篇《世经》的内容性质与"历谱"一致，即记载历代帝王登位、王朝兴亡等重大事件的年代。但《世经》中的内容说到西汉灭亡之后直到东汉光武帝在位的年数，这几十年的历史大部分发生在刘歆死后。故历来学者都认为系班固所增入，而非刘歆本文。至于此前部分，与《三统历谱》究竟是否有别，差别多大，则都已无可考校。在此，我们只好就前人之说，即不去怀疑王莽居摄篡位之前的文字乃刘歆所作。

《世经》乃是刘歆对古史归纳而成的一份年谱。从古史年代学的角度来考虑，因为上古史料零乱，越往古，王朝的年代越难断定。例如关于周武王伐纣的年代，历代研究提出的年份，至少有数十家。其中，刘歆所说，也算一家。这或许可以说是《世经》的第一个史学价值。

但其实，也许《世经》更重要的是它的第二个史学价值：提供了三统历上元的具体数据。我们遍阅《三统历》的序言和术文，均未找到三统历上元的具体年份。这样，三统历的推算实际上是无法进行的。只有从《世经》中得知了三统历太极上元距某个确切年代的总年数，才能进行三统历的各项过去和未来的推算。这个确切的数据首推"汉历太初元年，距上元十四万三千一百二十七岁"。

仔细分析一下三统历的上元，是件有意思的事。

三统历定1728年岁星超辰12次。则得8640年超60次。

$$4887=[143127/8640]_R$$

$$4887=2\times1728+1431$$

$$1431=9\times144+33$$

故143127年内岁星超辰24×2+9=33次。又，



$$27=[143127/60]_K$$

故太初元年的年名应为 27＋33＝60，即和太极上元的年名一致。

我们记得，《汉书·律历志上》记述太初历改历过程时曾说到：

> 乃以前历上元泰初四千六百一十七岁，至于元封七年，复得焉逢摄提格之岁。

我们前已指出，这一段本是邓平等人的话，被误记到公孙卿等人的头上了。邓平以焉逢摄提格之岁为上元；到元封七年，又是焉逢摄提格之岁。太初历的上元又是"前历上元泰初四千六百一十七岁"。

这不由得使我们大胆地提出猜想：《世经》中所说的太极上元，实际就是太初历的上元；而刘歆的岁星超辰思想和算法也可能就是公孙卿、壶遂、司马迁等人的遗术。

第三节　太初历和三统历的不同点

三统历的许多基本数据和太初历的相同。太初历的术文没有流传下来，但料想绝大部分也会与三统历的相同。因此，自古以来人们似乎都不怀疑此两历是否会有什么差别。只不过因为《汉书·律历志》留下的是三统历，故人们只讨论三统历而已。要说太初历，人们也常会以三统历的数术答之。

仔细推敲一下，上述观点的一个自然推论就是，刘歆在天文学上没有什么新的建树。他的工作最多就是那篇《世经》，而这只是一种年代学著作。或者还可以推论说，从太初年间到刘歆时代约 100 年间，天文学没有多大进步。然而，历来人们都承认刘歆是一位著名的天文学家，三统历是中国历法史上一部重要的历法。现在又探得许多迹象，表明在太初历颁行以后的 100 年间，天文学是在不断进步的。这些都和太初历即三统历的观点难以相容。

因此，我们总以为，三统历和太初历相比，从天文学上来说应该是有不同的。由于历史资料的缺乏，要探查这个问题，困难确实很大。鉴于这个问题在中国天文学史上有一定的意义，所以我们下了一番试探的工夫。

一、二十八宿体系

《汉书·天文志》上有一段关于岁星纪年的文字。其中列举出在各个年份按石氏、甘氏和太初历的记载，岁星所在的位置。这些位置都是利用二十八宿作为标志来标示的。其中太初历所使用的二十八宿体系和三统历所载有明显的不同。今把太初历、三统历及石氏、甘氏的二十八宿体系列于表 4－8。

表 4－8　太初历、三统历、石氏、甘氏二十八宿对照表

太初历	角	亢	氐	房	心	尾	箕	建星	牵牛	婺女	虚	危	营室	东壁
三统历	角	亢	氐	房	心	尾	箕	斗	牛	女	虚	危	营室	壁
石　氏	角	亢	氐	房	心	尾	箕	斗	牵牛	婺女	虚	危	营室	东壁
甘　氏	角	亢	氐	房	心	尾	箕	建星	牵牛	婺女	虚	危	营室	东壁

太初历	奎	娄	胃	昴	毕	参	罚	东井	舆鬼	注	张	七星	翼	轸
三统历	奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	井	鬼	柳	星	张	翼	轸
石　氏	奎	娄	胃	昴	毕	觜觿	参	东井	舆鬼	柳	七星	张	翼	轸
甘　氏	奎	娄	胃	昴	毕	参	罚	狼	弧	注	张	七星	翼	轸

从表 4－8 中可以看出，三统历的二十八宿体系和石氏体系全同。而太初历则绝大部分和甘氏体系相同。具体地说，太初历用甘氏体系的建星，而三统历则用石氏体系的斗。太初历用甘氏的注、张、七星，三统历用石氏的柳、七星、张。太初历用甘氏的参、罚，三统历用石氏的觜、参。太初历和甘氏体系唯一不同的是，太初历不采用甘氏的狼、弧，而改用石氏的东井、舆鬼。东井、舆鬼离黄道较近，而狼、弧则离黄道较远，太初历对甘氏的调整是有理由的。

既然太初历的二十八宿体系和三统历的不同，可见历来以为三统历中的二十八宿距度数据系落下闳所测的看法是完全错了。其实，三统历的数据是另有根源的。它与《淮南子・天文训》所列完全相同，除了周天度数的尾数及其分配宿这一点例外[①]。总的说来，三统历的二十八宿距度数据应当传承自古代。

至于太初历，则根据《汉书・律历志上》的记载可以肯定，当年是测过二十八宿距度的，但它的数据究竟如何，却已完全失传而无可考了。

二、历元与上元

太初历以太初元年前十一月甲子夜半朔旦冬至为历元。上面我们也已做出推测，太初历有个上元，距太初元年 143127 年。无论我们推测得对还是不对，但三统历是以此为上元的。看来，在这个问题上，两历并无不同。

然而，这就出现了一个问题。我们在讨论《三统历》的序言时已经提到，三统历中有个庞大的周期，并称："三统，二千三百六十三万九千四十，而复于太极上元。"

---

① 《淮南子・天文训》的尾数为$\frac{1}{4}$度，分配在箕宿。三统历的尾数及其分配宿在今本《汉书・律历志下》中脱落。但根据三统历回归年长度可知，周天度数的尾数应为$\frac{385}{1539}$度。不过，它与$\frac{1}{4}$度几乎相等，在古代测量误差范围内，这两个尾数的差别可以忽略。至于三统历尾数的分配宿，据《元史・历志一》记载应在斗宿。



这么庞大的一个太极上元数字怎么在术文和《世经》中均不见影踪？通常理解"复于太极上元"一语，应是指太极上元在前，过了多少年之后又回复到前面太极上元的状态。因此，如果太初元年之前的143127年就已经是太极上元了，那么，数达两千多万那么庞大的年数作为太极上元，就实在是多余的了。除非刘歆以此来炫耀自己数字运算能力之奇。但刘歆作为一个具有数字神秘主义思想的天文学家，他所想炫耀的并不在乎自己的运算能力，而是在于他所得到的数据，其来源之神。从这一点来讲，他得到的数达两千多万年的太极上元才是他所关注的。

总之，三统历的太极上元问题仍是个需要深入探讨的问题。

三、朔望月和回归年

朔望月和回归年是古代历法的两个基本数据。太初历和三统历的这两个数据是完全一致的，自古从无疑义。

然而，《续汉书·律历志中》内记了一段东汉顺帝汉安二年(143)尚书侍郎边韶上书建议改历时的一段话：

> 刘歆研机极深，验之《春秋》，参以《易》道，以《河图帝览嬉》、《洛书乾曜度》推广九道，百七十一岁进退六十三分，百四十四岁一超次，与天相应，少有阙谬。

"百四十四岁一超次"之说是指岁星超辰之事。这事我们已在上面论及，在此可不论。

边韶还提到，刘歆推广九道，并求得了"百七十一岁进退六十三分"的结果。这又是什么意思呢？

我们知道，太初历定一朔望月$=29\frac{43}{81}$日，由于使用19年7闰的规律，因而可求得一回归年$=365\frac{385}{1539}$日。

刘歆在三统历里也使用了这些数据，并在这些数据的基础上发展了太初历的数字神秘主义思想，建立了一整套关于天文数字的复杂而又神秘的数学关系，这些关系既和乐律有关，也和《易经》上的数字有关。

然而，太初历的朔望月和回归年的数值都太大。除了太初历历元本身的测定已包含有后天的误差外，过大的朔望月和回归年数值进一步加强了太初历后天的趋势。这一点，到刘歆时代已有人在探索。

上引边韶的话，说的就是刘歆对太初历天文数据进行修订的事。其中所谓"百七十一岁进退六十三分"，指的就是：按太初历的朔望月数值，积累171岁后，应从中减去63分。或者也可以说，19年应减去7分。

按太初历，一个月的分数为：

$$29\times81+43=2392$$

19 年有 235 个朔望月（$19\times12+7=235$），总分数为：

$$2392\times235=562120$$

减去 7 分则为 562113。也就是说，刘歆认为一个朔望月的精确值应为：

$$\frac{562113}{235\times81}=29.530496\text{ 日}$$

而太初历则为：

$$\frac{562120}{235\times81}=29.530864\text{ 日}$$

按近代理论推算，汉代朔望月数值应为 29.530585 日。显然，刘歆的值的确比太初历的要来得精密。

既然朔望月减小了，在 19 年 7 闰这个闰周不变的条件下，回归年自然也要相应地减小。

$$\text{太初历 1 回归年}=365\,\frac{385}{1539}=\frac{562120}{1539}=365.2502\text{ 日}$$

$$\text{刘歆定 1 回归年}=\frac{562113}{235\times81}\times\frac{235}{19}=\frac{562113}{1539}=365.2456\text{ 日}$$

按近代理论推算，汉代的回归年值应为 365.2423 日。可见，刘歆的值也比太初历要精密。

虽然刘歆发现了比太初历更精密的朔望月和回归年数值，但他却并未在历法计算中正式使用，而只是在《三统历》本文“岁术”篇二十八宿距度表之后的一段文字中注了一句极含糊的话：“九章岁为百七十一岁，而九道小终。”这句话的意思是指从历元时刻开始，经过 9 章 $=9\times19=171$ 岁之后，冬至又和合朔相会在同一天的夜半（因为过 171 年，回归年和朔望月的累积总值都是整数，并且二者相等）。可是，刘歆只是在这一句里透露了一点他的发明，而在其他任何地方，他都不曾用这个新数值，还是只用原来太初历的数值。这是什么缘故呢？

这是因为朔望月和回归年是历法中最基本的数据。刘歆已经按照原来的数据建立了一套神秘的数学关系。如果要改动一个数据，特别是最基本的数据，则全套神秘关系都要推倒重来。一套神秘关系如果可以做这样大的改动，那么，它将不但得不到人们的信仰和崇拜，反而会引起人们对它的根本怀疑。权衡利弊，刘歆自然不得不在维持历法神秘性的要求下牺牲了他自己的科学发明。

四、冬至点的位置

太初历的冬至点按东汉贾逵的说法，是在牵牛初[1]。所谓牵牛初，是指牵牛中星（摩羯座 β 星）所在的那条赤经线。换句话说，按太初历的说法，当时的摩羯座 β 星的赤经正为 270°。用近代岁差理论可以推算得，这样的天象应该发生在公元前 450 年左右。也就是说，这个冬至点位置是袭用的古代数据，而并未经过实测。

贾逵的这个说法一直为后世所沿用。但是至少有两个例外。一个是唐代的李淳风。他指出："太初元年得本星度，日月合璧，俱在建星。"[2]一个是唐代的一行。他在《大衍历议·日度议》里指出："方周汉之交，日已潜退。其袭春秋旧历者，则以为在牵牛之首；其考当时之验者，则以为入建星度中。……故汉历冬至当在斗末，以为建星上得太初本星度，此其明据也。"[3]

查《汉书·律历志上》记载太初改历过程的那一段文字中说到，公孙卿、壶遂、司马迁等人经过一番测量，"至于元封七年，复得焉逢摄提格之岁，中冬十一月甲子朔旦冬至，日月在建星，太岁在子，已得太初本星度新正。"这段话当是李淳风、一行等人议论的依据。既然说是"已得太初本星度新正"，则可知后来邓平等人所定的太初历是使用了这个数据的。因此可以肯定，太初历的冬至点应在建星，至于具体的度数则已失传。

然而这个失传只是建星的距度或建星的距星失传罢了。冬至点位置本身却没有失传，尽管后来的人们都没有注意它。查《大衍历议·日度议》中说到："歆以太初历冬至日在牵牛前五度。"可见，刘歆是知道太初历冬至点位置在哪里的。只因他用的二十八宿体系中没有建星，因此他倒过来，改用牵牛之前的度数来表示。按照刘歆的说法，太初历冬至点在牵牛中星之前五度（按 360°制，则为 4°55′41″），即摩羯座 β 星的赤经应为 270°＋4°55′41″＝274°55′41″。这个数据与太初元年实际天象相差不大。



因此，贾逵等人所说的冬至在牵牛初，实际不是太初历而是三统历的数据。查《续汉书·律历志中》所引贾逵论冬至位置的那段文字中说到："太初历斗二十六度三百八十五分。"我们从本文第一节中知道，太初历不用斗宿，而用建星。用斗宿的乃是三统历。可见，贾逵所说的太初历，实是三统历。

据《汉书·律历志上》的记载，刘歆作三统历的一个目的是："以说《春秋》。"说《春秋》，当然包括说明《春秋》书中所载的天象。可是，刘歆当时还不知道岁差，因

---

① 《续汉书·律历志中》。
② 《新唐书·历志三上》。
③ 《新唐书·历志三上》。

此，在他的历法里只能使用春秋时代的冬至点位置。查《三统历》本文的“统术”篇以及十二次表，都明白表示三统历的冬至点在牵牛初。

然而，离牵牛中星五度，这是一个很大的距离，它已超过了当时的测量误差范围。随着时间的推移，冬至点离牵牛中星越来越远。因此，人们越加无法维持冬至点在牵牛初的说法。事实上，刘歆也已知道当时冬至点并不在牵牛初的事实。他在三统历二十八宿距度表之后的那段文字里说到：“三终而与元终，进退于牵牛之前四度五分。”所谓元终，是指从上元开始，经一元4617年之后，日月又重新回到十一月甲子朔旦冬至的位置。刘歆在这里怀着矛盾的心情，吞吞吐吐地承认冬至点不在牵牛初，而在牵牛之前四度五分。这个数据约和太初元年之前半个多世纪的天象相应。作为太初元年的测值，它的精确性差于太初历的数值，但仍然在当时的测量误差范围之内。由此也可以推断，这大约是刘歆当时测算的结果。虽然他的误差较大，但也表明刘歆本人对冬至点位置的测定是做过工作的。

五、两历比较小结

今把上述太初历与三统历的不同点列于表4—9。

表4—9　太初历与三统历的不同点

	太　初　历	三　统　历
二十八宿	用甘氏体系，仅有个别调整	用石氏体系
岁星周期	12年一周天	144年行145次
历　　元	近距历元	太极上元
基本数据	一朔望月为29 $\frac{43}{81}$日， 一回归年为365 $\frac{385}{1539}$日	完全袭用太初历。但又暗中提出，一朔望月约为29 $\frac{374}{705}$日，一回归年为365 $\frac{378}{1539}$日
冬至点	在建星，或牵牛前五度	在牵牛初。但又承认在牵牛前四度五分

很可能还有其他不同点，这就有待于读者做进一步的探索了。但仅从以上这五点就可知道，刘歆并不是简单地抄袭太初历，而是有改造有发展的。当然，有的改造是保守的，如采用古代的冬至点位置；但总的来说，他是有新发现的，如岁星超次算法、新的朔望月和回归年值，等等。刘歆的太极上元既有繁复神秘的一面，也有促进天文学和数学发展的一面。就是关于冬至点的位置，刘歆也有承认现实，独立进行工作的一面。凡此种种，都从一个侧面表明，自太初改历以后的100年间，天文学不是停滞不前，而是有进步有发展的。对于刘歆本人来说，上述各点表明，他是一位有发明能力的天文学家，在天文学上是有贡献的；但他也是一位保守的思



想家，这种保守反过来影响了他在天文学上的贡献。他利用和发展了《易·系辞》里的数字神秘主义思想，把它套在天文学上，企图用这种办法来神化他所参与的王莽集团，以便为王莽篡权服务。正因为如此，他就不得不受自己制造出来的数字神秘主义体系的束缚，也就不得不受当时奉为经典的儒家经书的束缚。凡属突破这些束缚的新发现，就不得不予以割舍，或置入模糊的、附属的地位。这是作为天文学家的刘歆的一个悲剧。

第五章 东汉四分历研究

第一节 东汉四分历的颁行、法数和发展

太初历行用百多年后，历稍后天，出现了"朔先于历，朔或在晦，月或朔见"，日食多发生在晦日或晦前1日的情况。至元和二年（85），"太初失天益远，日月宿度相觉浸多，而候者皆知冬至之日日在斗二十一度，未至牵牛五度"，冬至"后天四分日之三，晦朔弦望差天一日，宿差五度"。章帝于元和二年二月甲寅下诏改行编䜣、李梵校订增修的四分术。是为东汉四分历。一直行用到东汉亡（220），三国蜀汉仍用之，迄后主炎兴元年（263）蜀汉亡，共行用了179年。它较三统历又有发展。是我国详细记载、完整留存的第二部历法。

一、基本法数和步术

《续汉书·律历志·历法》首先介绍了历法的基本知识和四分术组成。内容包括，昼夜形成、周日运动，太阳之自西向东运动，朔弦望晦的成因和月相，四季之形成，日道之南北，日南极影长而冬至，日北极影短夏乃至。二至之中，道齐景正为春秋分及岁时寒暑的关系。四分术岁首至也，月首朔也。至朔同日谓之章，同在日首谓之蔀，蔀终六旬谓之纪，岁朔又复谓之元。斗之二十一度，去极至远，日在焉而冬至。历始冬至，月先建子，时平夜半。当汉高帝受命四十有五岁（前161），阳在上章，阴在执徐（庚辰），冬十有一月甲子夜半朔旦冬至，日月闰积之数皆自此始，立元正朔，谓之汉历。又上两元（元4560年），为月食五星之元（公元前161年加两元9120年为公元前9281年）。

根据立表测影，影长则日远，冬至为天度之始。历四周1461日而影长复初，是为日行之终。以周除日得岁长365 $\frac{1}{4}$日。日日行1度，亦为天度。察日月俱发度端，日行19周，月行254周，复会于端。以日周19除月周254，得1岁周天之数13 $\frac{7}{19}$。

上元庚申至汉高皇帝受命四十有五岁（前161）庚辰，积2760320年。



元法 4560　　纪法 1520　　纪月 18800

蔀法 76　　蔀月 940　　蔀日 27759

章法 19　　章月 235　　日法 4

周天 1461(＝4×365.25)为一岁的日分。

没数 21(21/4＝5.25)。

通法 487(32 个节气的日数)。

没法、章闰 7(章 19 年中有 7 闰月)。

日余 168($\frac{168}{32}$＝5.25,为岁长与六甲子之差)。

中法 32。

通法/中法＝中节之长。

大周 343335(＝235×1461)。

月周 1016(＝4×254)。

135 月有 23 食,食相复初,既者复既。得 $5\frac{20}{23}$月而一食,1 岁有 $2\frac{55}{513}$食。古历常取公倍数以便运算。135 月有 23 食,513 岁得 1081 食。4 乘 513 等于 27 乘 76 为 2052,四分历称作蔀会。20 蔀会叫元会。故交食法数有

元会 41040　　蔀会 2052　　岁数 513

食数 1081　　月数 135　　食法 23

没数、没法,没日、灭日和推没灭术是后汉四分历新增的法数和历日、历术。平气由等分回归年长(岁实)得出。四分历每气长 $15\frac{7}{32}$日。每气有余分 7,称没法。二十四气共有余分 168,化为日为$5\frac{8}{32}$日。四分历称这个 $5\frac{8}{32}$日为没日。四分朔策为 $29\frac{499}{940}$日,比 30 日短$\frac{441}{940}$日。12 个月比 360(6×60)天少 $5\frac{592}{940}\left(5\frac{592}{940}=5.6298\right)$日。中国古历称此余日为灭日。每岁二十四气长 365.25 天,内有 5.25 个没日,平均 $69\frac{4}{7}$日有 1 没日。12 个朔望月长 $12\times\frac{27759}{940}$日,内有$\frac{5292}{940}$个灭日,平均 62.9456$\left(62\frac{888.8}{940}\right)$日有 1 个灭日。灭日是 12 个朔望月中应该有几个小月(29 日),即 12 个月中小月的数目。与此类似,实际上没日就是二十四气中有多少个大气(大气 16 日,小气 15 日)。以气的余分减日长,中国古历称其余数为没限。四分历没限为$\frac{25}{32}$日。朔策小于 30 日之值,古历称作朔虚。四分历朔虚为$\frac{441}{940}$日。明代历书上分别称没、灭日为

盈、虚日。中历清时宪书前一直用平气注历。平气加时(时分)大于没限者谓有没之气。凡气内有没日者,首尾计入气长 17 日,多 1 日,故曰盈。经朔时分小于朔虚者为有灭之朔。对于用平朔注历的历书,月内有灭日者其月小。至于具体哪一天是没日、灭日,各历均给出推步方法。

东汉四分历灭日的含义与此稍有不同。每气长 15 $\frac{7}{32}$ 日。没法 7 为气长的余分。没限 25,是没法减中法之差。以没法 7 除通法 487 为没日间隔的长度,69 $\frac{4}{7}$ 日,即岁实 365.25 与每岁的没日数 5.25 相除之商。没日推步方法为:

$$(\text{入蔀年}-1)\times\text{没数 }21/\text{日法 }4=\text{积没}+\frac{\text{没余}}{4}$$

$$\text{通法 }487\times\text{积没}/\text{没法 }7=\text{大余}+\text{小余}/7$$

大余满 60 除去,余数根据所入蔀蔀名命之,算尽之外(蔀名不计),得年前冬至前之没日干支和小余。加大余 69,小余 4,得次没。

$$\text{次没大、小余}=\text{没日大、小余}+69\ \frac{4}{7}$$

大余满 60 去之,小余满没法 7,进为大余。递求次没,使其所得仅有大余而无小余,称为灭日,即小余为 0 的没日叫灭日。次没小余比前增 4。由灭日开始,递求次没。当求第 7 个没日时小余又为 0,又得灭日。就是说 7 个没日中即得 1 灭日。7 个灭日共长 69 $\frac{4}{7}\times 7=487$ 日,为通法,是 32 个节气的长度。

东汉四分历的蔀、纪、岁名列于表 5-1。

表 5-1 东汉四分历蔀、纪、岁名

孟人岁 纪纪名	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子
仲天岁 纪纪名	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申
季地岁 纪纪名	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰	庚申	丙子	壬辰	戊申	甲子	庚辰	丙申	壬子	戊辰	甲申	庚子	丙辰	壬申	戊子	甲辰
蔀名 日名	甲子一	癸卯二	壬午三	辛酉四	庚子五	己卯六	戊午七	丁酉八	丙子九	乙卯十	甲午十一	癸酉十二	壬子十三	辛卯十四	庚午十五	己酉十六	戊子十七	丁卯十八	丙午十九	乙酉二十

《续汉书·律历志》汉安论历中记载四分历的历元,"四分历仲纪之元,起于孝文皇帝后元三年(前 161),岁在庚辰。上四十五岁,岁在乙未(前 206),则汉兴元年也。又上二百七十五岁,岁在庚申,则孔子获麟。二百七十六万岁,寻之上行,复得



庚申。"由此得出四分历仲纪之元汉文帝后元三年庚辰(前 161)距庚申上元 2760320 岁。以元法 4560 去之,得605 $\frac{1520}{4560}$,为 605 元加一纪。故续汉历志末尾论曰,"追汉四十五年庚辰(前 161)之岁,追朔一日,乃与天合,以为四分历元。加六百五元一纪,上得庚申"。605 元加一纪为上元庚申以来 606 元的第二纪(仲纪),四分历取作近距之元,并称之为天纪。

推求四分历某年的历日,首先要求出该年所入之蔀及在蔀内的位置,即入蔀第几年。四分历推入蔀术为:以元法(4560)除去上元以来积年,2760320 加所求年距四分近距之元庚申(前 161,汉文帝后元三年)之年数,其余数再以纪法(1520)除之,余数为入纪之年。以蔀法 76 除入纪年数,所得数从甲子蔀数起,0 为甲子蔀,1 为癸卯蔀等,得所入之蔀。蔀法 76 除入纪年数的余数为入蔀年数,知道了所求之年入某某蔀第几年,则是年的中朔闰余可很方便地得出。根据表 5—1 所入纪蔀首岁名,入蔀年数顺数,算外,即得所求年纪年干支。所求年距四分历近距之元(前 161)庚辰之年数,如不满纪法 1520,只需以蔀法 76 除之,即得所入之蔀及入蔀之年。

距元年/蔀法 76=所入蔀数+所入年/76

东汉四分历对于月食五星也给出一个近距历元,汉文帝后元三年庚辰岁(前 161),"又上两元,而月食五星之元并发端焉"。两元为 9120 年,即月食五星之近距之元为公元前 9281 庚辰岁。关于这个历元,下面推月食、步五星术中还要提到。这里只先指出,对于步月食,这个庚辰近距历元和距文帝后元三年(前 161)庚辰 2760320 之庚申上元,并不完全对应。两元是有差别的。

续汉志历法说,日日行 1 度,亦为天度。察日月俱发度端。日行 19 周,月行 254 周,复会于端,是则月行之终也。以日周除月周,得一岁周天之数。以日一周减之,余 12 $\frac{7}{19}$,则月行过周及日行之数也,为一岁之月。以除一岁日,为一月之数。太阳每日东行 1 度,即天每日西行 1 度。日行 19 周,而月行 254 周。

$$一岁月行周天之数=\frac{月周\ 254}{日周\ 19}=13\frac{7}{19}=13\frac{28}{76}$$

日行 19 周,为 19 岁、235 月、6939.75 日,等于月行 254 周。可得出月行一周为 27.32185039 日,为恒星月或经天月长。以除周天度 365.25 度,得月每日平行度为 13 $\frac{28}{76}$=13.36842105 度。

一岁月行周天之数,即月每日行天之度数。月岁行周天13 $\frac{7}{19}$周内减日岁行 1 周,余 12 $\frac{7}{19}$,为每岁月比日多行周天之数。也就是每日月比日多行之度数。它就

是每岁之朔望月数。故

$$朔望月长=一岁日\ 365.25/12\frac{7}{19}=29\frac{499}{940}$$

$$=29.53085107\ 日$$

恒星月 T、朔望月 S 和回归年 E 长及每日月行、日行度数之间的关系，实际上是由于地球、月亮公转和会合运动引起的。东汉四分历还不明岁差，视回归年与恒星年是一回事。它们之间有 $\frac{1}{S}=\frac{1}{T}-\frac{1}{E}$ 的关系。这个问题，我们留待第七章中再做详细介绍。

东汉四分历自章帝元和二年(85)施行，其后魏、蜀汉沿用，共行 179 年。元和二年距仲纪之元(前 161)庚辰 245 年，炎兴元年(263)距庚辰 423 年。由前所述，可知它们分别入辛酉蔀 18 年和己卯蔀 44 年。

二、东汉四分历的发展和创新

东汉四分历通过实测得出冬至日在斗 21.25 度，改变了三统历日在牛初的说法。历法自此始用斗分。公元 1 世纪中叶，冬至点太阳赤经约当斗 18°.96。四分历给出的冬至日在斗 21.25 度，化为 360°制，当斗 20°.94，约有 2°的误差。因为太阳甚亮，日出列宿皆熄。测定日躔，比较困难。晋姜岌始创根据月食所冲，判断日度所在。宋姚舜辅纪元历又创利用金星昏后明前验定星度，确定太阳位置的方法。它们都是比较准确的。但在先秦两汉，只能根据昏、旦、夜半中天之星，或观测月亮所在星宿位置来间接推出。昏旦、夜半及合朔时刻不易测准，月亮运动又有迟有疾。四分历实测所得约有 2°误差可以理解。

和帝永元年间，贾逵指出用黄道度日月弦望，比用赤道密近。至十五年(103)七月甲辰，诏书造太史黄道铜仪。东汉四分历第一次给出二十八宿的黄道宿度。冬至日在黄道斗 19.25 度。历术中黄道宿度与赤道宿度同时列出。

贾逵已发现月行有迟疾，月所行道有远近，及近地点也在移动。近地点月亮运动最快。贾逵说，近地点运动 1 月移动 3 度，“率一月移故所疾处三度，九岁九道一复”。9 和 19 的公倍数是 171。故 9 章 171 岁为合朔冬至日月过近地点的一个周期。现在知道，月球轨道长轴的方向在不断变化，近地点不停地向东移动。运行 1 周需时 3232 天(8.849 回归年)。其时的认识已如此密近，但四分历计算中未予采用。

四分历颁行初期，仍沿旧制，昼夜漏率按每 9 日增减 1 刻。永元十四年(102)，待诏太史霍融上言，指出这种旧制不与天相应，时差可至 2 刻半，宜随日进退。漏刻随日南北 2 度 4 分而增减 1 刻。太常史官运仪下水，证实旧制失天至 3 刻。而



以晷影为刻，则少所违失，密近有验。于是和帝十一月甲寅诏令改行新制。据浑仪测定的日去极远近度数，下参晷影，确定漏刻。新法漏刻随日南北而进退，二十四节气的昼夜漏刻变化就不是均匀的了。实际上，春秋二分附近，太阳赤纬变化极快，大约五六日即南北移动 2 度 4 分，昼夜漏刻就要增减 1 刻。而在冬夏二至前后，改变极慢，大约十四五日才变化 1 度，南北移动 2 度 4 分约需二十五六日。所以冬夏二至附近的昼夜漏刻就变化得比较缓慢。昼夜漏刻、晷影长短与日去极远近即赤纬的变化是相应的。四分历昼夜漏刻改变 9 日增减 1 刻的旧制，改行随日去极远近而进退，是时刻制度方面一大改革。这个问题在步晷漏中将做深入讨论。

为计算历日中朔，四分历给出了仲纪之元庚辰（前 161）。同时又给出孔子获麟前 276 万年的庚申上元。这是冬至合朔齐同，又当五星会合日月交会之时。由仲纪之元，加 605 元 1 纪，乃得庚申上元。两种历元均便于计算。

四分历使用与三统历同样的周期预报月食，但有明确的月食计算历元，并发展了月食推步方法。四分历给出了两个月食计算历元。除庚申上元外，另给出由仲纪之元又上两元（公元前 9281 年）庚辰为月食五星的一个近距历元。对于推步月食，它与庚申上元相差一章。续汉志论月食说，四分因太初法以河平癸巳（前 28）为元，此即庚申上元的近距之元。永元二年（91）甲辰诏书施行宗绀术，其近距历元为元帝初元二年甲戌（前 47），早于河平癸巳一章。此元与四分历仲纪之元又上两元的庚辰历元相符。

三统历推步五星以始见为会合运动始点。四分历改以合伏为法，是个进步。

根据仪、表观测，测得太阳的黄道去极度及日中晷影，计算得出昼夜漏刻和昏旦中星。四分历首次给出了晷漏表，发展了步晷漏术，为后世历法效法。

历法数据如岁实（回归年）、朔策（朔望月）、月亮、五星行度、会合周期等都比三统历有改进。



四分历元和二年（85）施行时，真实回归年长 365.2423076 日，比四分历岁实 365.25 约短 0.0076924 日。而四分朔实 29.53085107 日比真实平朔望月 29.53058464 长 0.00026643 日。由于四分历岁实朔策仍较大，因此可知节气约 130 年就要后天 1 日，约 303.46 年（3753.33 月）后朔日即将多出 1 天。就是说，虽然四分历比三统历稍有改善，但所取岁实、朔策偏大，行用日久仍将后天。

东汉四分历仲纪之元庚辰岁（前 161）历元朔旦冬至基本合天。这个历元是推算选取的，与太初元年正好相差 3 章。根据四分历法数推步，经过 3 章 57 岁，太初元年为甲子蔀四章章首，岁前十一月朔旦冬至齐同，起于癸亥日卯时，天正朔大余 59，小余 235；冬至大余 59，小余 8（以 32 为分母）。因为到元和二年（85），太初历失天益远，候者皆知冬至之日日在斗 21.25 度，太初历冬至后天 0.75 日，晦朔弦望差

天1日。四分历选取庚辰仲纪之元(前161)校正了太初历3/4日的后天。经笔者考查,在文帝后元三年(前161)年前冬至为癸亥日夜子时,合朔在乙丑日丑初。节气基本合天,合朔先天1日。在元和二年(85)后汉四分历颁行时距仲纪之元已过245年。按以上分析,是时节气应已后天近两日,合朔应大致合天。这一点从文献记载的日食可以看出。汉书五行志记载太初后日食25事,晦16,朔9。续汉书五行志记光武帝建武至章帝建初日食18次,内发生于晦日者15起,朔日3起。在施行太初历的187年中,共记录日食43事,内朔食12、晦食31。晦占72%,朔占28%。与四分历对太初历后天3/4日的评价大致相当。续汉志记录章帝元和以后日食54事,内发生于晦日者20(37%)、朔日者30(56%)、二日者4(7%)。由此看出,四分历日食多发生在朔日,少数出现于晦日。以日食验朔可证,四分历比太初历是更为合天的。

第二节　太阳出没及步晷漏术

一、漏刻随去极度差而增损

刘歆三统历将以颁布历日为目的的古代历法加进了日月五星运动和交食方面的内容。后汉四分历在此基础上又有所发展,充实了有关时刻制度的推步方法。自此中国历法走上了完整的天体历的轨道。其内容包含推步中朔、发敛、日躔、月离、五星、交会、晷漏七个方面。

步晷漏术及表为四分历所增,后世皆从其法。内容包括实测得出的太阳位置、黄道去极度、晷影,及由此推算而定的二十四气昼夜漏刻和昏旦中星数值等及有关推步方法。

四分历说,"黄道去极、日景之生,据仪、表也。漏刻之生,以去极远近差乘节气之差。如远近而差一刻,以相增损。"说明黄道去极度,是根据浑仪测得,晷景尺寸是由圭表日中测影而来。而昼漏刻、夜漏刻数值是根据黄道去极度推算得出的。汉代时刻制度为日百刻,分成昼夜。日出至日没时间加昏明各2.5刻(共5刻)为昼刻;日没至日出刻数减昏明共5刻为夜刻。自西汉已经这样规定,东汉四分历沿用之。由实测得出自冬至到夏至、由夏至到冬至182.625日黄道去极度相差48度,而昼夜漏刻差20刻。平均黄道去极相差1度,漏刻相去0.417刻。例如冬至到小寒,黄道去极差1.92度,乘每度0.417刻,得0.80刻,故小寒昼漏刻比冬至大0.8刻,夜漏小0.8刻。小寒至大寒,黄道去极差2.41度,与0.417刻/度相乘得1刻,故大寒节气下昼刻比小寒大1刻,夜刻小1刻(原文"大寒夜刻五十三刻八分","八"误,应作二分)。其他节气做法相同。这就是术文说的,"以去极远近差乘节气



之差。如远近而差一刻，以相增损。”前面说过，四分历颁行之初，时刻制度仍沿旧制。因冬夏至相距 182.625 天，昼夜漏刻相差 20 刻，平均 9.13 天差 1 刻。旧制按每 9 日将昼夜漏刻数增损 1 刻。自和帝永元十四年(102)才诏行上述新制。因 1/0.417=2.4 度，故新制规定按黄道去极每相差 2.4 度，漏刻即增减 1 刻，而不再依相距天数增减刻数。

下面从天文角度对太阳出没、黄道去极与昼夜刻数的关系试做考查。

在由太阳赤经圈、黄道、赤道所组成的球面三角形中，太阳赤经圈与赤道交角是直角。由此正交三角形容易得出：

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin l$$

$$\cos l=\cos\alpha\cos\delta$$

由黄道、赤道坐标变换公式：

$$\sin\delta=\cos\varepsilon\sin b+\sin\varepsilon\cos b\sin l$$

因对于太阳，黄纬 b 为 0，所以 $\sin b=0$，$\cos b=1$，亦可方便地得出上述关系。其中 α、δ 为太阳赤经、赤纬，l 为太阳黄经，ε 为黄赤交角。

$$l=\text{近地点黄经 }\pi+\text{真近点角 }v$$

$$=\pi+M+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\cdots$$

若太阳的角运动是匀速的，以 n 表示太阳对地球的平均角速度，过近地点的时刻为 t_0，$n(t-t_0)$表示任意时刻 t 太阳距近点的角度值。这个量称作平近点角，以 M 表示。这里和本书以后说的太阳运动，指的都是太阳的视运动。因地球绕日公转，人在地球上看起来，太阳在星空中由西向东运动。太阳中心对星空而言的周年轨迹，称作黄道。它在天球上是一个大圆。与地球自转轴垂直的平面，延伸与天球相交称天赤道。黄道面和赤道面的交角，叫黄赤交角或黄道倾角，用 ε 表示。e 是地球轨道的偏心率。地球绕日公转的轨道是椭圆，但与正圆相差不大，偏心率 e 相当小。

将上式对时间 t 求导数。因 $M=n(t-t_0)$，有 $\frac{dM}{dt}=n$，于是得到太阳的视角速度：

$$\frac{dl}{dt}=n(1+2e\cos M+\cdots)=3548''.2+118''.7\cos M+\cdots$$

微分：

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin l$$

得：

$$\cos\delta d\delta=\sin\varepsilon\cos l dl$$

代入上得之式，有近似关系：

$$d\delta = \sin\varepsilon\cos\alpha dl = n\sin\varepsilon\cos\alpha(1+2e\cos M)dt$$

这就是太阳赤纬随时间变化的表示式。

从日出到日没为白天，称昼；自日没至日出为黑夜，叫夜。夏至白天最长、黑夜最短；冬至白昼最短，黑夜最长。昼夜长短是由太阳赤纬或去极度决定的。从连接太阳、天极的赤经圈（又称时圈）测量太阳距赤道的角度称赤纬 δ。太阳与北天极的角距叫黄道去极度。北天极距赤道任一点都相距 90°（中国度 91.31 度）。因此黄道去极度等于 $90°-\delta$（91.31 度加减太阳赤纬中度，太阳在赤道北为减，在赤道南为加）。夏至太阳在赤道北端，赤纬为 $+23°40'$（赤纬 δ 在赤道北为正，南为负），当赤纬极大，故称夏至为日长至、日北至；冬至太阳在赤道最南处，赤纬为 $-23°40'$，故又称日短至、日南至。中国古代将一日分作百刻，将日出前黎明的 2.5 刻和日没后黄昏的 2.5 刻加到日出到日没的白天的时间里称作昼刻，百刻内减昼刻的时间叫作夜刻。这样，历法中昼刻比日出到日没多 5 刻，夜刻比日没至日出时间少 5 刻。

天文上计算太阳出没时刻是根据下式计算的。该式由连接太阳、天顶、北天极的赤经圈、方位圈（中历称地平高弧）组成的球面三角形极易导出：

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

式中 z 为太阳的天顶距，φ 为观测地的地理纬度，δ 为太阳赤纬，t 为太阳赤经圈与午圈（南子午圈）之间的夹角，称作太阳的时角。

当太阳中心在地平圈上时，天顶距 z（沿地平经圈测量得出的太阳与天顶的距角）为 90°，故 $\cos z=0$，这样，上式变成：

$$\cos t = -\mathrm{tg}\varphi\,\mathrm{tg}\delta$$



太阳赤纬 δ，地理纬度 φ 已知，即可得出太阳出没的时角 t。t 又称半昼弧，给出太阳日没时的真太阳时角（将角度化为时刻，15°为 1 时）。午正时刻减去 t 即为日出时刻。

下面讨论由于太阳赤纬每日的变化 $\Delta\delta$，所引起的日出入时刻的变化 Δt。将上式微分得：

$$\sin t\Delta t = \mathrm{tg}\varphi\frac{\Delta\delta}{\cos^2\delta}$$

根据三角关系，$\sin t$ 可以转化为下列形式：

$$\begin{aligned}\sin t &= \pm\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\delta}\\ &= \pm\frac{\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\delta-\sin^2\varphi\sin^2\delta}}{\cos\varphi\cos\delta}\end{aligned}$$



$$=\pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}{\cos\varphi\cos\delta}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{\cos2\varphi+\cos2\delta}}{\sqrt{2}\cos\varphi\cos\delta}$$

日没取上号，日出取下号。将以 φ、δ 余弦函数表示的 $\sin t$ 代入上述式中，得：

$$\Delta t=\frac{\sin\varphi\cdot\Delta\delta}{\cos\delta\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}$$

由前面得出的太阳赤纬随时间变化的表示式，求出每日太阳赤纬的改变量，代入上式，可以计算得出在观测地点对太阳出入时刻的影响。不用这种微分计算的方法，根据每日太阳赤纬直接代入日出没算式，也同样可得出每日太阳出没时刻。其差分亦即为不同节气、日期对观测地太阳出入时刻的不同影响。表 5－2 列出二十四节气日期由上述方法计算得出的每日太阳赤纬变化，对于东汉都城洛阳由此引起的日出入时刻的增减值，以及太阳赤纬改变 2.4 度（2°.365）时相应日出入时刻的变化值。同时列出真二十四节气交气时刻的太阳赤纬、去极度及太阳出没时刻。计算选用四分历颁行时的各项有关数据。地球偏心率 e 为 0.017，黄赤交角 23°40′，近地点黄经 π 取作 250°.15，平近点角 M＝太阳黄经 l－近地点黄经 π（250°.15）。

天文上实际计算日出没时刻是根据下式：

$$\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$$

日出入的时刻不是太阳中心在地平线上而是上边缘与地平线相切的时刻，即天顶距中还要增加太阳视半径 16′。另外大气折射将天体位置升高，所以还需增加蒙气差改正。蒙气差在地平时影响最大，天文年历取作 34′。视差使天体位置降低，太阳赤道地平视差仅有 8″.8，可以不计。这样日出没为太阳中心的地心天顶距 z 为 90°50′的时刻。上式中以 z 为 90°50′，φ 为当地纬度，δ 为其日太阳的赤纬，代入上式所得太阳的时角，化为时就是日没的真太阳时。这是距午正的时刻。如要化为民用地方时还要再加 12^h。日出时刻可由 12^h 减去太阳时角（化为时）得出。

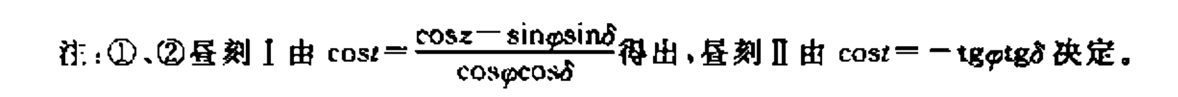


由这种方法得出的太阳出没时刻与上述的太阳中心在地平线，$z=90°$时的时角，相差：

$$d_1t=\frac{50'}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}=\frac{200^s}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}$$

表 5—2　二十四定气赤纬、去极度、昼刻、赤纬日变、漏刻增减值

二十四气	黄经(°)	赤经(°)	赤纬(°)	去极度(°)	赤纬日变值(″)	赤纬日变所得Δt(s)	Δδ为2.4度漏刻增减	昼刻Ⅰ刻①	昼刻Ⅱ刻②
春分	0	0.00	0.00	90	1407.9	64.75	0.91	50.6	50.0
清明	15	13.79	5.96	84.04	1356.3	63.22	0.92	52.8	52.3
谷雨	30	27.87	11.58	78.42	1226.0	59.35	0.95	55.1	54.5
立夏	45	42.49	16.49	73.51	1017.8	52.01	1.01	57.2	56.5
小满	60	57.77	20.34	69.66	733.6	39.67	1.07	58.8	58.2
芒种	75	73.69	22.81	67.19	386.2	21.84	1.11	60.0	59.4
夏至	90	90.00	23.67	66.33	0.0		1.13	60.4	59.8
小暑	105	106.31	22.81	67.19	−388.6	−21.97	1.11	60.0	59.4
大暑	120	122.23	20.34	69.66	−742.3	−40.14	1.07	58.8	58.2
立秋	135	137.51	16.49	73.51	−1034.9	−52.88	1.01	57.2	56.5
处暑	150	152.13	11.58	78.42	−1251.2	−60.57	0.95	55.1	54.5
白露	165	166.21	5.96	84.04	−1387.2	−64.66	0.92	52.8	52.3
秋分	180	180.00	0.00	90.00	−1440.7	−66.26	0.91	50.6	50.0
寒露	195	193.79	−5.96	95.96	−1410.1	−65.74	0.92	48.3	47.7
霜降	210	207.87	−11.58	101.58	−1291.5	−62.53	0.95	46.1	45.5
立冬	225	222.49	−16.49	106.49	−1082.4	−55.31	1.01	44.1	43.5
小雪	240	237.77	−20.34	110.34	−784.4	−42.42	1.07	42.4	41.8
大雪	255	253.69	−22.81	112.81	−413.3	−23.37	1.11	41.3	40.6
冬至	270	270.00	−23.67	113.67	0.0		1.13	40.8	40.2
小寒	285	286.31	−22.81	112.81	410.9	23.24	1.11	41.3	40.6
大寒	300	302.23	−20.34	110.34	775.6	41.94	1.07	42.4	41.8
立春	315	317.51	−16.49	106.49	1065.3	54.44	1.01	44.1	43.5
雨水	330	332.13	−11.58	101.58	1266.3	61.31	0.95	46.1	45.5
惊蛰	345	346.21	−5.96	95.96	1379.2	64.29	0.92	48.3	47.7
春分	360	360.00	0.00	90.00	1407.9	64.75	0.91		


注：①、②昼刻Ⅰ由 $\cos t=\frac{\cos z-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$ 得出，昼刻Ⅱ由 $\cos t=-\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\delta$ 决定。

即，按照太阳中心在地平线，天顶距为 90°，依

$$\cos t=-\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\delta$$

计算得出的时刻，再加 d_1t 的改正，也可得到上述天文年历上所给出的日出日没的时刻。



由日出到日没时间加上晨昏蒙影时间即为昼刻，日没到日出时间内减去晨昏蒙影即得夜刻。古代晨昏蒙影称作昏、明，各取作固定的 2.5 刻。昏明合计 5 刻。现代天文上指太阳中心在地平线以下 6°的时刻为晨昏蒙影开始、结束时刻。不同季节稍有差异。总的说来都比 2.5 刻(合今 36 分钟)要短一些。天文中计算晨昏蒙影的开始和结束，也采用上述的算式。计算天顶距为 96°时的太阳时角(半昼弧)而得。

根据计算可以看出，在春秋分附近，太阳赤纬的日变量 $\Delta\delta$ 可达 23′～24′，向二至逐渐减少。到冬至、夏至其每日变化 $\Delta\delta$ 仅为几分。即太阳的赤纬运动对时间而言并不是均匀的。由表5－2还可看出，东汉永元十四年(102)施行的漏刻新制，改旧制随日进退(每 9 日官漏率移 1 刻)为随去极度差而进退(黄道去极南北相差 2.4 度而增减 1 刻)，是相当准确的，是天文历法发展上的一件大事。从春分到秋分，由冬至到夏至，漏刻随去极每 2.4 度而增减 1 刻的做法，由表看出，误差仅为 0.1 刻，而旧制误差可达 2～3 刻。四分历昏漏表确为历法史上的创举。

二、四分历黄道去极度与气朔失天

《续汉志》明确记载，表列的去极度、晷影尺寸是根据仪、表实测。这两组数据是晷漏表的基础，尤其黄道去极度，更直接关系到推算得出的昼夜漏刻、太阳出入时刻和昏旦中星数据的精确度。它也是古代时刻制度最基本数值，有必要对其进行较细致的考查。我们采用后汉四分历颁行时期的天文常数计算得到的黄道去极度，化为中国历度，即乘以 1.01458(＝365.25/360)，来与四分历晷漏表给出的黄道去极进行比较。四分历观测得出的数值注以(o)，我们计算的结果以(c)标注，这两组数值以及它们之差($o-c$)列于表 5—3。计算显示，四分历测定的黄道去极比真实的太阳去极度有较大的误差。最大误差达 2.3 度。春分前后，立春到清明，误差都在 2 度以上。并且总的来说，四分历测定的黄道去极数值偏小，平均太阳偏北 1.123 度。

四分历测定的与天文上真实的黄道去极度误差较大，可能有两个原因：①四分历黄道去极是根据平气观测得出的。平气与定气不同。平气是将一回归年等分为 24 份，每份长 15.21875 日。自冬至开始，每 $15\frac{7}{32}$ 日为 1 节气。节气的长度是固定的。定气是将黄道圈等分为 24 份，视太阳在黄道上运动，从黄道与赤道相交的升交点(太阳通过此点由赤道南进入赤道北)算起，每到一个分点交一个节气。因为视太阳运动有疾徐，所以各个节气的时间长度是不等的。②四分历黄道去极测定时节气失天较多造成的。也就是说，这个误差是因为四分历晷漏表测定所依据的节气日期时刻与天文上真正冬至、立春、春分等节气有较大时间差别引起的。为讨论这个问题，我们先考查一下四分历的合天情况。

表 5—3　四分历去极度晷影与定气值的比较

二十四气	去极度(c)度	去极度(o)度	(o—c)度	晷影尺(o)	晷影尺(c)	(o—c)尺
春分	91.31	89.08	2.23	5.25	5.52	−0.27
清明	85.27	83.17	2.1	4.15	4.36	−0.21
谷雨	79.56	77.83	1.73	3.2	3.396	−0.20
立夏	74.58	73.17	1.41	2.52	2.61	−0.09
小满	70.68	69.67	1.01	1.98	2.04	−0.06
芒种	68.17	67.17	1.0	1.68	1.67	0.01
夏至	67.30	67.08	0.22	1.50	1.54	−0.04
小暑	68.17	67.83	0.34	1.70	1.67	0.03
大暑	70.68	70.00	0.68	2.0	2.04	−0.04
立秋	74.58	73.58	1.0	2.55	2.61	−0.06
处暑	79.56	78.58	0.98	3.33	3.40	−0.07
白露	85.27	84.33	0.94	4.35	4.36	−0.01
秋分	91.31	90.58	0.73	5.5	5.52	−0.02
寒露	97.36	96.83	0.53	6.85	6.86	−0.01
霜降	103.06	102.33	0.73	8.4	8.34	0.06
立冬	108.04	107.33	0.71	10.0	9.91	0.09
小雪	111.95	110.92	1.03	11.4	11.38	0.02
大雪	114.46	113.83	0.63	12.56	12.51	0.05
冬至	115.33	115.00	0.33	13.0	12.95	0.05
小寒	114.46	113.08	1.38	12.3	12.51	−0.21
大寒	111.95	110.67	1.28	11.0	11.38	−0.38
立春	108.04	106.33	1.71	9.6	9.91	−0.31
雨水	103.06	101.08	1.98	7.95	8.34	−0.39
惊蛰	97.36	95.08	2.28	6.5	6.86	−0.36
春分	91.31	89.08	2.23	5.25	5.52	−0.27



刘宋祖冲之说，“四分历法虽分章设蔀创自元和，而晷仪众数定于熹平三年(174)。”因此，我们考查四分历仲纪之元即文帝后元三年(前 161)，后汉四分历颁行之章帝元和二年(85)及灵帝熹平三年(174)，这三个时期四分历气朔与天象的符合情况。为此，用四分历推步算出这三年的气朔日期时刻，来和我们根据现代天文方法计算得出的实朔和交节气的时刻进行比较。朔、气合天情况的考查结果分别列于表 5—4、表 5—5 中。

前面曾经介绍，二分前后，太阳赤纬变化很快，每日约行 20 余分；两至前后赤纬改变十分缓慢，每日仅有几分。日中晷影长度由

$$L=表高\times tg(\varphi-\delta)$$

决定。式中 φ 为观测地纬度，δ 为太阳赤纬，赤道以北为正，以南为负。表高通常为 8 尺。微分上式，得：



表 5—4　东汉四分历节气合天情况

	文帝后元三年(前 161)			元和二年(85)					熹平三年(174)					
	平气		太阳黄经	平气		太阳黄经	定气		平气		太阳黄经	定气		失天
	月日	时分	°	月日	时分	°	月日	时分	月日	时分	°	月日	时分	日
冬至	12.25	0:0	270.00	12.24	6:0	271.75	12.22	12:21	12.24	12:00	272.38	12.22	3:34	2.35
小寒	1.9	5:15	285.46	1.8	11:15	287.22	1.6	6:28	1.8	17:15	287.85	1.5	21:28	2.82
大寒	1.24	10:30	300.83	1.23	16:30	302.60	1.21	2:16	1.23	22:30	303.24	1.20	17:9	3.22
立春	2.8	15:45	316.08	2.7	21:45	317.86	2.5	0:41	2.8	3:45	318.51	2.4	15:12	3.54
雨水	2.23	21:00	331.20	2.23	3:00	331.01	2.20	1:53	2.23	9:00	333.66	2.19	16:9	3.70
惊蛰	3.10	2:15	346.19	3.10	8:15	348.01	3.7	6:29	3.10	14:15	348.67	3.6	20:17	3.75
春分	3.25	7:30	1.04	3.25	13:30	2.88	3.22	14:14	3.25	19:30	3.55	3.22	3:43	3.66
清明	4.9	12:45	15.76	4.9	18:45	17.62	4.7	1:21	4.10	0:45	18.30	4.6	14:23	3.43
谷雨	4.24	18:00	30.39	4.25	0:0	32.26	4.22	15:4	4.25	6:00	32.94	4.22	3:52	3.09
立夏	5.9	23:15	44.94	5.10	5:15	46.82	5.8	7:11	5.10	11:15	47.52	5.7	19:40	2.65
小满	5.25	4:30	59.44	5.25	10:30	61.33	5.24	0:37	5.25	16:30	62.03	5.23	12:56	2.15
芒种	6.9	9:45	73.92	6.9	15:45	75.82	6.8	18:49	6.9	21:45	76.52	6.8	7:5	1.61
夏至	6.24	15:00	88.43	6.24	21:00	90.32	6.24	12:36	6.25	3:00	91.03	6.24	0:51	1.09
小暑	7.9	20:15	102.78	7.10	2:15	104.87	7.10	5:14	7.10	8:15	105.57	7.9	17:44	0.60
大暑	7.25	1:30	117.61	7.25	7:30	119.49	7.25	19:54	7.25	13:30	120.19	7.25	8:31	0.21
立秋	8.9	6:45	132.35	8.9	12:45	134.21	8.10	7:55	8.9	18:45	134.90	8.9	20:56	—0.09
处暑	8.24	12:00	147.21	8.24	18:00	149.05	8.25	16:55	8.25	0:00	149.74	8.25	6:10	—0.26
白露	9.8	17:15	162.20	9.8	23:15	164.03	9.9	22:33	9.9	5:15	164.70	9.9	12:17	—0.29
秋分	9.23	22:30	177.34	9.24	4:30	179.14	9.25	0:57	9.24	10:30	179.80	9.24	14:58	—0.19
寒露	10.9	3:45	192.60	10.9	9:45	194.38	10.10	0:12	10.9	15:45	195.03	10.9	14:40	0.05
霜降	10.24	9:00	207.97	10.24	15:00	209.74	10.24	20:52	10.24	21:00	210.39	10.24	11:33	0.39
立冬	11.8	14:15	223.44	11.8	20:15	225.19	11.8	15:25	11.9	2:15	225.83	11.8	6:27	0.83
小雪	11.23	19:30	238.96	11.24	1:30	240.70	11.23	8:43	11.24	7:30	241.34	11.22	23:45	1.32
大雪	12.9	0:45	254.49	12.9	6:45	256.24	12.8	1:21	12.9	12:45	256.87	12.7	16:33	1.84

表 5—5　东汉四分历合朔失天情况

文帝后元三年(前 161)			元和二年(85)			熹平三年(174)		
四分	实朔	失天(分)	四分	实朔	失天(分)	四分	实朔	失天(分)
甲子 0^m	乙丑 114^m	1554	壬午 689^m	壬午 692^m	3	乙亥 1362^m	乙亥 1113^m	−249
癸巳 764^m	甲午 1041^m	1717	壬子 14^m	辛亥 1339^m	115	乙巳 686^m	乙巳 302^m	−384
癸亥 89^m	甲子 360^m	1711	辛巳 178^m	辛巳 505^m	327	乙亥 11^m	甲戌 892^m	−559
壬辰 853^m	癸巳 952^m	1539	辛亥 103^m	庚戌 1094^m	449	甲辰 775^m	甲辰 19^m	−756
壬戌 178^m	壬戌 1415^m	1237	庚辰 867^m	庚辰 273^m	−594	甲戌 100^m	癸酉 587^m	−953
辛卯 942^m	壬辰 371^m	844	庚戌 192^m	己酉 969^m	663	癸卯 864^m	壬寅 1196^m	−1108
辛酉 267^m	辛酉 776^m	509	己卯 956^m	己卯 330^m	−626	癸酉 188^m	壬申 456^m	−1172
庚寅 1031^m	庚寅 1263^m	232	己酉 280^m	戊申 1227^m	493	壬寅 953^m	辛丑 1286^m	−1107
庚申 355^m	庚申 449^m	94	戊寅 1045^m	戊寅 746^m	−299	壬申 277^m	辛未 807^m	−910
己丑 1120^m	己丑 1246^m	126	戊申 369^m	戊申 284^m	−85	辛丑 1042^m	辛丑 413^m	−629
己未 444^m	己未 776^m	332	丁丑 1134^m	丁丑 1245^m	111	辛未 366^m	辛未 22^m	−344
戊子 1209^m	己丑 447^m	678	丁未 458^m	丁未 719^m	261	庚子 1108^m	庚子 1004^m	−104
戊午 533^m	己未 189^m	1096	丙子 1222^m	丁丑 112^m	330	庚午 455^m	庚午 443^m	−12

$$\Delta L = 8 \frac{\Delta\delta}{\cos^2(\varphi - \delta)}$$

而

$$\Delta\delta = \sin\varepsilon \cdot n \cdot \cos\alpha(1 + 2e\cos M)$$

根据表5－4中元和二年(85)冬至的黄经值代入,算出冬至前后1日,赤纬改变值$\Delta\delta$仅为49″,前后第2日仅为77″.5。由ΔL式分别得出由此引起的晷影长度改变仅为0.007和0.011尺。将赤纬改变值考虑进去,使用L式计算,所得结果相同。

我国古代历法是根据日景观测确定冬至日期时刻,然后递加节气长度(四分历为$15\frac{7}{32}$日),得各节气。可以看出,根据圭表日中测景要得到准确的日至并不容易。在表5－4中,四分历取作仲纪之元的文帝后元三年(前161),冬至时刻与天象完全一致。这确是一种非常难得的巧合。四分历由于岁实较大,节气130年就要多出1日。文帝后元三年冬至合天,到了245年后,四分历颁行的元和二年(85),冬至已后天1.74日。又过89年,即文帝后元三年后334年的熹平三年(174),冬至已后天2.35日。根据《续汉志》晷漏表后的记载和宋书历志所述祖冲之的说明,可知东汉四分历晷漏表测定完成于熹平三年。即晷漏表所载的主要数据很可能是根据多年观测而于熹平三年综合其时观测和推算结果而成。由我们的计算可看出熹平三年冬至时刻已后天2.35日。

中国历书清时宪书前一直用平气注历。我们在表5－4中是用真气与之比较。在下面关于黄道去极、晷影、昼夜漏刻、日出入的讨论中采用平气数值。此处与定气比较,目的是由此可以看出东汉四分历给出的二十四气与天的合失情况。还需要说明一点,如果近地点与冬至点严格相合的话,测定的冬至点失天的数值,应该与二十四气平气、定气误差的平均值一致。但从我们的计算和表5－4看出,四分历对比分析的这三组结果均不相合。这是因为东汉时,太阳近地点与冬至并不相合。近地点在冬至点西侧约20°之处,即近地点黄经约为250°。四分历仲纪之元(前161),冬至合天,但二十四气与定气的平均误差为－0°.807,这个差就是因为近地点、冬至点不合而由中心差引起的。中心差表达式为:

$$l - \bar{l} = 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \cdots$$

其中e为地球轨道偏心率,约为0.017,M为平近点角,$\bar{l}$为平黄经,等于近地点黄经π与M之和。π在前161年时约为246°,在公元85年约为250°.1,在174年约为251°.7。冬至点黄经为270°。对于前161年,$M=24°$,代入上式,得到中心差为0°.8077;对于公元85、174年,M分别为19°.9和18°.3,中心差分别为0°.6763和0°.6240。就是说,虽然四分历仲纪之元冬至合天,但平均说来前161年四分历的节

气与定气相差约$-0^{\circ}.81$，即先天$0^{\circ}.81$。同样可得，元和二年、熹平三年平气与定气平均相差分别为$1^{\circ}.02$和$1^{\circ}.69$(均为后天)。这是严格意义下的四分历节气的失天值。这两个数值与中心差相加，就得出这两年冬至的后天值。综上所述，东汉四分历在历法上有很大发展，尤其步晷漏术，但它测定的冬至和节气仍约有2日的失天。

四分历施行时期，合朔是比较合天的。朔望失天通过日月食很宜觉察。采用与节气失天的类似分析方法，我们分别用四分术和现代天文方法推算了四分历仲纪之元(前161)、元和二年(85)和熹平三年(174)的合朔时刻。比较得出，文帝后元三年(前161)四分历合朔时刻约先天0.612日；四分历颁行的元和二年(85)合朔基本合天，仅约先天0.047日；到了熹平三年(174)，四分历推步的合朔约后天0.479日。考查结果列于表5－5。因此四分历施行期间，日食基本合天，大部分发生在朔日，少数出现在晦日，个别的早期日食发生在二日。改变了汉初和行用太初历期间日食多发生在晦日的朔后于天的局面。

讨论了四分历气朔合天情况，现在再回过头来考查四分历测定的黄道去极数值的精度。

四分历晷漏表中黄道去极、晷影是用仪、表观测得出的。观测是依据四分历节气日期进行的。我们依据四分术推出元和二年(85)和熹平三年(174)的交节日期时刻，用现代方法计算与这些时刻对应的太阳黄经、赤纬、去极度及日中晷影长度，来和四分历晷漏表中给出的数值进行比较，考查它的精度。结果列于表5－6中。

计算太阳黄经的方法将在第九章中做介绍。求出太阳黄经l以后，由$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin l$计算太阳赤纬$\delta$。$\varepsilon$采用东汉时的数值约$23^{\circ}40'$。黄道去极度$=90^{\circ}-\delta$。得出的黄道去极度与四分历晷漏表给出值，化为相同的度值(360°或365.25度)后进行比较($o-c$)。元和二年(85)计算值与表列值相差最大的为1.13度，最小的为0.22度，平均为0.728度。熹平三年(174)计算值与四分历表列黄道去极相去最大值为1.32度，最小为0.23度，平均亦为0.728度。四分历晷漏表给出的黄道去极，比这两组计算的相应值全都小。也就是说，四分历测得的每一个黄道去极值都比真实的太阳距极度要小。换句话说，就是四分历测出的太阳正午高度都较真太阳为高，平均高0.728度($0^{\circ}.718$或$43'$)。

四分历晷漏表给出每气的黄道去极比真实太阳去极都小约0.728度。误差是由仪器和观测误差引起的。但，作者认为，可能其中主要部分是由大气折射引起的。大气折射使天体的地平高度升高。虽然，对于中原地区，即使冬至太阳高度最低时，折射对天体高度的影响仅$1'\sim2'$。但对于地平，折射可引起$34'\sim35'$的高度变化。因此，如根据视太阳在地平及南中时的高度差，与北极出地相加，以减半周

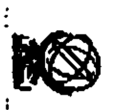


表 5－6 元和二年、熹平三年晷影、昼漏(日出至日入)数值考查

节气 平	去极度 (o)(°)	晷影 (o)(尺)	昼漏刻 (o)	熹平三年平气			o－c	元和二年平气			o－c	昼刻Ⅰ(c)	o－c	昼刻Ⅱ(c)	o－c
				黄经 l (°)	赤纬 δ (°)	晷影 (尺)		黄经 l (°)	赤纬 δ (°)	晷影 (尺)					
春分	87.80	5.25	50.8	3.56	1.43	5.23	0.02	2.89	1.16	5.28	－0.03	51.1	－0.3	50.5	0.3
清明	81.97	4.15	53.3	18.32	7.25	4.18	－0.03	17.63	6.98	4.19	－0.04	53.4	－0.1	52.8	0.5
谷雨	75.71	3.2	55.5	32.97	12.62	3.23	－0.03	32.28	12.38	3.27	－0.07	55.5	0	54.9	0.6
立夏	72.12	2.52	57.4	47.53	17.22	2.50	0.02	16.83	17.02	2.53	－0.01	57.5	－0.1	56.9	0.5
小满	68.67	1.98	58.9	62.05	20.77	1.97	0.01	61.34	20.62	1.99	－0.01	59.1	－0.2	58.4	0.5
芒种	66.20	1.68	59.9	76.53	22.98	1.65	0.03	75.83	22.91	1.66	0.02	60.1	－0.2	59.5	0.4
夏至	66.12	1.5	60	91.04	23.66	1.55	－0.05	90.33	23.67	1.54	－0.04	60.4	－0.4	59.8	0.2
小暑	66.86	1.7	59.7	105.58	22.75	1.68	0.02	104.88	22.83	1.67	0.03	60.0	－0.3	59.3	0.4
大暑	68.99	2.0	58.8	120.20	20.30	2.04	－0.04	119.50	20.45	2.02	－0.02	58.8	0	58.2	0.6
立秋	72.52	2.55	57.3	134.91	16.52	2.61	－0.06	134.22	16.72	2.58	－0.03	57.2	0.1	56.6	0.7
处暑	77.45	3.33	55.2	149.75	11.67	3.38	－0.05	149.27	11.91	3.34	－0.01	55.1	0.1	54.6	0.6
白露	83.12	4.35	52.8	164.71	6.08	4.35	0.00	164.04	6.34	4.30	0.05	52.9	－0.1	52.3	0.5
秋分	89.28	5.5	50.2	179.82	0.072	5.50	0.00	179.15	0.34	5.45	0.05	50.6	－0.4	50.0	0.2
寒露	95.43	6.85	47.6	195.04	－5.98	6.85	0.00	194.4	－5.73	6.79	0.06	48.3	－0.7	47.7	－0.1
霜降	100.86	8.4	45.3	210.4	－11.72	8.38	0.02	209.75	－11.49	8.31	0.09	46.0	－0.7	45.4	－0.1
立冬	105.79	10.0	43.2	225.84	－16.74	10.00	0.00	225.21	－16.55	9.93	0.07	43.9	－0.7	43.3	－0.1
小雪	109.33	11.4	41.7	241.35	－20.63	11.52	－0.12	240.72	－20.50	11.47	－0.07	42.3	－0.6	41.6	0.1
大雪	112.19	12.56	40.5	256.88	－23.01	12.61	－0.05	256.25	－22.95	12.58	－0.02	41.2	－0.7	40.5	0.0
冬至	113.35	13.0	40	272.4	－23.64	12.92	0.08	271.77	－23.65	12.93	0.07	40.9	－0.9	40.2	－0.2
小寒	111.45	12.3	40.8	287.87	－22.46	12.35	－0.05	287.24	－22.54	12.39	－0.09	41.4	－0.6	40.8	0.0
大寒	109.08	11.0	41.8	303.26	－19.61	11.10	－0.10	302.62	－19.76	11.16	－0.16	42.7	－0.9	42.1	－0.3
立春	104.80	9.6	43.6	318.53	－15.42	9.54	0.06	317.89	－15.61	9.61	－0.01	44.5	－0.9	43.9	－0.3
雨水	99.63	7.95	45.8	333.68	－10.25	7.96	－0.01	333.02	－10.59	8.05	－0.10	46.6	－0.8	46.0	－0.2
惊蛰	93.71	6.5	48.3	348.69	－4.52	6.51	－0.01	348.03	－4.78	6.57	－0.07	48.8	－0.5	48.3	0.0

注：昼刻Ⅰ、昼刻Ⅱ参见表 5－2 注。

天，得出的黄道去极就可能比真太阳去极度小一个地平折射改正 34′～35′。即这样得出的太阳高度会多出一个蒙气差改正值。要测准太阳在地平或南中时的中心位置也不容易，也会引进一定的误差。

三、日中晷影和昼夜漏刻

黄道去极、太阳高度 h 与太阳天顶距、太阳赤纬 δ 和观测地地理纬度 φ 之间有下列关系：

$$z=\varphi-\delta, h=90^\circ-z$$

$$\text{黄道去极}=90^\circ-\delta=z+90^\circ-\varphi$$
$$=180^\circ-h-\varphi=\varphi-\delta+90^\circ-\varphi$$

因此

$$z=\text{黄道去极}+\varphi-90^\circ$$

日中晷影与太阳天顶距 z，太阳赤纬 δ，当地纬度 φ，黄道去极之间的关系为：

$$\text{晷影长度(尺)}=8\text{tg}z=8\text{tg}(\varphi-\delta)$$
$$=8\text{tg}(\text{黄道去极}+\varphi-90^\circ)$$

根据上述关系，将四分历晷漏表给出的黄道去极数值（化为 360°制）及东汉都城洛阳的纬度 34°.60 和地中阳城纬度 34°.3 代入，得出的晷影长度，与晷漏表列的晷影尺寸是不同的。似与洛阳较为密近，阳城稍疏。就洛阳而言，小雪、小寒节气相差最大，各为 4 寸 2 分；赤纬改变最慢的夏至前后，如芒种，相去 1.5 寸，小暑 0.8 寸，相差也很大。可证，四分历晷漏表中晷景数值确为圭表所测，而非据黄道去极推算得出。

采用与前面黄道去极类似的方法，下面考查四分历晷景数值合天情况与精度。首先根据合天节气得出的太阳去极，推算晷景长度来与表列数值比较。计算显示，由大寒到谷雨八个节气表列与合天数值相差较大，误差都在 2 寸以上，最大为大寒、雨水，相差近 4 寸。这一点与前面对四分历节气失天的分析结果是一致的。由于远地点到近地点半周四分历节气比较合天，这一段晷影相差皆不到 1 寸。

另外，由四分术推出的元和二年(85)和熹平三年(174)节气时刻计算真太阳黄经、赤纬，用东汉都城洛阳的地理纬度φ34°.60，代入

$$\text{晷影长度(尺)}=8\text{tg}(\varphi-\delta)$$

得出的晷影尺寸与四分历晷漏表测定值比较，考查结果也列于表 5－6。由表看出元和二年晷影值与表列尺寸相比，最大误差出现在大寒，为 0.16 尺，雨水影长相去 0.1 尺，最小相差仅为 0.01 尺，平均误差 0.0142 尺，仅有 1 分许。而阳城平均误差 0.062 尺。熹平三年晷影尺寸与四分历表列值更为符合，最大相差为小雪节气



0.12尺，其次为大寒相去0.10尺。有四气晷影长度与表列值相同，并有三个节气相差仅0.01尺。总的趋势比元和二年更接近四分历晷漏表晷景尺寸。它的平均误差也为0.0142尺，即1.4分。而阳城的平均误差是5.9分。

由四分历晷漏表所给出的黄道去极及晷影尺寸考查结果看出，这些数值确系其时实测，基本上可认为是经过多年观测得出的。而与熹平三年数值更为接近，误差弥散较小，晷漏表大致上主要依据这一年的观测结果。

四分历晷漏表所列出的昼夜漏刻数是根据黄道去极远近乘节气之差计算得出的。这一点《续汉志》中有明确记载。关于它的计算方法，在前面已做了介绍。有的作者认为四分历晷漏表中的昼夜漏刻数与黄道去极、晷影尺寸一样也是由观测得出的，可能是出于误会。我们已对四分历测定的黄道去极、晷景长度的观测精度做了考查。那么，根据黄道去极每差2.4度，昼夜漏刻即增损1刻比例关系得出的昼夜漏刻数与真实太阳出没时刻是否一致，误差有多大呢？对这个问题，我们依天文学的二十四气定气，四分历熹平三年(174)平气两种系统，每种都分别采用两种计算方法进行考查。方法Ⅰ，考虑大气折射改正，计算太阳上下边缘与地平相切的真实太阳出没时刻；和方法Ⅱ，不考虑大气折射，太阳中心在地平计算太阳出没的时间。观测地点仍取作东汉都城洛阳，纬度34°.60。有

$$\cos t_{\mathrm{I}} = (\cos 50' - \sin\varphi\sin\delta)/(\cos\varphi\cos\delta)$$

$$\cos t_{\mathrm{II}} = -\mathrm{tg}\varphi\,\mathrm{tg}\delta$$

计算得出的天文二十四气太阳出没时刻 t_{I}、t_{II}，对应的白昼刻数(日出到日入)列于表5—2，推出的熹平三年(174)四分历平气时刻算得的太阳出没时刻 t_{I}、t_{II}，相应的日出到日入的昼漏刻数在表5—6中给出。

天文二十四气得出的日出到日没白昼刻数I与四分历晷漏表昼漏刻减5刻得到的相应白昼刻数相比，寒露到大寒一段误差最大，相差都在半刻以上，最大为立冬，0.9刻。三个节气昼刻相同，四个节气误差仅为0.1刻。平均误差0.26刻。就是说，四分历晷漏表给出的昼夜漏刻数，与天文二十四气定气由真太阳出没所得出相应刻数比较接近；而与不考虑大气折射，以太阳中心在地平线计算得出的相应白昼刻数差得稍大一些。后者有两气误差为1刻。相差大于0.5刻者有九气，而前者为七气。

前面考查黄道去极、日中晷景得出，四分历晷漏表中这两项数值是根据实测得出的，而观测主要是按照熹平三年平气时刻进行的。但依熹平三年(174)四分历平气时刻计算得出的太阳赤纬求得的真实太阳出没时刻 t_{I}(考虑大气折射，按太阳上下边缘与地平相切为太阳出没时刻)得到的昼刻却与四分历晷漏表相应昼刻数值相差较大。其中相差0.5刻以上者共有十气，平均相差0.41刻，并且四分历表列昼刻数全小于计算得出值($2t_{\mathrm{I}}$)，即($o-c$)全为负值。而另一方面，由太阳中心

在地平，不考虑大气折射得到的日出入时刻 $t_{\text{日}}$，由 $2t_{\text{日}}$ 确定的昼刻与四分历表列的相应值却较为接近。相差 0.5 刻以上者仅有四气，三气昼刻数相同，四气相差仅为 0.1 刻，平均误差只有 0.2 刻。

综上所述，四分历晷漏表昼夜漏刻数值虽系据黄道去极相差值比例推算而得，但它的精度还是比较高的。前面我们曾经论证过，根据去极相差 2.4 度而漏刻增损 1 刻的做法是很科学、准确的。不论年中什么日子，由此产生昼夜漏刻最大误差都在 1.1 刻以内。表列的昼夜漏刻数，对于天文定气和四分历施行期间的平气都是比较准确的，最大误差不超过 1 刻钟(14.4 分)。

第三节　昏旦中星和黄道赤道日度

中国历法是阴阳合历。二十四节气就是中历的阳历成分。推步制历以前，人类都经历了一个较长时期的观象授时的阶段。就是依据某些特定星象，如参、昴、大火、鸟星、虚、定等的出没南中及北斗七星斗柄的指向来确定岁时季节。《尚书・尧典》记载有："日中星鸟，以殷仲春；日永星火，以正仲夏；宵中星虚，以殷仲秋；日短星昴，以正仲冬。"说明中国古时曾以鸟(今长蛇座 α 星)火(今天蝎座 α，中名心宿二)虚(今小马座 α、宝瓶座 β，中名虚宿一、二)昴(在今金牛座，中名昴宿，俗称七姐妹)昏时南中(过南天子午圈)的星象来判定二分二至的日子。《吕氏春秋・十二月纪》、《礼记・月令》给出了为确定各节气月时序的昏旦中星的星象标志。可见利用昏旦中星确定时节的方法是中历的传统。四分历予以继承，晷漏表给出了各交节时日的昏、旦中天星度。术文中介绍了昏、旦中星推步方法。昏、旦又称昏、明。四分历及以后各历皆指日没后、日出前 2.5 刻之时。天文上指日没后、日出前太阳中心在地平线下 6°的时刻。这时室外活动可以不用照明，晚上亮星开始出现，晨时明星刚好完全消失。2.5 刻相当现在的 36 分钟。就中原所处纬度而言，中历说的比天文学指的昏旦，36^m 时间稍长一点，长 5～10 分钟。昏明中星是指昏旦时刻正好南中(过南天子午线)的星象或星度，即昏明时太阳所处星度与昏明时太阳距午(南天)度相加之和。

太阳中心连续两次过南天子午线的时间间隔叫一日，即一昼夜。天文上称作真太阳日。因日行有盈缩，加上太阳不在赤道而在黄道上运动，黄道赤道有 23°.5 的交角，即使太阳在黄道上运动是匀速的，太阳运动引起的赤经变化也不是均匀不变的。因此，真太阳日长度并不固定而是有变化的。天文上取真太阳日的平均长度为平太阳日。即称太阳中心连续两次南中的平均时间为一平太阳日。将平太阳日分成 24 小时(1440 分或 86400 秒)，这就是现在通常使用的时间。至于因为地球自转不均匀，现在天文上使用更准确的历书时、力学时等问题，这里就不再介绍了。用日晷测得的



时间是真太阳时。每日真太阳时和平太阳时之差称作时差。我们使用的钟表指示的是平太阳时。因为经度不同，各地太阳南中时刻并不相同。各地使用自己的地方时很不方便。为了国际交往和社会活动，一个国家或地区往往使用统一的时间，这种时间称区时。各地方时、区时指的都是平太阳时。各地方时经过时差改正可得当地真太阳时。同样由日晷测得真太阳时经时差改正即得当地地方平时。平时和真太阳时的问题就说到这里。有兴趣的读者可参看有关介绍天文知识的论著。

太阳每天总在真太阳时 12^h 左右中天。但每天晚上同一时间，例如 20^h，注意星空，连续多日观察，就会发现，原本南中的星辰，过几天就偏西了。换句话说，就是某颗恒星，例如大火（心宿二，天蝎座 α）连续两次南中的时间间隔不是一平太阳日，而比它要短约 3^m56^s。即，我们看到的恒星星空旋转一周的时间，比太阳平均要短 3^m56^s。看到的恒星星空旋转一周的时间天文学称作恒星日。将恒星日分成24、1440、86400 份，就得到恒星时、分、秒。通常说昼夜是由地球自转一周形成的。这种说法不错但不很准确。实际上，地球自转一周的时间，即星空天穹视转一周的时间，为一恒星日。太阳视转一周，即连续两次南中的时间才是一昼夜，就是通常所说的一天。平太阳日分为平太阳时分秒。平太阳日比恒星日长 3^m56^s，所以恒星日长度为 $23^h56^m04^s$ 平太阳时。平太阳时是以太阳视运动来标示的。恒星时应选一恒星的视运动来反映。天文上选取春分点的视运动作为恒星日、恒星时的标准。恒星日由春分点南中时刻开始计算。天文学上恒星日的定义为，春分点连续两次过南天子午线（南中、上中天）的时间间隔。春分点的时角以时分秒表示叫作恒星时。

春分点是天赤道和天黄道的两交点之一。太阳通过此点由赤道南进入赤道北，称之为升交点。春分点不是星象，在星空中没有标志。只有通过太阳，人们才会对春分点的位置有点感性知识。定气春分那一天，尤其是交春分那一时刻，太阳中心正好位于春分点。春分之日太阳在天空的位置就是春分点的所在。是日太阳几乎与春分点同时升没、同时南中。恒星时是自春分点南中时刻为 0^h，开始计数。所以，春分日正午恒星时约当 0^h，而在子夜近于 12^h。夏至时，太阳在春分点东面 $90°$，太阳的黄道度、赤道度悉为 $90°(6^h)$。这一天正午时，春分点距子午线 $90°$。春分点南中时恒星时为 0^h。春分点的时圈与南子午圈的交角，为春分点的时角，用时分秒来表示称作恒星时。夏至日正午时，春分点的时角约为 $90°$，即恒星时约 6^h。时角自子午圈向西计量。夏至日子夜时，太阳正在下中天（过北子午线），太阳的时角（过太阳的时圈即赤经圈与南子午圈的交角）为 $180°$，春分点又在太阳西面 $90°$，即春分点的时角为 $270°$，所以夏至日子夜的恒星时约为 18^h。秋分时，太阳位于黄赤道的降交点（又称秋分点），与春分点正好相距 $180°$。这天正午太阳的时角为 $0°$，

春分点的时角为 180°，恒星时为 12^h；子夜时太阳时角为 180°，春分点的时角为 360°，即 0°。也就是秋分日子夜时春分点约当上中天，恒星时约为 0^h。冬至时，太阳在黄道上春分点西 90°，春分点的时角比太阳大 270°。这一天正午时，春分点的时角约为 270°，恒星时 18^h；子夜时，春分点时角约为 90°，恒星时约 6^h。

视太阳在黄道上运行，太阳中心连续两次经过春分点的时间间隔，称作回归年。回归年长度略有变化，大约每 1000 年减少 0.00006 日。现在回归年长 365.2422 日，东汉时约长 365.2423 日。就是说，在一回归年中，人们看起来太阳转了 365.2422 圈。在这个时间里太阳在星空中自西向东运行了一周（这里暂不谈因地轴进动春分点在恒星星空每年向西约 50″.2 的岁差运动）。所以在一个回归年中，我们看到的恒星星空转动了 366.2422 圈，比太阳多转了 1 周。因此有：

365.2422 平太阳日＝366.2422 恒星日

1 平太阳日＝366.2422/365.2422＝1.002783 恒星日

1 恒星日＝365.2422/366.2422＝0.997270 平太阳日

1 平太阳日＝1 恒星日＋$3^m56^s.56$ 恒星时

1 恒星日＝1 平太阳日－$3^m55^s.91$ 平太阳时

恒星时间隔＝平时间隔(1＋1/365.2422)

平时间隔＝恒星时间隔(1－1/366.2422)

根据前面所述和上列关系，可以求出任何平时时刻相应的恒星时时刻或反之。简单地说，知道了二分二至子夜正午的恒星时，依每天子夜的恒星时增加约 4^m、每月增加约 2^h，平太阳时每 6^h 相当于恒星时 6^h1^m 的时间间隔，可以求出任何时刻相对应的恒星时的大致时刻。

这里比较详细地介绍了恒星时和平太阳时之间的关系，因为讨论昏旦中星时要用到这些知识。另外，对于天文、历法爱好者和工作者能初步掌握平时、恒星时间的简单换算也很重要。因为使用望远镜观测，或一般夜晚看星、认星，都要根据恒星时才能知道它的方位、位置及能不能够找到它和看到它。

天体的赤经、黄经，都是以春分点作为量度的起点，自春分点自西向东计量（与时角方向相反）。前面说过，春分点在星空并无标志。只有通过太阳才能大致找到它。春分点的时角是恒星时。只有根据恒星观测才能精确测定它。

赤经就是通过天体（如恒星）的时圈和春分点的时圈（二分圈）在天极的交角。此角亦可沿着赤道量度从春分点到恒星赤经圈与赤道交点之间的弧长得出。春分点的时角为恒星时，而春分点无标志。在天球仪、天球图上很容易看出，恒星时 s 等于任一恒星的时角 t 与该星赤经 α 之和，即

恒星时 s＝恒星时角 t＋恒星赤经 α



前面已介绍过，时角是通过恒星的赤经圈（时圈）与子午圈在天极的交角。以南子午圈为量度时角的起点，向西量度自 0°到 360°。如果恒星在子午圈之东，时角大于 180°。由 $s=t+\alpha$ 知，当恒星南中时，时角 t 为 0，所以上式变成 $s=\alpha$。即，恒星时等于正在南中（上中天）的恒星的赤经。这是一个非常重要的概念。要测定任何时刻的准确恒星时，要用中星仪观测其时正在南中之星。查出该恒星的赤经即为观测时间的恒星时。

所以昏、旦中星星度，实际上就是昏、明时刻的恒星时。赤经等于该恒星时的恒星，此时一定正好位于观测者所在地的南天子午线上。前面介绍了根据二分二至子夜和正午的恒星时刻计算一年中任何一天、任何时刻的恒星时的方法。求二十四气日期的昏明时刻（日出前 2.5 刻、日没后 2.5 刻）对应的恒星时，就可以得出其时南中的星宿或星度，即得表列的昏、旦中星星度。具体计算时，要注意两点。一是中国历度 365.25 度与 360°的换算，二是赤经是自春分点向东量度（恒星时是春分点的时角，时角是自南天子午线向西量度的），而中国历法赤道宿度都是自冬至点起算向东计量的。冬至点在春分点西面 90°（中国历度 91.32 度）。搞清楚这两点，才能正确算出二十四气或任何一天的昏旦中星的赤经度数，及与之相对应的中国二十八宿的赤道宿度。四分历及其他历法中列出的二十八宿赤道宿度只给出自斗宿开始的各宿距星之间的距度。只在术文内、晷漏表或在推日月所在度法中才给出冬至日所在赤道度。知道了冬至赤道日度，才能知春分点的赤道日度，化为 360°制，再依上述方法可以求出任意日期的昏旦中星星度。

上面介绍了什么是恒星时、昏旦中星，昏旦中星和恒星时、恒星赤经之间的关系，昏旦中星的计算以及将它换算成赤道宿度的方法。

子夜到次日子夜，正午至次日正午历时 100 刻。夜半至明为半夜刻，正午至昏为半昼刻。一昼一夜（百刻）太阳行天一周，谓之天度 365.25 度。因此

$$\begin{aligned}\text{昏时太阳距午度} &= \text{天度}\times\text{半昼漏刻}/100\\ &= \text{全天度}\times\text{昼漏}/200\end{aligned}$$

$$\text{夜漏}=100-\text{昼漏}$$

$$\begin{aligned}\text{明时太阳距午度} &= \text{周天度}-\text{昏时太阳距午度}\\ &= \text{周天度}-\text{周天度}\times\text{昼漏}/200\\ &= \text{天度}(1-\text{昼漏}/200)\\ &= \text{周天度}\times\frac{200-\text{昼漏}}{200}\end{aligned}$$

昏、明太阳距午度就是前面介绍的太阳的时角，自南天子午线向西计量，所以昏时太阳距午度总小于半周天，明时太阳距午度总在半周天以上。

前面说过，不考虑岁差（东汉时尚不识岁差），太阳在一回归年时间里在星空自

西向东运行一周，每天东移1度。因此，昏明时太阳距午度中，需考虑自夜半至昏、夜半至明太阳东移度数。

$$夜半至明日东行度数=1度\times半夜漏/100$$
$$=夜漏/200(度)$$

因为，

$$昏刻=100-半夜漏刻$$

所以，

$$夜半至昏日东行度数=1度\times(100-半夜漏)\div100$$
$$=(200-夜漏)/200$$

故，

$$明时太阳距午度=天度\times\frac{200-昼刻}{200}+\frac{夜刻}{200}$$
$$=[天度(200-昼刻)+夜漏刻]/200$$
$$=天度-(天度\times昼漏刻-夜漏刻)/200$$
$$昏时太阳距午度=天度\times\frac{昼漏}{200}+\frac{(200-夜漏)}{200}$$
$$=[天度\times昼漏+200-夜漏]/200$$
$$=(天度\times昼漏-夜漏)/200+1$$

四分历称(天度×昼漏－夜漏)/200为定度，故

$$明时太阳距午度=天度-定度$$
$$昏时太阳距午度=定度+1$$
$$明中星=其日太阳赤道日度+明时日距午度$$
$$昏中星=其日太阳赤道日度+昏时日距午度$$

例如，冬至日所在赤道度斗21.25度，黄道度斗19.25度，根据四分历二十八宿赤道宿度，则

$$昏中星=斗21.25+(365.25\times45-55)/200+1$$
$$=斗21.25+81.90625+1=斗104.15625$$
$$=奎5.90625\approx奎5\frac{11}{12}=奎6弱$$
$$旦中星=斗21.25+365.25-定度81.90625$$
$$=斗304.59375$$
$$=亢2.34375\approx亢2\frac{4}{12}=亢2少强$$

再如，秋分日所在赤道度为角4度30分($4\frac{30}{32}$度)，由上式可得



昏中星＝角 4.9375＋定度＋1

$$=角\ 4.9375+(365.25\times55.2-44.8)/200+1$$

$$=角\ 106.5225=牛\ 5.2725\approx牛\ 5\frac{3}{12}度=牛\ 5\ 少$$

$$旦中星=角\ 4.9375+365.25-\frac{365.25\times55.2-44.8}{200}$$

＝角 4.9375＋天度－定度

＝角 4.9375＋365.25－100.585

$$=角\ 269.6025\approx井\ 16\frac{4}{12}=井\ 16\ 少强$$

由这种方法可以计算得出四分历晷漏表二十四气各气的昏、旦中星星度。推昏明太阳距午度，四分历步晷漏术文是这样说的：

> 昏明之生，以天度(365.25)乘昼漏，夜漏减之，二百而一，为定度。以减天度，余为明；加定度一为昏。

即上面所述的方法。将昏明距午度与日所在度(奇零部分皆化为 12 分制)相加，得昏旦中星星度。

四分历将 1 度分作 12 份。做法是："其余四之，如法为少，二为半，三为太；不尽，三之，如法为强，余半法以上成强。强三为少，少四为度，其强二为少弱也。"12 分度制名称关系列于表 5－7。

表 5－7 四分历 12 分度制名称

名称	分数	小数	名称	分数	小数
度强	1/12	0.0833	半强	7/12	0.5833
少弱	2/12	0.1667	太弱	8/12	0.6667
少	3/12	0.25	太	9/12	0.75
少强	4/12	0.3333	太强	10/12	0.8333
半弱	5/12	0.4167	度弱	11/12	0.9167
半	6/12	0.50	度	12/12	1.0000

依照上述方法，推算得到的四分历晷漏表各气的昏旦中星星度，是基于视晷漏表各气日所在为子夜太阳所处的赤道日度得出的。但晷漏表所列二十四气日所在度并非子夜时，而为交平气时刻之赤道日度。因太阳每日东移 1 度。当所求节气交气时刻不为夜半时，就需在所求节气表列昏旦中星星度中减去交气小余时刻对



应的太阳东移度数，方得小余不为零时平气昏旦中星定度。为此需将节气小余（即日的奇零部分）化为12分度，以减节气昏旦中星。

四分历记载，在元和二年（85）至永元元年（89），五岁中课日行及冬至，得到太阳冬至在斗21.25度。在永元前后，贾逵曾测过二十八宿的黄道宿度。至永元十五年（103）七月甲辰，和帝诏书造太史黄道铜仪对二十八宿黄道宿度做了正式测定和验证。这是历史上最早的二十八宿的黄道宿度数值。四分历对赤道宿度并未重新测定，仍采用西汉宿度。只不过因测得冬至日在斗21.25度，而将奇零部分移到斗宿而已。

晷漏表二十四气日所在首次给出赤道、黄道宿度。它们都是根据冬至日度累加平气长度$15\frac{7}{32}$度（太阳日行1度）分别按二十八宿黄赤道宿度计数得出，而不是实测的数据。算法如下：

$$各气赤道日度=斗\ 21.25+距冬至节气数\times 15\frac{7}{32}$$

$$各气黄道日度=斗\ 19.25+距冬至节气数\times 15\frac{7}{32}$$

如

$$\begin{aligned}春分赤道日度&=斗\ 21.25+6\times 15\frac{7}{32}\\&=斗\ 21.25+91.3125=斗\ 112.5625\ 度\\&=斗\ 112.5625-北方七宿赤道度\ 98.25\\&=奎\ 14\frac{10}{32}度\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}春分黄道日度&=斗\ 19.25+6\times 15\frac{7}{32}\\&=斗\ 110.5625\\&=斗\ 110.5625-北方七宿黄道度\ 96.25\\&=奎\ 14\frac{10}{32}度\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}芒种赤道日度&=斗\ 21.25+11\times 15\frac{7}{32}\\&=斗\ 188.65625\\&=井\ 10.40625=井\ 10\frac{13}{32}度\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}芒种黄道日度&=斗\ 19.25+11\times 15\frac{7}{32}\\&=斗\ 186.65625\end{aligned}$$



$$=\text{斗 }186.65625-\text{北方七宿 }96.25$$
$$-\text{西方七宿 }83$$
$$=\text{井 }7.40625=\text{井 }7\frac{13}{32}\text{度}$$

四分历赤道二十八宿宿度表给出黄赤道度变换的进退度数。因此，算出二十四气昏旦中星的赤道星度，加减进退度数，即得黄道星度。

四分历给出的黄道宿度，是过二十八宿距星的时圈（赤经圈）与黄道交点之间的距弧。过距星所作黄经圈与黄道相交点之间的距弧为二十八宿黄经差。前者与此不同。所以四分历黄道宿度并非黄经差，而是极黄经差。真黄经与极黄经，对于在黄道上或黄道附近的星差别不大。对于距黄道比较远的星，可能有7°～8°之差。日月五星的轨道虽都在黄道附近，但历法上总以入宿度描述它们的位置和运动。二十八宿的距星有些距黄道较远，如室、壁、奎、觜、参、柳、星、张、翼、轸等。对于古代天象位置的记载，考查时不要忘记这一点。如直接把它当作黄经差来进行分析，往往不易得出正确可靠的结果。

四分历元和年间测定的冬至赤道日度和永元得出的冬至黄道日度与天都有2°多的误差。表5－8给出四分历二十四气黄赤道日度与元和二年（85）真实二十四气黄赤道太阳的宿度数值，并列出二十八宿距星的黄经、极黄经值以及它们的比较。以便对四分历日所在黄赤道度合天情况及黄经、极黄经的差别有点定量概念。

第四节　步中朔、日月度及月食



一、步中朔、日月度

东汉四分历与古六历俱为四分术，虽上元各不相同，但步中朔的方法是一样的。推算出所求年入何蔀及入蔀之年，根据第三章介绍的方法可很方便地得出冬至干支、平月龄以及天正平朔干支大小余。各月朔弦望、各气皆可递加各朔弦望气长度而得。冬至平月龄即各岁闰余，闰余大于等于12$\left(\frac{12}{19}\text{月},18\frac{612}{940}\text{日}\right)$之岁，其年有闰。当闰何月，可由冬至平月龄累加$\frac{1}{12}\times10\frac{827}{940}=852\frac{1}{4}/940$日，其和满朔策$29\frac{499}{940}$之月，即为闰月。

后汉四分历术文介绍的推步方法如下。

表 5—8　四分历二十四气黄赤道日度，真气黄道日度和元和二年(85)二十八宿距星的赤经、黄经、极黄经度

节气	赤道(度)	日度(°)	黄道(度)	日度(°)	真气黄道日度(°)	距星赤经 α(°)	距星黄经 λ(°)	距星极黄经 λ′(°)	λ−λ′(°)
冬至	斗 21.25	20.945	斗 19.25	18.973	斗 16.486	斗 251.581	253.514	253.037	0.477
小寒	女 2.21875	2.187	女 3.21875	3.172	牛 7.597	女 285.448	285.101	284.204	0.897
大寒	虚 5.4375	5.359	虚 7.4375	7.331	虚 3.218	虚 297.127	296.782	295.138	1.644
立春	危 10.65625	10.503	危 12.65625	12.474	危 8.248	危 306.446	306.752	304.074	2.678
雨水	室 8.875	8.747	室 11.875	11.704	室 3.085	室 322.543	326.915	320.088	6.827
惊蛰	壁 8.09375	7.977	壁 9.09375	8.963	壁 2.426	壁 339.132	342.574	337.401	5.173
春分	奎 14.3125	14.107	奎 14.3125	14.107	奎 5.912	奎 347.453	354.088	346.342	7.746
清明	胃 1.53125	1.509	胃 0.53125	0.524	娄 7.664	胃 14.305	20.332	15.557	4.775
谷雨	昴 2.75	2.71	昴 0.75	0.739	胃 9.668	昴 29.088	32.781	31.275	1.506
立夏	毕 6.96875	6.868	毕 3.96875	3.912	毕 3.228	毕 40.166	41.772	42.662	−0.89
小满	参 4.1875	4.127	参 0.1875	0.185	参 4.285	参 58.900	55.715	61.079	−5.364
芒种	井 10.40625	10.257	井 7.40625	7.300	井 6.365	井 67.041	68.635	68.794	−0.159
夏至	井 25.625	25.257	井 22.625	22.300	井 21.365	鬼 99.870	99.117	99.054	0.063
小暑	柳 3.84375	3.789	柳 3.84375	3.789	柳 1.259	柳 103.690	103.741	102.577	1.164
大暑	星 4.0625	4.004	星 5.0625	4.990	柳 16.259	星 118.194	120.396	116.150	4.246
立秋	张 12.28125	12.105	张 13.28125	13.090	张 5.848	张 124.827	129.152	122.505	6.647
处暑	翼 9.5	9.363	翼 11.5	11.335	翼 2.570	翼 141.890	147.430	139.423	8.007
白露	轸 6.71875	6.622	轸 7.71875	7.608	轸 0.761	轸 159.905	164.239	158.226	6.013
秋分	角 4.9375	4.867	角 4.9375	4.867	角 2.771	角 176.687	177.229	176.384	0.845
寒露	亢 8.15625	8.039	亢 7.15625	7.053	亢 7.129	亢 188.403	187.871	189.162	−1.291
霜降	氐 14.375	14.168	氐 12.375	12.197	氐 11.293	氐 197.243	198.707	198.720	−0.013
立冬	尾 4.59375	4.528	尾 1.59375	1.571	心 3.826	尾 222.177	229.539	224.689	4.85
小雪	箕 1.8125	1.786	尾 16.8125	15.571	尾 10.461	箕 241.266	244.653	243.336	1.317
大雪	斗 6.03125	5.945	斗 4.03125	3.973	斗 1.486	娄 3.315	7.336	3.619	3.717
						牛 277.789	277.403	277.141	0.262
						觜 57.877	56.965	60.099	−3.134
						房 212.106	216.318	214.414	1.904
						心 217.437	221.174	219.892	1.282



(一)推天正朔日

$$（入蔀年-1）\times 章月235/章法=积月\frac{闰余}{19}$$

闰余在12以上，其岁有闰。

$$积月\times 蔀日27759/蔀月940=积日\frac{小余}{940}$$

$$年前天正朔大小余=\left[\left(\frac{积月\times 蔀日}{蔀月}\right)/60\right]_R$$

R为求余计算，即其方括号内算式的余数。

四分历每岁365.25日，比12个朔望月长7/19月。故闰余每年增加7，闰余大于12之岁，其年有闰。遇闰年，闰余加7后减19。这样可很容易得出一部76年，每年的闰余值。求出闰余，天正平朔大小余也可由下式算出。

天正经朔大小余

$$=\left[\frac{（大周343335\times 入蔀年-周天1461\times 闰余）}{940}/60\right]_R$$

$$=\left\{\left[\frac{1461\times（235\times 入蔀年-闰余）}{940}\right]/60\right\}_R$$

得出天正经朔后，递加朔策大余29，小余499，得各月经朔，小余满蔀法940得1，进为大余。各朔小余大于441者，其月大。经朔大小余，加大余7，小余$359\frac{3}{4}$，得上弦。又加得望、下弦及次月朔。小余满940皆进为大余。$7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$为$\frac{1}{4}$朔望月长，即$\frac{1}{4}\times 29\frac{499}{940}=7\frac{359\frac{3}{4}}{940}$日。

(二)推天正冬至和二十四气

天正冬至大小余

$$=\left\{\left[\frac{（入蔀年-1）\times 日余168}{中法32}\right]/60\right\}_R$$

$$=\{[（入蔀年-1）\times 没法21/日法4]/60\}_R$$

累加气策$15\frac{7}{32}$日（中节长度$=365\frac{1}{4}/24$）得二十四气各气大小余，小余满32，进位从大余。

以上所得大余，皆以所入蔀名命之，算外（即蔀名于支不计入），得天正朔、冬至

干支纪月。

(三)推闰月所在

闰余大于12之岁,其年有闰,闰在何月,以下式求之:

闰月=12×(章法19-闰余)/章闰7

余数大于等于4进位,自年前天正月起算,天正月不计入,所得即为闰月所在。这与前面所述,闰余累加852.25/940日,加满朔策29+499/940之月,即为闰月,结果是一致的。

(四)推合朔日月所在度

天度=大周343335/蔀月940

度法940。

$$\left[\frac{\text{入蔀积日}\times\text{蔀月 }940}{\text{大周 }343335}\right]_R/\text{蔀月 }940=\text{积度}\frac{\text{余分}}{940}$$

$$\text{合朔所在度}=\text{冬至赤道日度斗 }21\,\frac{235}{940}+\text{积度}$$

以赤道宿度去之,至不满宿为日月合朔所在星度。也可由下式得出:

天正经朔所在度

$$=\text{斗 }21\,\frac{235}{940}+\frac{\text{大周 }343335-\text{闰余}\times\text{周天 }1461}{\text{蔀法 }940}$$

加度29,加分499,分满蔀月940得度,为次月朔星度。累加,得各月平朔星度。以赤道宿度去之,如经斗宿除235分。

(五)夜半日所在宿度

夜半日所在宿度

$$=\text{斗 }21\,\frac{19}{76}+\left[\frac{\text{入蔀积日}\times\text{蔀法 }76}{\text{蔀日 }27759}\right]_R/76$$

加1度得次日,累加得各日。以宿次除去之,得各日夜半日所在宿度,如经斗除19分。

夜半日所在赤道度,也可由下式得出:

夜半赤道日度=合朔度分-朔小余

合朔度分、朔小余皆以蔀月为度法,要化与前式一样,以蔀法76为度法,其分以235约之,19乘之即得。



(六)推月所在度

$$\left[\frac{\text{入蔀积日}\times\text{月周}1016}{\text{蔀日}27759}\right]_R/\text{蔀法}76=\text{积度}+\frac{\text{余分}}{76}$$

$$\text{月每日行度}=\text{月周}1016/\text{蔀法}76=13\frac{28}{76}\text{度}$$

$$\text{所求日夜半月所在度}=\text{斗}21\frac{19}{76}+\text{积度}\frac{\text{余分}}{76}$$

加 13 $\frac{28}{76}$度为次日夜半月所在赤道度，累加得各日。30 日月行 30×1016/76＝30480/76 度＝401 $\frac{4}{76}$度，除全天度 365 $\frac{19}{76}$，得 35 $\frac{61}{76}$度。29 日月行 29×1016/76＝387 $\frac{52}{76}$，除全天度 365 $\frac{19}{76}$，得 22 $\frac{33}{76}$度。如本月为大月 30 日，则加 35 度 61 分，如为小月，加 22 度 33 分为次月夜半月所在赤道度。分满蔀法 76 得 1 度。所得夜半月所在度，以赤道宿次除之，至不满宿，为夜半月所在赤道宿度。

(七)推昏明日所入度

上节对昏、明时刻已做详细介绍。

夜半至明日所行分＝其月节气夜漏刻×蔀法/200

明时日所在度分＝夜半赤道日度分＋夜半至明时日所行分

夜半至昏日所行分＝蔀法－夜半至明时日所行分

昏时日所在度分＝夜半日所在度分＋夜半至昏日所行分

(八)昏明月所入度分

明积分＝其节气夜漏刻×月周 1016/200

月明时所在度＝夜半月度＋明积分

昏积分＝月周 1016－明积分

昏时月所在度＝夜半月度＋昏积分

昏、明积分满蔀法 76 进度。

二、推月食术

四分历"历法"说，"当汉高皇帝受命四十有五岁，阳在上章，阴在执徐，冬十有一月甲子夜半朔旦冬至，日月闰积之数皆自此始，立元正朔，谓之汉历。又上两元，而月食五星之元，并发端焉。"因此计算历朔，可采用四分历仲纪之元庚辰岁（前

161)为甲子蔀首,入算甚便。而计算月食五星,通常还需自上元起算。四分历上元,《续汉志》"汉安论历"记载,太史令虞恭、治历宗䜣等议:四分历仲纪之元,起于孝文皇帝后元三年,岁在庚辰。上四十五岁,岁在乙未,则汉兴元年也。又上二百七十五岁,岁在庚申,则孔子获麟。二百七十六万岁,寻之上行,复得庚申。岁岁相承,从下寻上,其执不误。此四分历元明文图谶所著也。

由此可知,四分历上元为获麟前276万岁庚申。下距仲纪之元庚辰(前161)为2760320年。即文帝后元三年庚辰入元2760320年。

(一)推月食所入蔀会年

$$r=[\text{上元积年}/\text{元会 }41040]_R$$

$$\text{入蔀会年}=[r/\text{蔀会 }2052]_R$$

四分历仲纪之元庚辰(前161)积年2760320,r为10640,入蔀会年为380;元帝初元二年甲戌(前47)上元积年2760434,r为10754,入蔀会年为494;成帝河平元年癸巳(前28)入元2760453,r为10773,入蔀会年为513。

(二)岁前天正月前食月及后食

$$(\text{入蔀会年}-1)\times\frac{\text{食数 }1081}{\text{岁数 }513}=\text{积食}\frac{\text{食余}}{513}$$

$$\text{月数 }135\times\text{积食}/\text{食法 }23=\text{积月}\frac{\text{月余分}}{23}$$

$$\text{入章月数}=[\text{积月}/\text{章月 }235]_R$$

$$\text{入章闰数}=\text{入章月数}\times\text{章闰 }7/\text{章月 }235$$

$$\text{年前天正月前食月}=[(\text{入章月}-\text{入章闰})/12]_R$$

入章月数"先除入章闰,以12除去之,不满(12)者,命以十一月,算尽之外,则前年十一月前食月也"。

$$\text{后食}=\text{天正月前食月及分}+5\frac{20}{23}\text{月}$$

分满食法23,进为月数。

(三)推食月朔日、食日、后食朔及日

$$\text{食月朔日大小余}=\left[\left(\text{食积月}\times 29\frac{499}{940}\right)/60\right]_R$$

所得余数,以所求年所入蔀会名命之,算尽之外(蔀会名不计),即得年前天正前食月朔日干支。



$$食日=食月朔日大小余+14\frac{719\frac{1}{2}}{940}$$

小余满蔀月 940 为大余。

四分历推月食法同三统。皆以 135 月有 23 食为率。故得$5\frac{20}{23}$月而一食。月策$29\frac{499}{940}$，5 个月共计$5\times29\frac{499}{940}=147\frac{615}{940}$日，减两个干支周期 120，为$27\frac{615}{940}$日。故求后食朔及日皆由前食朔、食日加$27\frac{615}{940}$而得。若所得月余分不满 20 者，再加 1 月（$29\frac{499}{940}$日），即相距 6 月而食（因食间距$5\frac{20}{23}$月）。

(四)天正后食

$$余年=[上元积年/岁数 513]_R$$

$$章月 235\times余年/章法 19=积月+闰余/19$$

$$天正后食=[(积月\times112)/月数 135]_R/23=月数\frac{余分}{23}$$

月数自天正月起算（十一月不计入）得食月及余分。

推天正前食月和天正后食月方法是等效的。推天正后食月似更直观、简便。求天正前食月术，可以得出食月朔日、食日干支。由历表和食典可直接查出食月的位置、所对应的中历、西历月日及合天情况。所以用周期法推算月食，最好将两者结合起来。





四分历步月食推食月朔日、食日干支要注意命算为所会蔀名。术文是这样说的，推月食所入蔀会年，以元会 41040 除去上元，其余以蔀会 2050 除之，所得以 27 乘之，满 60 除去之，余以 20 除所得数，从天纪，算外，所入纪。不满 20 者，数从甲子蔀起，算外，所入蔀会也。其初不满蔀会者，入蔀会年数也。四分历元 4560 年，年名、日名 4560 年后才又回复。纪 1520 年，至朔日名 20 蔀 1520 年方可复原。一纪后岁名移后 20，三纪后复初。后汉四分历上元甲子为庚申。三纪岁名各为庚申、庚辰、庚子，称孟、仲、季纪。庚辰仲纪为后汉所当之纪又称天纪。仲纪之元庚辰岁入庚辰天纪首蔀首年。由纪名可求入纪任一年的岁名。实际上要求任一年太岁所在（岁名、纪年干支），只需以 60 除去所求年距元，余数以历元岁名命之，算外，即得。距元年如为上元积年，余数从庚申（上元甲子）数起，算外（庚申不计人），得所求年纪年干支。如为距仲纪之元的积年，则余数从庚辰（仲纪之元岁名）数起，算外即得。上述推纪年方法可写成下式：

所求年岁名=庚申+[上元积年/60]$_R$

=庚辰+[距仲纪之元年数/60]$_R$

如四分历仲纪之元，文帝后元三年庚辰岁（前161）距上元2760320年，以元会41040除去，所余10640，以蔀会2052除之，得$5\frac{380}{2052}$。所得5以27乘，满60除去，余15以20除，所得数从天纪，算外，所入纪。故庚辰岁入天纪。余15，不满20，数从甲子蔀起，甲子蔀不计入，得己酉蔀。为四分历仲纪之元庚辰岁所入蔀会。推月食食月朔日、食日干支，皆以所会蔀名命之。即悉从己酉数起，算尽之外（己酉不计）即得。前面得出的不满蔀会之年380，为入蔀会年数。

再如四分历颁行之元和二年（85）和定晷仪众数的熹平三年（174）上元积年分别为2760565、2760654，依上式得其岁名分别为乙酉和甲寅。以元会除去上元，其余以蔀会除之，分别得$5\frac{625}{2052}$和$5\frac{714}{2052}$。625和714为各自入蔀会年。得数5乘27，满60去之，余15，入天纪及所入蔀会己酉同仲纪之元。

三、交食周期

中国自古重视交食观测。《尚书》记有夏仲康发生的日食。《诗经》描述了十月之交、朔月辛卯、日有食之的情景。《春秋》保存了鲁国242年间37次大食分的日食记录。在殷墟出土的甲骨卜辞中已发现五次有干支纪日的月食验辞记载。日月食是经常发生的天象。月食几乎每年都可看到。就一个地区而言平均二三年也可看到一次日食。日月食的计算、预报比较复杂。早期主要靠周期方法来预报它。记载的最早最著名的日食预报是希腊人泰勒斯利用223月周期方法报准了公元前585年5月28日发生于小亚细亚地区的一次日食，从而结束了一场部落之间的战争。在中国，西汉文献中出现了交食周期的记载。《史记·天官书》谓，月食凡百一十三月而复始（书中有关周期数字有错讹）。《汉书·刘向传》有"率三岁五月有奇而一食"之话。刘歆三统历明确以135月有23交为法。其后王充论衡，"治期"、"说日"篇都谈到，大率四十一二月日一食，五六月月亦一食，月食先食东，日食先食西等有关交食周期方面的内容。

关于日食预报，作者查到东汉的韩说，曾准确预报了灵帝光和元年十月晦日的日食（178年11月27日）。可能是最早的成功记载。

四分历推月食周期之法与三统历同。三统历称135月为朔望之会，47个朔望之会为会月。会月6345适为27章。章19年，会月为513岁的月数。章首合朔冬至同日。47会6345月为章月、朔望之会的最小公倍数，为交食复在朔旦冬至的循环周期。135月有23食，47会513岁有食1081。三统历推月食法似自上元起算。



朔望之会135月，月食之既者，率23食而复既。会月6345，交食重起于冬至合朔之日。九会57105月为一元之月即4617岁，“九会而元复”，谓交食起于甲子朔旦冬至。太初元年岁前甲子朔旦冬至既是甲子元首、统首也是会月之始即日月交食之元。但实际上用它作月食周期推算的历元是不理想的。用它推算前104年到前18年的月食，无一例正确。在其后几十年中只能报出10%～20%。直到四分历颁行的元和、章和前后也仅能报准约1/3的月食。据研究很可能在西汉并未采用这个月食历元。《续汉书》记载，永平五年(62)官历署七月十六日月食(62年9月7日丙午晚月食2/3，实为时历十五日前半夜)。这次月食按太初历元推算应为六月望日。是时官历推算月食是依太初元年岁前冬至后一月为历元，故才能与天象基本相符。

四分历采用与三统相同的月食周期。但它重视历元的选择，并给出了比较完整的推步方法。因135月23交本身的局限，四分历步月食虽经数次历元调整仍时有差错，但比三统有进步。

日食总发生在朔日，月食必出现于望时。古人很早就认识了这个关系，并用以检验历法的朔望。日月食发生在朔望，但并非每个朔望都有交食。这是因为月行的白道与日行的黄道不在一个平面上，而有5°9′的交角。白道、黄道在天球上有两个交点。月球由黄道南移到黄道北所经过的那个点叫升交点；与它相对，即月球由黄道北进入黄道南所穿过之点，称作降交点。月球在白道运行每天约13°.2，走到两交点中间时，离黄道最远，为5°9′。太阳、月亮视直径为半度左右。只有当朔望时日月位于交点之一附近时，才会有日月食发生。大多数朔望时，月亮位于黄道的北或南面距黄道1°以外的地方，而不发生日月食。

月亮绕地球公转，地球是吸引月球的中心物体，而太阳是摄动物体。太阳质量为地球质量的33万倍。地月的质量比为81.45。而地球和太阳的距离为地月距的390倍。根据牛顿的万有引力定律可得出，太阳对月亮的引力约为地球对月球引力的两倍。但影响月亮绕地运动的力量不是太阳的吸引力而是对月、地引力之差，即摄动力。月球运动的摄动力可达中心物体吸引力的1/90。摄动力与引力不同，它不是和摄动物体的距离平方，而是和它的立方成反比。实际摄动力并不在月轨平面，而在含日地月球中心的平面内。因而在与轨道面正交的方向有一法向分量。摄动的法向分量使轨道面围绕月地心连线旋转，因而引起黄白交角和升交点的位置改变。由于太阳摄动，月球轨道是在变化的。黄白交角以173.31天周期，有近9′的半变幅；而黄白道的交点以－190″.77的日平均速度在恒星间做长期逆行，周期为18.60年。月亮连续两次经过升交点的周期为交点月，它的长度为：

$$交点月=\frac{360^\circ}{n'-v}$$

$$=\frac{1296000''}{47434''.891+190''.77}$$

$$=27.21222\text{ 日}$$

月亮的黄纬就按这个周期变化，它对日月食的计算、预报非常重要。

交点运动对月亮的赤经赤纬有很大影响。当升交点和春分点相合时，白道在黄赤交角之外，黄白倾角(5°9′)与黄赤交角(23°27′)相加。因此，白道与赤道的交角可能达到 28°36′。当降交点与春分点重合时，白道在黄道、赤道之间，这时白赤交角为 23°27′内减 5°9′，成 18°18′角。前面情况下，月亮赤纬在 1 个月内可从 −28°36′，变到 +28°36′，相差可达 57°多，后一种情况下，月亮离赤道南北最远各为 18°18′，它的赤纬变化只有 36°36′。

当地球阴影投到月面上时发生月食，若地球处在月球阴影中时出现日食，这时月轮覆盖住日面的全部或一部。日月食时，月亮中心一定在日地两球的中心连线附近。也就是前面说过的，日月食一定发生在朔望，三者基本上在一个平面内。另外，食时月亮离黄道必须很近，即食时月亮黄纬必定很小，因此交食总发生在交点附近。月亮的升交距角 P 接近 0°或 180°。即发生日月食必须同时满足，月当朔望又处升降交点附近这两个条件。月亮连续两次经过升交点的时间间隔为交点月，时间为 27.21222 日。朔望月长 29.53059 日。两种月长度不一。要想知道交食发生的周期规律，必须找出 x 个朔望月长度与 y 个交点月有相同的长度。这样，某次交食后，经过 x 个朔望月或 y 个交点月才又同时满足上述交食的两个条件。要找 x、y，最好能求出交点月和朔望月的最小公倍数。由于朔望月、交点月和食年(视太阳连续两次经过升交点的时间间隔，交食年长度为 $\frac{1296000}{n-v}=\frac{1296000}{3548.193+190.77}=$ 346.62003 日)之间不能公约。因此只能得出大致的近似关系。古代中国和西亚巴比仑都曾找出过相当不错的交食周期。其中最简便又精确的三种是 135、223、358 个朔望月周期。

经过 135、223、358 个朔望月，月亮、太阳和地球差不多恰好又回到上次交食发生时的相对位置，所以称它们为交食周期。用周期预报日月食，希望周期时间较短、关系简单、计算方便，更重要的是准确。可以找到更短的周期，如 41、88 个朔望月。前者与 44.5 个交点月、3.5 食年的长度相差无几；后者与 95.5 交点月、7.5 个食年的日数比较接近。但比上述三周期却粗疏多了。

135 朔望月 $=135\times29.530588=3986.6294$ 日

146.5 交点月 $=146.5\times27.212220=3986.5902$ 日

11.5 交食年 $=11.5\times346.62003=3986.1303$ 日

135 个朔望月比 146.5 交点月长 0.0392 日，比 3.5 个食年长 0.4991 日。月亮



日行 47434″.89，135 朔望月后，月亮走过交点 1859″.45(0°.5165)。太阳日平行 3548″.193，135 月后太阳过另一交点后多走 0°.4919(1770″.90)。如果上次日食日月正好在升交点相会时发生，经过 135 个朔望月后，太阳、月亮再度相会时，日月已过降交点约 0°.5。即日食发生在降交点以东约 0°.5 的地方。因黄白交角仅 5°多，月亮黄纬变化很小，所以还会发生日食。

223 个朔望月比 19 个食年、242 个交点月分别约短 0.459446 日和 0.036116 日。经过 223 月周期后，太阳月亮相合时距离原来的交点分别还差 1630″.20(0°.453)和 1713″.16(0°.4759)，即日月在原交点以西约 0°.45 和 0°.48 之处。358 朔望月正好等于 135 月加 223 月。358 朔望月比 30.5 个食年、388.5 个交点月长 0.039589 日和 0.003034 日。如果上次日食正好发生在升交点，经过 358 月后，太阳月亮再度相合时，日月已过降交点分别为 140″.4694(0°.03902)和 143″.91746(0°.039977)。

135 月周期后太阳过交点 0°.49，经过 223 月周期，太阳不到交点 0°.45，358 月周期为 135 月和 223 月周期之和，358 月后，太阳过交点 0°.49－0°.45＝0°.04。同样，135 月周期后，月过交点 0°.52，经过 223 月，月亮不到交点 0°.48，所以经过 135 和 223 之和 358 月后，月过交点 0°.04。223 月与 242 交点月、19 交食年相近。过这个周期后，日月仍回到原始出发的交点。135 月和 146.5 交点月、11.5 食年长度相近，358 月与 388.5 交点月、30.5 食年日数相当，所以经过 135、358 月周期后，交食发生在另一个交点。如原先在升交点，经过 135 或 358 月，交食定发生在降交点附近。

这三个周期虽然比较准确，尤其 358 月周期。但这仍不能保证交食正确地重复出现。因为日行有盈缩月行有疾徐。尤其月亮运动极为复杂。它的轨道偏心率较大(0.055)，受到的摄动影响又很大，月亮运动可能偏离它的平均位置有时达 7°之多。日月食只有日月处于朔望且位于交点附近才能发生。出现交食时日月距交点的最小距离(去交度)称作食限。日月去交大于 18°绝不可能发生日食。太阳月亮的去交距角小于 15°.48，必定出现日偏食，小于 9°.46，一定发生日全食或日环食。月食的条件比日食苛刻一些。月日去交大于 12°，绝不可能出现本影月食(全食和偏食)，去交小于 9°.65，肯定发生月偏食，去交小于 4°.3，一定会发生月全食。由于月行疾徐不一，有时不需最大偏离(近 7°)就可以使食不再发生。因此，讨论交食周期，还应该考虑中心差，也就是日月距近地点不同角度的影响。如此，135 月、358 月的周期就不如 223 月更直观和可靠了。135 朔望月约等于 144.68 个近点月，358 朔望月约当 383.67 个近点月。经过 135、358 月周期，日月距交点虽恢复到先前位置附近，但距出发时月距近点的角度却相差较远，月偏离平均位置的情况有

较大差异。说来也巧，223 朔望月与 239 个近点月，仅差 0.00785 月（0.2163 天）。223 月后，不仅日月又回到原来的交点附近，月亮相对近地点的位置也相差无几。距先前的近点角只小 10260″.17(2°.85)。同时，223 月周期比 18 年仅长 11 日。因此太阳的平近点角与出发时的数据仅多 38893″.66(10°.8)。故月亮、太阳真黄经与平黄经的差项，经过 223 个月周期只有很小变化。所以这个周期系列预报的日月食，除因日月逐渐西移远离交点，食分由小增大再由大变小超出食限外，在同一系列中日月食的演变情况是比较稳定的。135 月周期约当 10.915 回归年，358 月周期近为 28.945 年。分别比 11、29 年少 31.05 和 20.09 天。一周后太阳的平近点角要分别减少 110171″.30(30°.6)和 71283″.14(19°.8)。从日月平位置和真位置的关系而言，135 月和 358 月周期就不如 223 月周期了。因此，用 135、358 月周期预报的日月食的食分和有无就不如 223 月稳定可靠了。223 月的周期是基本满足规定月亮对于太阳和地球位置的四个参数，朔望月、交点月（食年）、近点月、近点年（365.2596 日或近似地以回归年 365.2422 日表示）的很近似的交食周期。

由于 223 朔望月周期稍小于 19 食年或 242 交点月，相当于每周后升交角距减少 0°.47。通常选取日月相合黄经位于交点以东 15°.5（对于日食）或 10°.5（月食）作为某一 223 月周期系列开始的位置。如是次日食发生在降交点之东，此时日食开始于地球南半球高纬度，经过 223 月周期，日月距降交点位置西移 0°.47，月亮位置逐渐北移，日月间角距缩小，食分增大，日食发生的位置逐渐北移。经过若干个 223 月周期，日月相合位置到达降交点。这时食分最大，食程最长。过了降交点，日月相合的位置就逐渐远离降交点，日月角距增大，食分减小，月亮阴影越来越向北极高纬地区移动，最终以北半球高纬地区的微食结束这一 223 月周期的日食系列。

如果 223 月周期系列日食开始于升交点的东侧 15°.5 附近、视日月圆面正好相切之时。和上面讨论类似，但月影移动的方向相反。日食一定以北半球的高纬度偏食开始而以南半球高纬度的偏食结束。系列开始时日月相会于升交点以东（已过升交点）。月轮切于日轮之北端，日月升交距角约为 15°.5。以后每过 223 月，日月相合时，距升交点近 0°.47，P(升交距角)和日月相距减小，食分增大，由偏食发展到全食。日月相会后退西行经过升交点后，日月升交距角由 0（日月相会于升交点时）而变为负值（由 360°而 359°、358°、…），食分由大变小，日月相合位置逐渐西移，到合朔时升交距角减少到 344°.5 左右，月轮北端切于视太阳之南端，以南极附近的微食结束。由食限和每 223 月周期后日月升交距角减少 0°.47 可以得出，一个 223 月周期系列日食大约历时可由下式得出概数：

$$一系列日食历时(周期)=\frac{2\times 15°.5}{0°.47}=66\ 个周期$$



即 66 个 223 月或约计 1189.2 年。当然这仅是个概数。

四、135 月交食周期

汉代三统历、四分历都采用 135 月周期推算和预测月食。前面说过，135 月周期虽不及 223 月周期稳定，没有 358 月周期可靠，稍为逊色，但周期较短、计算方便，还算准确，仍不失为一种好的交食周期。

历法疏密，验在交食。推算交食的初始阶段，就是采用周期预测的方法。用周期推算日月食，要得到比较准确可靠的结果，首先需要有准确的周期；其次，周期内交食间隔安排要得当；第三，使用周期的起点（历元）要选好；第四，用来推算预报的时段要合适。

四分历沿袭三统历月食法，用 135 月周期。但它能较准确地预报月食，就是它能较好地处理上述几点要求。四分历推月食法较三统详尽。术文说，月食之既者，率 23 食而复既，其月 135，率之相除，得 $5\frac{20}{23}$月而一食。以除一岁之月，得岁有 $2\frac{55}{513}$食也。分统其法，因以与蔀相约，得 4 与 27，互之，会 2052，20 而与元会。

章月 235 与交食周期 135 的最小公倍数为 6345 月，适为 513 岁。它为 27 章、47 会（朔望之会 135 月）。27 蔀（27×76 年）与 4 岁数（4×513 年）相等为 2052 年，称蔀会。20 蔀会 41040 年为元会。513 岁（6345 月）、2052 岁（4×6345 月）、41040 岁（20×4×6345）都是交食周期 135 月的整倍数。135 月有 23 食。513 岁（6345 月）为 47 会（47×135），共有 1081 食。

望日，又值日月运行到交点附近的时候，这时，月亮离黄道很近，黄纬很小，日地月几近在同一平面、同一直线上，会看到月食。月食时地球在日、月之间。地球背着太阳的一侧，因受不到阳光，会出现阴影。地球阴影分两部分，中间部分称本影，呈圆锥形。圆锥底的直径即地球直径。本影圆锥高度（圆锥长度）为 136 万～141 万千米。月亮距地球 35.7 万～40.7 万千米，平均 38.4 万千米。可以算出在月亮轨道附近，本影圆锥截面直径约为 9220 千米。本影没有受到太阳直射光，半影受到一部分直射的光。本影锥半顶角等于太阳的视角半径（约 16′）内减太阳的地平视差（约为 8″.8）；半影锥半顶角等于太阳的视半径加太阳的地平视差。望时若日月在交点附近，月绕地公转如进入地影就发生月食。月球整个进入本影发生月全食；部分进入本影出现月偏食；如只进入半影，则为半影月食。月球在半影内月面亮度减弱很少，只有当月球深入半影接近本影时，肉眼才可能看出月球边缘变暗。这种情况古人有时可能称作薄食。月食时月亮在轨道上开始进入本影（月上切本影圆锥）及离开本影（月下切本影圆锥），在地球中心所张角之半，其值等

于月亮地平视差(约 57′.3)与本影锥半顶角(约 15′51″)之差。而食时月在轨道上进出半影圆锥之上下切点,在地球中心所张之半角,其值与月亮地平视差与半影锥半顶角(约 16′9″)之和相当。月地平均距离为 384000 千米。由这些数据可大致得出在月亮所处的位置半影、本影圆锥的截面直径约为 16420 千米和 9260 千米。这只是粗略数值。真正在月食计算时还要考虑其他的因素。至此我们介绍了月食有三种类型:全食、偏食和半影食。全世界每年最多可发生 5 次日食,最少 2 次;而每年最多可出现 3 次本影月食,少则一次也没有。如计及半影月食,则每年至多发生 5 次,最少 2 次。每年发生 2 次本影月食(全食、偏食)的机会最大,约为 60%。每年发生的月食次数和月食种类很不相同。各类月食出现的平均分布情况如下:

月 全 食	0.7022 次/年	占 28.9%
月 偏 食	0.8396 次/年	占 34.5%
半影月食	0.8913 次/年	占 36.6%
月食总计	2.4331 次/年	占 100.0%

本影月食包括月全食和月偏食两类,是月球进入地球本影圆锥发生的。135 月为 10.915 年。按上述月食的平均分布,135 月周期内应发生 7.66 次全食,9.16 次偏食,合计发生本影月食 16.83 次。另外还会出现 9.73 次半影月食。总计一个交食周期内共发生各类月食 26.56 次。这些数字是据多年月食的平均统计结果。在每个 135 月内会有一定摆动。但从平均结果来看,每 135 月交食周期内共发生各类月食 26.56 次。其中本影食仅 16.83 次。这是全世界范围内发生的月食。这些食中大约仅有 60%,即约 10 次才能为中国所见。月食时只要月亮在地平线以上,我们都可以看见。月食总发生在望日。望日日没时月出,日出时月没。由于大气折射将地平线上的天体位置提高,再加上月食全过程时间较长,尤其全食和大食分月食持续时间可达 3~4 小时,可看到许多月带食出没的现象。所以在一个地区可以看到大约 60%的本影月食。

由此看出,135 月有 23 食,对于全世界发生的入限的各类月食而言,数目不足;对于本影月食来说,食数偏大;如果指中国可见的月食,它就太大了。以后的讨论中会看到,只要历元、时段选择适当,用 135 月周期预报本影月食在一定时期内可以一个不漏。但也会出现虚报,因为半影月食,尤其半影食分不足 0.7 者,肉眼无法看到。故以下的考查中,只讨论本影月食。

前面说过,135 月交食周期是较好的周期之一。月食之既者,至此而复既。我们选取了明帝永平至灵帝熹平、光和百余年中的 8 组月食,列于表5-9,考查经历 10 次 135 月周期后,月食食分及月亮升交距角 P 的变化情况。总的说来,升交距角是在增大。平均每个周期后,食时月距交点东移约 0°.5。10 个周期后,小者 P



表 5—9 135 月周期与去交度及食分的关系

(A)			(B)			(C)			(D)		
年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分	年月日	P(°)	食分
64.7.17	172.14	0.490	65.1.11	360.11	1.836	65.7.6	180.66	1.761	67.11.10	350.28	0.207
75.6.17	354.21	0.992	75.12.11	179.01	1.634	76.6.6	2.90	1.430	78.10.10	170.34	0.385
86.5.17	176.40	1.149	86.11.9	358.14	1.569	87.5.6	184.73	1.003	89.9.9	350.84	0.263
97.4.15	357.21	1.345	97.10.10	178.21	1.574	98.4.4	5.47	0.945	100.8.7	170.68	0.251
108.3.15	178.55	1.657	108.9.8	358.03	1.470	109.3.5	186.88	0.814	111.7.9	352.51	0.731
119.2.13	359.49	1.768	119.8.8	178.46	1.622	120.2.2	7.39	0.545	122.6.8	174.62	0.942
130.1.12	178.71	1.587	130.7.9	0.35	1.827	131.1.1	186.18	0.789	133.5.7	355.56	1.066
140.12.12	358.06	1.563	141.6.7	182.00	1.478	141.12.1	5.90	0.962	144.4.6	177.30	1.466
151.11.12	177.88	1.511	152.5.6	3.19	1.339	152.10.1	185.68	0.854	155.3.7	358.70	1.637
162.10.31	356.96	1.277	163.4.7	185.11	1.086	163.9.30	4.45	1.069	166.2.3	178.28	1.515
173.9.9	176.87	1.370	174.3.6	6.24	0.738	174.8.30	185.17	1.083	177.1.2	357.98	1.554
(E)			(F)			(G)			(H)		
68.5.6	177.23	1.396	68.10.29	358.21	1.580	72.2.22	179.50	1.800	72.8.16	359.14	1.670
79.4.5	357.95	1.471	79.9.29	178.43	1.614	83.1.22	359.97	1.848	83.7.18	179.88	1.850
90.3.5	179.07	1.735	90.8.29	358.55	1.563	93.12.21	178.94	1.624	94.6.17	2.03	1.565
101.2.2	359.76	1.814	101.7.28	179.14	1.730	104.11.20	358.10	1.565	105.5.17	183.84	1.158
112.1.2	178.85	1.610	112.6.27	1.18	1.698	115.10.21	178.04	1.544	116.4.15	4.76	1.068
122.12.1	358.08	1.564	123.5.28	182.92	1.317	126.9.19	357.60	1.393	127.3.16	186.36	0.892
133.10.31	177.94	1.524	134.4.26	4.00	1.200	137.8.19	177.86	1.525	138.2.13	7.09	0.595
144.9.30	357.24	1.328	145.3.26	185.77	0.984	148.7.19	359.56	1.811	149.1.12	186.08	0.812
155.8.30	177.32	1.440	156.2.24	6.71	0.659	159.6.18	181.07	1.640	159.12.13	5.88	0.965
166.7.30	358.82	1.691	167.1.23	185.93	0.844	170.5.18	2.34	1.481	170.11.11	185.60	0.863
177.6.29	180.17	1.799	177.12.23	5.85	0.969	181.4.17	184.38	1.198	181.10.10	4.19	1.165

（月亮升交距角）增加3°，如E组；多者增加7°～8°，如D、F组；一般增大4°～6°。同时看出，由于135月周期后，月亮平近点角有较大变化，所以P的改变很不稳定。有时增大得很快，有时较慢，甚至有时减小。几乎每组都出现过这种情况。还可看出，"月食之既者，至此而复既"，当望时日月在交点前（西）5°（即P为175°、355°）开始，直到P为185°或5°左右为止，大约可以持续20个周期。20周期约当218年。在这期间，月食食分从1.0增大到1.8甚至更大，再慢慢减小到1.0，然后演变成月偏食。

月食食分是食甚时月球视直径进入本影的部分与月球视直径之比，皆以角度表示，最大食分g可用下式表达：

$$g=\frac{\text{月角半径 } H'+\text{地球本影角半径 } S-\text{地影中心与月球中心的距离}}{\text{月角直径 } 2H'}$$

月亮角径、地球本影角径随日月轨道位置而有一定变化。当月球正好与本影相切时，月角半径与本影半径之和正好与地影中心与月影中心角距离相等，食分为0。望时日月如正好位于交点，则月心将通过地影中心，这时角距离为0，是食分最大的全食。如将平均参数月地平视差π'为57′，太阳地平视差π9″，月角半径H'16′代入目前常用的计算月食地影半径公式：

$$\text{地球本影半径 } S=1.02[0.998324\times(\pi'+\pi)-H']$$

得出的S约为42′。可求得最大月全食的食分为1.81。由于月亮轨道运动十分复杂，实际上，最大的月全食食分有时可达1.88。

月亮升交角距P是月亮与升交点的角距离。日月食计算中常要用到它。采用下列公式求得

$$P=P_0-0°.4125\sin m+0°.1135\sin 2m+2°.2172\sin M+0°.1293\sin 2P_0$$

式中P_0为平升交角距，m、M分别为月、日的平近点角，它们的值分别为：

$$P_0=11°.250889+483202°.025150T$$

$$m=296°.1046+477198°.849108T+0°.009192T^2$$

$$M=358°.4758+35999°.049750T-0°.000150T^2$$

其中$T=(JD-2415020.0)/36525$，为自1900.0（历书时）起算的儒略世纪数。JD为我们所要计算日月食日期对应的儒略日。计算公元1600年以前的数值需进行世界时和历书时时差ΔT的修正。

四分历在135月的周期里，每隔$5\frac{20}{23}$月得一月食，具体安排方法如表5－10所示。即，5月者1，6月者6，5月者1，6月者7，5月者1，6月者7，凡135月而复始。



表 5－10 135 月周期中 23 食的安排

间　隔	5 月	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	5 月
食月安排	$0\frac{0}{23}$	$5\frac{20}{23}$	$11\frac{17}{23}$	$17\frac{14}{23}$	$23\frac{11}{23}$	$29\frac{8}{23}$	$35\frac{5}{23}$	$41\frac{2}{23}$
间　隔	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	5 月
食月安排	$46\frac{22}{23}$	$52\frac{19}{23}$	$58\frac{16}{23}$	$64\frac{13}{23}$	$70\frac{10}{23}$	$76\frac{7}{23}$	$82\frac{4}{23}$	$88\frac{1}{23}$
间　隔	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	6 月	5 月
食月安排	$93\frac{21}{23}$	$99\frac{18}{23}$	$105\frac{15}{23}$	$111\frac{12}{23}$	$117\frac{9}{23}$	$123\frac{6}{23}$	$129\frac{3}{23}$	$135\frac{0}{23}$

在三统历和四分历中，月食在 135 月交食周期中的分布是完全相同的。后汉四分历术文中记载了推月食的两个历元。一为四分历的庚申上元，即孔子获麟前 276 万年；一为四分历给出的月食五星之元、公元前 9281 年。它们的近距之元分别是河平癸巳岁（前 28）和元帝初元二年甲戌岁（前 47）。两元相差 1 章（19 年）。以后文中分别称这两个月食历元为河平癸巳元和月食五星元。只要根据月食历元求出每个 135 月周期起始月的位置，根据上述每会（135 月周期称朔望之会，简称会）中月食的安排，就可以得出每个月食所在的年月。上节介绍了四分历推月食的两种方法。这里说的可看作是步月食的第三种方法。只要借助于一本载有东汉朔闰的历表，用此法推算月食是十分方便的。表 5－11 中作者计算给出了由河平癸巳元、月食五星元、太初历元和三统历月食元得到的后汉近二百年间每会（135 月周期）会首所在之年月。由三统历推月食法知所用的月食历元即太初历元。但这个历元对于推算月食却不理想。前面说过，135 月是个较好的交食周期，但这还不够，要准确预报月食还要选好历元和适用的时段。用太初历元推算月食，在前 104 至前 18 年中无一例月食报准。其后几十年也仅能推出不足 1/3。三统历月食元会首比太初历元会首迟一个月。对于太初历施行期间这是一个比较理想的历元。用它可以一个不漏地报出前 104 至前 18 年的全部本影月食。太初历是否用 135 月周期推步月食已不可考。《续汉志》记有，“至永平五年官历署七月十六日月食”，由此可证至少后汉前期明帝永平年间官历推算月食使用的是三统历月食元，而不是太初历元。

135 月、223 月、358 月都是较好的交食周期，尤其 223 月周期最为理想。每个周期后日月与交点所处的相对位置变化不大，交食可重复发生，从而组成一个日月食系列。在一个周期系统里的日食或月食，每个食之间都相距一个周期的月数。我们仍讨论 135 月周期。一个 135 月周期系列的月食群，通常从最小食分的半影食或偏食开始。其时日月黄经相冲（相距 180°），而所处位置在交点之西约 16°.5（半影食）或 10°.5。每过 135 月，日月升交角距增加约 0°.5，食分逐渐加大到月全食。等望时日月穿过交点到达东侧以后，食分逐渐减小直至为 0，结束这个系统的

表 5—11 四种月食历元的各会(135 月周期)首月

太初历元			三统历月食元			月食五星元			河平癸巳元		
元封六、十一	BC 104.1.8	P 346°.65	元封六、十二	BC 104.2.7	P 18°.03	初元二、十一	BC 47.1.8	P 8°.59	建始五、十一	BC 28.1.8	P 16°.38
太始三、十	BC 94.12.8		太始三、十一	BC 93.1.7		建昭二、十	BC 37.12.7		鸿嘉三、十	BC 18.12.8	
始元四、九	BC 83.11.7		始元四、十	BC 83.12.6		河平三、九	BC 26.11.7		绥和二、九	BC 7.11.7	
本始二、八	BC 72.10.7		本始二、九	BC 72.11.5		永始二、八	BC 15.10.6		元始五、八	AD 5.10.6	
元康五、七	BC 61.9.5		元康五、八	BC 61.10.5		建平三、七	BC 4.9.5		天凤三、八	AD 16.9.5	
甘露四、六	BC 50.8.5		甘露四、七	BC 50.9.4		居摄三、六	AD 8.8.5		建武三、六	AD 27.8.6	
永元五、五	BC 39.7.6		永元五、六	BC 39.8.4		天凤六、六	AD 19.7.5		建武十四、五	AD 38.7.5	
河平元、四	BC 28.6.4		河平元、五	BC 28.7.4		建武六、四	AD 30.6.4		建武廿五、四	AD 49.6.4	
鸿嘉四、三	BC 17.5.4		鸿嘉四、四	BC 17.6.2		建武十七、三	AD 41.5.4		永平三、三	AD 60.5.4	
建平元、二	BC 6.4.4		建平元、三	BC 6.5.3		建武廿八、二	AD 52.4.3		永平十四、二	AD 71.4.2	201°.58
居摄元、正	AD 6.3.3		居摄元、二	AD 6.4.2		永平六、正	AD 63.3.3	15°.05	建初七、正	AD 82.3.3	22.88
天凤四、正	AD 17.1.30		天凤四、二	AD 17.3.1		永平十六、十二	AD 74.1.31	195.8	永元四、十二	AD 93.1.31	203.6
建武三、十一	AD 28.1.1		建武三、十二	AD 28.1.30		建初九、十一	AD 84.12.30	15.05	永元十五、十一	AD 103.12.31	22.20
建武十四、十	AD 38.11.30		建武十四、十一	AD 38.12.30		永平七、十	AD 95.11.30	225.9	元初元、十	AD 114.11.30	201.9
建武廿五、九	AD 49.10.29		建武廿五、十	AD 49.11.28		延平元、九	AD 106.10.30	13.88	延光四、九	AD 125.10.30	21.73
永平三、八	AD 60.9.28		永平三、九	AD 60.10.28		元初四、八	AD 117.9.28	193.5	永和元、八	AD 136.9.28	200.6

续表

太初历元			三统历月食元			月食五星元			河平癸巳元		
永平十四、七	AD 71.8.29	351°.3	永元十四、八	AD 71.9.28	22°.30	永建三、七	AD 128.8.28	13.38	建和元、七	AD 147.8.28	21.26
建初七、六	AD 82.7.28	171.4	建初七、七	AD 82.8.27	201.9	永和四、六	AD 139.7.29	194.8	永寿四、六	AD 158.7.29	202.7
永元五、五	AD 93.6.27	353.4	永元五、六	AD 93.7.26	23.12	和平元、五	AD 150.6.27	16.53	建宁二、五	AD 169.6.27	23.61
永元十六、四	AD 104.5.27	175.5	永元十六 、五	AD 104.6.26	205.1	延熹四、四	AD 161.5.26	197.5	光和三、四	AD 180.5.26	205.4
元初二、三	AD 115.4.26	356.4	元初二、四	AD 115.5.26	26.34	建宁五、三	AD 172.4.26	19.69	初平二、三	AD 191.4.27	
永建元、二	AD 126.3.26	178.0	永建元、三	AD 126.4.24	207.9	光和六、二	AD 183.3.27		建安七、二	AD 202.3.26	
永和二、正	AD 137.2.23	359.1	永和元、二	AD 137.3.25	29.64	兴平元、正	AD 194.2.23		建安十八、正	AD 213.2.22	
建和元、十二	AD 148.1.23	178.5	建和二、正	AD 148.2.22	210.1	建安九、十二	AD 205.1.22				
永寿四、十一	AD 158.12.23	358.0	永寿四、十二	AD 159.1.21	29.69	建安二十、十一	AD 215.12.23				
建宁二、十	AD 169.11.22	177.9	建宁二、十一	AD 169.12.21	209.7						
光和三、九	AD 180.10.21	356.8	光和三、十	AD 180.11.20	28.90						
初平二、八	AD 191.9.20		初平二、九	AD 190.10.20							
建安七、七	AD 202.8.21		建安七、八	AD 202.9.19							
建安十八、六	AD 213.7.20		建安十八、七	AD 213.8.19							
黄初五、五	AD 224.6.18										

月食群。对于以半影食开始、结束的 135 月周期系统，大约需历时 66 个周期、近 720 年；以月偏食开始并结束的系统，约历时 42 个周期、458 年左右。用上述 135 月周期方法预报系统内的某个月食是很容易的。

汉代推月食术是根据 135 月周期及每周期有 23 食，预测在某个时期内的全部月全食和月偏食。这就不仅涉及周期精确度，还与月食出现的间隔时间、对于需要预报月食的时段应选用什么历元都有关系。前面说过，用太初历元预测前 104 到前 18 年月食无一报准，而用仅比它迟一个月的三统历月食元却无一漏失。由表 5－11看出，太初历元望月时月的升交距角 P 为346°.65，月在交点之西，预报近期月食无一成功；而三统历月食元，望时月亮的升交距角 P 为 18°.03、早已出食限，且月在交点之东，预报其时 84 年的本影月食却全可报出。

由表 5－11 可知，河平癸巳元望月升交距角 P 与三统历月食元相近。经作者考查，它可完全报出前 28 年至公元 49 年整个一蔀的全部本影食。月食五星元望月升交距角 P 为 8°.59，对前 48 年至前 1 年的月食，会发生少量漏报，但可全部报出公元 1 年 6 月 24 日（食分 0.068）至 171 年的所有本影月食。

自东汉四分历颁行的元和二年岁前天正望（公元 84 年 12 月 30 日）至光和五年终（182）98 年中，共发生 240 个月食，内半影食 88，全食 65，偏食 87。而按 135 月 23 食计，应有月食 207 起。我们只讨论本影食，自元和二年天正月（84 年 12 月）至质帝本初元年（146）终，共发生本影食 96 次，用河平癸巳元、月食五星元计算，结果为

河平癸巳元　　报出 78(81%)　　漏报 18(19%)

月食五星元　　报出 96(100%)　　漏报 0(0%)

用月食五星元计算桓帝建和元年（147）至灵帝熹平四年（175）底 29 年的月食，在总共发生的 45 次本影食中，仅漏报 172 年 3 月 28 日（熹平元年二月）1 次。用河平癸巳元推算同一时期，29 年中共失报 13 次（29%）。自建和元年（147）至光和三年（180）的 34 年内共漏 16 次，占全部本影食 54 次的 30%。用太初历元推算公元 147 年至公元 175 年共 29 年的 45 次本影月食，报出 20(44%)，漏失 25(56%)。由三统历月食元推算，则报对 25 个(56%)，失报 20 个(44%)。

用 135 月 23 食推步月食，历元和时段的配合很重要。在整个后汉施行四分历期间（公元 85 年至公元 220 年），我们可以找出这样一个历元，它能一个不漏地将本影月食准确报出。这个历元就是公元前 1008 年前天正冬至月（公元前 1009 年 12 月 28 日），近距之元为天凤六年正月（公元 18 年 12 月 26 日）。可以建初九年五月（公元 84 年 6 月 22 日）为会首（135 月周期的首月）入算。建初九年五月朔时，日月的升交距角 P 为 353°.9，有日环食；望时月亮的升交距角 P 为 188°.54，有月偏



食(食分 0.559)。这个历元与月食五星元极为相似。后者,合朔时(公元前 48 年 12 月 25 日)日月升交距角为 173°.5,有日环食发生;望时(公元前 47 年 1 月 8 日)月升交距角 P 为 8°.59,有食分为 0.370 的月偏食。只不过月食五星元朔日食发生在降交点,望时月在升交点月食,与建初九年五月历元正好相反而已。而日月与交点的相对位置也很相仿。月食五星元适用的时段为历元后的 48 年至 220 年。建初九年历元适用于紧接历元的一百三四十年。这个差别主要是因为月亮食时的平近点角不同,影响到交食出现的间隔时间所致。

第五节 月食出现的间隔时间与步术

一、月食出现的间隔时间

月食要经过多少个朔望月才会再次出现,因为月亮运动极为复杂,由太阳、行星摄动引起的差数逾千项,月食连续发生的间隔时有变化。要严格讨论这个问题是很麻烦的。我们还是根据日月的平运动规律对它进行类似半定量性质的考查。并且讨论的范围仅限于本影月食。当然这个方法对讨论半影月食同样适用。

设以 S 表示望时(日月黄经相差 180°)太阳的黄经,Ω 表示升或降交点的黄经。$S-\Omega$ 实际上就是月食时日月的去交度,即日月与相近交点的角距。发生本影食的黄经食限平均为 10°.5,即

$$|S-\Omega|<10^\circ.5$$

或

$$-10^\circ.5<S-\Omega<10^\circ.5$$

时发生本影食。此为出现本影食的基本条件。

因交点每日以 190″.77 速度向西逆行,太阳以每日 3548″.1928 速度向东运动。所以一个朔望月的时间里,太阳相对于交点向东移动了 30°.6705。因

$$29.530588\times(3548''.1928+190''.77)/3600=30^\circ.670492$$

一个朔望月后,太阳距交点的黄经差增加 30°.6705,p 个朔望月后,太阳距交点黄经差增加 30°.6705×p。我们把它写成下列小于±90°的形式

$$30^\circ.6705p=180^\circ\times k+E_p$$

其中 k 为整数,选取的方法总使 E_p 的绝对值尽量的小,本影食由食限分析可知虽有时一年内可能一次也不出现,但从不会超过两年。因此,实际上只要列出 24 个月的 E_p 值对间距的讨论就足够了。表 5-12 列出各月太阳距交黄经差 E_p 值。

表 5－12　各月太阳距交黄经差 E_p 值

p	E_p(°)	p	E_p(°)	p	E_p(°)	p	E_p(°)	p	E_p(°)
1	+30.7	7	34.7	13	38.7	19	42.7	25	46.8
2	+61.3	8	65.4	14	69.4	20	73.4	26	77.4
3	−88.0	9	−84.0	15	−80.0	21	−75.9	27	−71.9
4	−57.3	10	−53.3	16	−49.3	22	−45.2	28	−41.2
5	−26.7	11	−22.6	17	−18.6	23	−14.6	29	−10.6
6	4.0	12	8.0	18	12.1	24	16.1	30	20.1

如果望时，去交度满足

$$-10°.5<S-\Omega<+10°.5$$

便会发生本影食。p 个朔望月后会不会再出现本影食，就要看下列关系

$$-10°.5-E_p<S-\Omega<+10°.5-E_p$$

是否满足前述的出现本影食的基本条件。可以看出，如 $|E_p|>2\times10°.5$ 时即无法满足。上列各月 E_p 值中，只有 p 为 6,12,17,18,23,24,29,30 几种，需要考查。其中 p 大于 24 者，由食限和食典看出，本影食不会有这样长的间距，可略。对应于所取的 p 值，有下列双不等式

$$p=6\qquad -10°.5<S-\Omega<+6°.5$$

$$p=12\qquad -10°.5<S-\Omega<+2°.5$$

$$p=17\qquad +8°.1<S-\Omega<+10°.5$$

$$p=18\qquad -10°.5<S-\Omega<-1°.6$$

$$p=23\qquad +4°.1<S-\Omega<+10°.5$$

从平运动来说，$p=12$ 或 18 的条件都已为 $p=6$ 所容纳。$p=6$ 的条件适用范围很大。已将 12、18 月都包进去了。如果 6 个月后这样条件下不见本影食，那么 12、18 月后更不会发生了。但 p 为 6 没有包容 $p=17$、23 的情况。17 月后或 23 月后却会发生。换句话说，简化为仅考虑平运动，本影食发生的时间间隔为 6、17 和 23 个朔望月。

由上列不等式关系可以看出，连续出现本影食的时间间隔以 6 个月的机会最多。去交度在(−10°.5，+6°.5)之间的月食，间隔时间基本上全为 6 个月。这占去了本影食的 80.95%。去交度为 8°.1～10°.5 的月食，大致间隔时间为 17 个月，约占本影食的 11.43%。去交度在 6°.5～8°.1 间的月食，它的间隔时间约为 23 个月，占全部本影食的 7.62%。

本影食平均每年发生 1.5418 次。每会 135 月平均有本影食 16.8285 次。通常，每会 135 月发生本影食 15～18 次，平均 17 次。在这 17 次中，间隔为 6 个月的约 14，17 月的约 2，23 月者约 1 次。



以上讨论基于平均运动和平食限而言的。事实上日月运动，尤其月亮运动极为复杂，月亮实际位置经常偏离平位置数度，最多可达 7°。本影食限也在 9°.65 和 11°.5 之间变化。因此前面给出的各 E_p 值及间隔 p 为 6、11、12、17、23 等朔望月发生本影食的条件（或上列不等式）会有很大的出入。上列 p 为 11 的 E_p 值是 －22°.6，在本影月偏食上限之内，应属考查范围。实际上，间隔为 11 个月的本影食时有发生。12 月的情况虽不多见，但也有可能。由于 11、12 个朔望月本影食的出现，再加上间隔为 17 个月的本影食更为常见。所以相距 23 个月出现本影食的机会大大减少了。往往多年中都难得一见。表 5－13 列出东汉时期几会中本影食的实际分布。由此可看出本影食出现的相距月数的现实情况、各类概率以及与月亮升交距角 P 之间的关系。在公元 62 年至 141 年的 80 年中，基本上每会（135 月）内有本影食 17 次，内 14 次间距为 6 个月，另 3 次间隔为 17 个月。在公元 2 世纪 40 年代（公元 139 年 12 月 9 日至公元 150 年 11 月 6 日）的 135 月周期中，有本影食 18 次，其中间距为 17 月者 2，间隔为 11 月者 1，另 15 食间距为 6 个月。在 150 年 11 月 7 日至 161 年 12 月 5 日的 135 个月中，有食 17 次，间隔 6 月者 13，17 月者 2，12 月者 1，11 月者 1。自 169 年 11 月 6 日起的 5 会（5 个 135 月周期）中的本影食全列在表 5－13 中，第一、二会中有食 17，内间距 6 月者 13，17 月者 2，11 月者 1，12 月者 1；第三会中有食 16，其中间隔为 6 月者 13，17 月者 2，23 月者 1；第四会有食 17，间隔同第一、二会；第五会有食 15，间隔 6 月者 12，23 月者 2，17 月者 1。

二、四分历应用周期推算月食的方法

四分历于东汉元和二年（85）颁行，东汉亡后，魏、蜀汉分别行用到公元 236、263 年，共施行 179 年。所当庚辰天纪蔀名为：

公元前 161 至前 86 年甲子蔀，公元前 85 至前 10 年癸卯蔀，公元前 9 至公元 67 年壬午蔀，公元 68 至 143 年辛酉蔀，公元 144 至 219 年庚子蔀，公元 220 至 295 年己卯蔀。

癸卯蔀四章章首年份、日名分别为：公元前 85 年（昭帝始元二年丙申）岁前天正冬至癸卯日；公元前 66 年（宣帝地节四年乙卯）岁前冬至癸未日；公元前 47 年（元帝初元二年甲戌岁）岁前冬至癸亥日；公元前 28 年（成帝河平元年癸巳岁）岁前冬至癸卯日。第三、四两章章首为东汉四分历推月食法的两个近距历元：月食五星元和河平癸巳元。

东汉时期，月食推步所用历元历术，《续汉志》论月食有详细记述。据此可知，东汉推月食所用方法大致分以下几个阶段：

①元和二年（85）至永元元年（89），四分因太初法，以河平癸巳为元，施行 5 年。

表 5－13　每会(135 月)内本影月食的分布

年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)
75.6.17	6	0.992	354.21	86.11.9	6	1.569	358.14	97.4.15	6	1.345	357.21	169.5.28	6	0.768	353.79
75.12.11	6	0.634	179.01	87.5.6	6	1.003	184.73	97.10.10	6	1.574	178.21	169.11.22	6	1.504	177.85
76.6.6	6	1.430	2.90	87.10.30	6	0.942	6.05	98.4.4	6	0.945	5.47	170.5.18	6	1.481	2.34
76.11.29	6	0.757	186.30	89.3.15	17	0.329	170.66	98.9.29	6	0.777	186.23	170.11.11	6	0.863	185.60
78.4.16	17	0.095	350.12	89.9.9	6	0.263	350.84	100.2.13	17	0.564	351.60	171.5.7	11	0.159	11.07
78.10.10	6	0.385	170.34	90.3.5	6	1.735	179.07	100.8.7	6	0.251	170.68	172.3.28	12	0.259	349.72
79.4.5	6	1.471	357.95	90.8.29	6	1.563	−1.45	101.2.2	6	1.814	359.76	173.3.17	6	1.550	358.19
79.9.29	6	1.614	178.43	91.2.22	6	0.747	187.31	101.7.28	6	1.730	179.14	173.9.9	6	1.370	176.87
80.3.24	6	0.831	6.12	91.8.18	6	0.749	6.26	102.1.22	6	0.507	7.62	174.3.6	6	0.738	6.24
80.9.18	6	0.730	186.55	93.1.1	17	0.391	171.80	102.7.18	6	0.683	187.75	174.8.30	17	1.083	185.87
82.2.2	17	0.009	351.88	93.6.27	6	0.859	353.35	103.12.1	17	0.206	350.21	176.1.14	6	0.200	350.00
82.7.28	6	0.364	171.38	93.12.21	6	1.624	178.94	104.5.27	6	1.096	175.51	176.7.10	6	0.486	172.03
83.1.22	6	1.848	359.97	94.6.17	6	1.565	2.03	104.11.20	6	1.565	358.10	177.1.2	6	1.554	357.98
83.7.18	6	1.850	179.88	94.12.11	6	0.764	186.28	105.5.17	6	1.158	183.84	177.6.29	6	1.799	180.17
84.1.12	6	0.482	7.79	95.6.6	6	0.079	10.79	105.11.9	6	0.954	5.97	177.12.23	6	0.969	5.85
84.7.6	6	0.559	188.54	96.10.20	17	0.358	170.18	107.3.26	17	0.243	170.07	178.6.18	17	0.414	188.18
85.11.20	17	0.206	350.24					107.9.20	6	0.189	350.44	179.11.2	6	0.006	349.51
86.5.17	6	1.249	176.40									180.4.27	6	1.235	175.79

续表

年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)	年月日	间月	食分	P(°)
180.10.21	6	1.239	356.75	191.9.21	6	1.310	176.5	203.2.14	6	0.941	185.42	213.1.24	6	1.521	357.74
181.4.17	6	1.198	184.38	192.3.17	6	0.832	5.69	203.8.10	17	0.833	0.59	213.7.20	6	1.554	178.46
181.10.10	17	1.115	4.19	192.9.9	17	1.153	184.71	204.12.24	6	0.303	169.92	214.1.14	6	0.993	5.69
183.2.25	6	0.157	170.49	194.1.24	6	0.184	349.85	205.6.19	6	0.470	352	214.7.9	23	0.723	186.42
183.8.21	6	0.293	349.69	194.7.21	6	0.343	171.23	205.12.14	6	1.495	177.83	216.5.19	6	0.976	174.1
184.2.14	6	1.463	177.95	195.1.14	6	1.542	357.89	206.6.8	6	1.772	0.61	216.11.12	6	1.191	356.48
184.8.9	6	1.579	1.85	195.7.10	6	1.703	179.3	206.12.3	6	0.870	185.52	217.5.9	6	1.449	182.78
185.2.2	6	0.886	185.71	196.1.3	6	0.977	5.8	207.5.29	11	0.431	9.36	217.11.1	23	1.174	3.87
185.7.30	17	0.722	6.67	196.6.28	23	0.572	187.28	208.4.18	12	0.035	348.34	219.9.11	6	0.136	348.69
186.12.14	6	0.311	169.94	198.5.8	6	1.108	174.96	209.4.8	6	1.337	356.93	220.3.7	6	1.314	177.07
187.6.9	6	0.618	352.9	198.11.1	6	1.211	356.59	209.10.1	6	1.265	176.21	220.8.31	6	1.389	357.01
187.12.3	6	1.499	177.84	199.4.28	6	1.320	183.6	210.3.28	6	0.939	5.08	221.2.24	6	1.008	185.05
188.5.28	6	1.626	1.48	199.10.22	17	1.149	4	210.9.21	17	1.211	184.34	221.8.21	17	0.932	5.36
188.11.22	6	0.868	185.55	201.3.7	6	0.070	170	212.2.4	6	0.155	349.64	223.1.5	6	0.292	169.85
189.5.17	11	0.293	10.23	201.8.30	6	0.209	349.15	212.7.31	6	0.210	170.48	223.6.30	6	0.327	
190.4.8	12	0.152	349.06	202.2.24	6	1.395	177.55					223.12.25	6	1.488	
191.3.28	6	1.450	357.59	202.8.21	6	1.478	357.55								

永元元年，天以七月后闰食，术以八月，出现失误。

②永元二年(90)正月十二日，蒙公乘宗绀上书言，今月十六日月当食，而历以二月。至期如绀言。诏书以绀法署。施行 56 年。至本初元年(146)，天以十二月食，历以后年正月，于是始差。

③本初元年(146)至熹平三年(174)29 年之中，先历食者 16 事。续汉志未记载这时期行何法术。

④熹平四年(175)，绀孙诚上书言，受绀法术当复改。今年十二月当食，而官历以后年正月。到期如言。诏书听行诚法。直至光和二年五月。

⑤光和二年(179)五月后，奏废诚术施行恂术。

⑥光和三年(180)以后，施行诚术。

冯恂术以 5640 月有 961 食为法。5640 月正好为 6 蔀 456 年，比 135 月周期的岁数 513(6345 月)少 705 月。

5640 个朔望月＝166552.5163 日

6120.5 交点月＝166552.3925 日

6044.5 近点月＝166553.4775 日

480.5 交食年＝166550.9244 日

恂术合每交 5.868886575($5\frac{835}{961}$或 $5\frac{19.9844}{23}$)月，由前面的周期讨论，上列数值显示冯恂的交食之法是个相当不错的周期。它与 135 月周期微有不同，而稍为密近。交食周期均可表示为

$$\frac{m}{\frac{n}{2}}=\frac{47x+41y}{4x+\frac{7}{2}y}$$

其中 m 为朔望月数，$\frac{n}{2}$为交食年数，称作交率；$m+\frac{n}{2}$为交数，即交点月数。冯恂交食周期即为此表达式中 $x=79, y=47$ 的情况。因恂术施行的时间较短，且续志未记载它的历元，无法对其预报做更深入的分析。

宗诚以 135 月 23 食为法。诚为绀孙，受绀法术。东汉除光和二年五月后施行恂术，光和三年(180)后又行诚法。可知除光和二至三年一段外，东汉时期皆行 135 月 23 食步法。下面依续汉志月食纪事来考查东汉各段时期推月食所用的历元。

东汉时期有如下 8 条月食记载，其中多为验证历法记录的预报数值。

①永平五年(62)，官历署七月十六日月食。

②永元元年(89)天以七月后闰食，术以八月。

③永元二年(90)正月十二日宗绀上书言，“今月十六日月当食，而历以二月。”



至期如绀言。

④本初元年(146)天以十二月食,历以后年正月。

⑤光和二年己未(179)月食,官历以五月。

⑥熹平四年(175),宗诚上书称,"今年十二月当食,而官历以后年正月。"到期如言。

⑦桓帝永寿三年(157)十二月壬戌月食非其月。

⑧延熹八年(165)正月辛巳,月食非其月。

⑦、⑧载《续汉书·五行志》,前6条皆著录于《续汉书·律历志》中。

8次月食中,两次记载"月食非其月"。应理解作发生月食的月份与预报的不符。其余6次皆注明历作某月或历以某月。前已指出,续汉志记载,除光和二至三年一段采用冯恂术外;整个东汉时期皆以135月23食法推步。在表5-14、表5-15中,我们分别以河平癸巳元和月食五星元用四分历推月食术计算这8次月食,以考查其时推步所用的历元、方法。计算结果显示:

①永平五年七月月食为偏食,发生于公元62年9月7日丙午晚,食分0.669,全食过程176分钟,初亏19:40,食甚21:07,复圆22:35。此食用河平癸巳元、月食五星元和三统历月食元皆可报出。

②永元元年闰七月月偏食发生于公元89年9月9日庚午日凌晨,食分0.263,是食河平癸巳元、月食五星元、太初历元均可报准。《续汉志》说,"天以七月后闰食,术以八月",谓"四分因太初法以河平癸巳为元,施行五年"。只有三统历月食元会将此食报为八月。称元和二年(85)至永元元年(89)5年用河平癸巳元,值得商榷。有可能颁行四分历的头5年仍因太初法,用三统历月食元。



③永元二年正月月全食,发生于公元90年3月5日丁卯子夜前后,食分1.735。宗绀上书言:"今月十六日月当食,而历以二月。"此食河平癸巳、月食五星和三统历月食元皆可推出,太初历元报为前一月(永元元年十二月)。"历以二月",此历系何术不得而知。《续汉志》原文作"十二年"(100),因后文有"施行五十六岁至本初元年(146)"句,故校改为永元二年(90)。校改后调整了年数上的矛盾,却出现了四分历行用初期究竟用什么历元推算月食的问题。永元十二年正月望发生了一次月带食而出的现象。这次月偏食出现在公元100年2月13日己亥申酉时之间,食分0.564,全食历时152^m。日没月出时(约17^h40^m),已过食甚,月带食出,约过40^m复圆。是食,月食五星元和太初历元报为永元十二年正月;河平癸巳和三统历月食元报为二月。由永元元年闰七月食和永元十二年正月食来考查,只有用三统历月食元会将此二食报为八月和二月;月食五星元全可报准;河平癸巳元报为元年闰七月食,十二年二月食;太初历元均可报出。由

此可得出，四分历颁行初期，元和、章和、永元十二年前四分历步月食，因太初法，用三统历月食元。这样分析，下文的至本初元年(146)56岁不好解释。按56岁的说法，则永元元年八月、二年二月月食系何术推得，不易解决。看来，《续汉志》这段记载文字有错讹。并且还可看出，"以河平癸巳为元"这句话，可能也不准确。甲辰(永元十二年元月二十一日，而永元二年元月无甲辰)，诏书以绀法署，施行56岁，至本初元年(146)，天以十二月食，历以后年正月，于是始差。由《续汉志》的这个记载及宗绀报准永元十二年正月(包括永元二年正月)月食，可证宗绀术是以月食五星元为法的。因前已述，以月食五星元可报出自公元元年6月24日至172年3月27日间的全部月食。而河平癸巳元自永元至本初年间至少本影食报错18起，皆为先历而食。其中七八次食时月亮在地平以下(白昼)，中国原本不可见。

表5—14 月食记载

所求年	入蔀会年	积食 入蔀会年−1×1081/513	积月 $\frac{135\times积食}{23}$	入章月 $\left[\frac{积月}{235}\right]_R$	入章闰 $\frac{7\times入章月}{235}$	天正前食月	食月 积月×朔策
85	625	1314	$7712\frac{14}{23}$	192	5	$7\frac{14}{23}$	227741
86	626	1317	$7730\frac{5}{23}$	210	6	$0\frac{5}{23}$	228273
87	627	1319	$7741\frac{22}{23}$	221	6	$11\frac{22}{23}$	228598
88	628	1321	$7753\frac{16}{23}$	233	6	$11\frac{16}{23}$	228952
89	629	1323	$7765\frac{10}{23}$	10	0	$10\frac{10}{23}$	229307
90	630	1325	$7777\frac{4}{23}$	22	0	$10\frac{4}{23}$	229661
147	687	1445	$8481\frac{12}{23}$	21	0	$9\frac{12}{23}$	250451
158	698	1468	$8616\frac{12}{23}$	156	4	$8\frac{12}{23}$	254437
165	705	1483	$8704\frac{13}{23}$	9	0	$9\frac{13}{23}$	257036
176	716	1506	$8839\frac{13}{23}$	144	4	$8\frac{13}{23}$	261023
179	719	1515	$8892\frac{9}{23}$	197	5	$0\frac{9}{23}$	262588
63	603	1268	$7442\frac{14}{23}$	157	4	$9\frac{14}{23}$	219768





④本初元年十二月望，147年2月3日丙申，22^h～24^h许发生一次食分为0.286的月偏食，《续汉志》说，天以十二月食，历以后年正月，于是始差。计算看出，月食五星元此食可准确报出(表5－15)，河平癸巳元后天1月(表5－14)。可见其时所行已非月食五星元法。《续汉志·论月食》称，"到熹平三年(174)，二十九年之中，先历食者十六事。"月食五星元在这期间本影食仅误失1次(172.3.28月偏食)；而河平癸巳元在建和元年(147)至熹平四年(175)的29年中，却先历食者16事。可以认为这29年施行河平癸巳元步月食法。但要指出，这16次可能为分析得出的结果，而并非观测实记。因16次报迟1月的食中，有2次为半影食。这两次半影食食分很大(154.9.9，半影食分1.058，172.9.20，半影食分0.999)，精细的观测者是可以发现的。但有几次本影食，月食全程发生于白昼。如147年7月30日月偏食，食分0.494；150年11月22日偏食，食分0.320；161年10月22日偏

与河平癸巳元

朔日			余年	积月闰余余 年×235/19	积月×112 135	天正	后食	次食
41 庚寅	建和 八、六	83.7.3	112	$1385\frac{5}{19}$	$1149\frac{5}{135}$	$0\frac{5}{23}$	元和 元、十一	元和 二、五
33 壬午	元和 元、十一	84.12.16	113	$1397\frac{12}{19}$	$1158\frac{134}{135}$	$5\frac{19}{23}$	元和 三、四	元和 三、十
58 丁未	元和 二、十	85.11.6	114	$1410\frac{0}{19}$	$1169\frac{105}{135}$	$4\frac{13}{23}$	元和 四、三	元和 四、九
52 辛丑	元和 三、十	86.10.26	115	$1422\frac{7}{19}$	$1179\frac{99}{135}$	$4\frac{7}{23}$	章和 二、三	章和 二、九
47 丙申	元和 四、九	87.10.16	116	$1434\frac{14}{19}$	$1189\frac{93}{135}$	$4\frac{1}{23}$	永元 元、三	永元 元、闰七
41 庚寅	章和 二、九	88.10.4	117	$1447\frac{2}{19}$	$1200\frac{64}{135}$	$2\frac{18}{23}$	永元 二、正	永元 二、七
11 庚申	永嘉 元、八	145.9.5	174	$2152\frac{2}{19}$	$1785\frac{49}{135}$	$2\frac{3}{23}$	建和 元、正	建和 元、七
37 丙戌	永寿 二、七	156.8.4	185	$2288\frac{3}{19}$	$1898\frac{26}{135}$	$1\frac{3}{23}$	永寿 三、十二	永寿 四、六
56 乙巳	延熹 六、八	163.9.16	192	$2374\frac{14}{19}$	$1969\frac{73}{135}$	$3\frac{4}{23}$	延熹 八、二	延熹 八、闰七
23 壬申	熹平 三、七	174.8.16	203	$2510\frac{15}{19}$	$2082\frac{50}{135}$	$2\frac{4}{23}$	熹平 五、正	熹平 五、六
28 丁丑	熹平 七、十一	178.11.28	206	$2547\frac{17}{19}$	$2113\frac{9}{135}$	$0\frac{9}{23}$	熹平 七、十一	光和 二、四
48 丁酉	永平 四、八	61.9.3	89	$1100\frac{15}{19}$	$912\frac{80}{135}$	$3\frac{11}{23}$	永平 五、二	永平 五、七



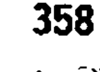
食，食分 0.036，等等，这些月食在中国都是不易看到的。

⑤熹平四年(175)绀孙诚上书言，今年十二月当食，而官历以后年正月。到期如言。丙申(十二月三日，疑为丙辰二十三日之误)诏书听行诚法。此食发生在 176 年 1 月 14 日戊申日日出前，食分 0.200，月食全程 1^h40^m。宗诚以月食五星元推算，得十二月食，合天。而其时所行推月食法为河平癸巳元，此食报迟一个月，报为熹平五年正月。由此也可证，其前的 29 年，行用河平癸巳元推月食法。丙申后，改行诚法。

⑥光和二年己未岁，是年三、四月望皆有半影食。三月食分较大(179.5.9，半影食分 0.800)，精细观测或可发现；四月食分甚小(179.6.7，半影食分 0.155)，看不到。冯恂以 5640 月 961 食法推食在三月，由表 5－14、表 5－15 知，河平癸巳、月食五星元推食在四月，官历以五月。官历为何术，不得而知。

⑦《续汉书・五行志》载，桓帝永寿三年十二月壬戌月食非其月。是食发生于 158 年 1 月 2 日壬戌晚间，为食分 0.208 的偏食。时当四分历永寿三年十一月望，不是十二月。“十二”系“十一”之误。根据前面讨论可知，是时月食推步用河平癸巳元。由表5－14看出，河平癸巳元推得月食在十二月，食先历一月，故云“月食非其月”。

⑧延熹八年正月辛巳月偏食出现于 165 年 2 月 14 日壬午的日出之前，食分 0.227。为四分历延熹八年正月望日。古代天象纪日以清晨黎明为日的分界，故此月食仍称辛巳食。是时月食推步用河平癸巳为法。此法推得延熹八年二月当食，见表 5－14。食先历一月发生，故称“非其月”。



由以上考查可以看出，《续汉志・论月食》中有些文字可能有错讹。可比较明确地知道下列几点：

①永元二年(90)或十二年(100)至本初元年(146)，月食推步用月食五星元。

②建初元年(147)至熹平四年(175)，用河平癸巳元。

③据《续汉志》，熹平五年(176)至光和二年(己未，179)，用月食五星元法。但光和二年官历推“五月食”，其术不明。

④光和三年据《续汉志》，施用冯恂步月食术。

⑤光和四年(181)后，施行诚术(月食五星元法)。

熹平五年(176)以后月食法是根据《续汉书・律历志》记载得出的。因缺乏月食记录无法做进一步的考查。



表 5—15　月食记录与月食五星元

所求年	距元	余年	积月闰余	积月×$\frac{112}{135}$	天正后食		次食		又次食	
85	9365	131	1620 $\frac{5}{19}$	1344 $\frac{0}{135}$	0	元和元、十一	5 $\frac{20}{23}$	元和二、四	11 $\frac{17}{23}$	元和二、十
86	9366	132	1632 $\frac{12}{19}$	1353 $\frac{129}{135}$	5 $\frac{14}{23}$	元和三、四	11 $\frac{11}{23}$	元和三、十		
87	9367	133	1645 $\frac{0}{19}$	1364 $\frac{100}{135}$	4 $\frac{8}{23}$	元和四、三	10 $\frac{5}{23}$	元和四、九		
88	9368	134	1657 $\frac{7}{19}$	1374 $\frac{94}{135}$	4 $\frac{2}{23}$	章和二、三	9 $\frac{22}{23}$	章和二、八	15 $\frac{19}{23}$	章和二、八
89	9369	135	1669 $\frac{14}{19}$	1384 $\frac{88}{135}$	3 $\frac{19}{23}$	永元元、二	9 $\frac{16}{23}$	永元元、闰七		
90	9370	136	1682 $\frac{2}{19}$	1395 $\frac{59}{135}$	2 $\frac{13}{23}$	永元二、正	8 $\frac{10}{23}$	永元二、七		
147	9427	193	2387 $\frac{2}{19}$	1980 $\frac{44}{135}$	1 $\frac{21}{23}$	本初元、十二	7 $\frac{18}{23}$	本初二、六	13 $\frac{15}{23}$	建和元、十二
158	9438	204	2523 $\frac{3}{19}$	2093 $\frac{21}{135}$	0 $\frac{21}{23}$	永寿三、十一	6 $\frac{18}{23}$	永寿四、五	12 $\frac{15}{23}$	永寿四、十一
165	9445	211	2609 $\frac{14}{19}$	2164 $\frac{68}{135}$	2 $\frac{22}{23}$	延熹八、正	8 $\frac{19}{23}$	延熹八、七	14 $\frac{16}{23}$	延熹八、十二
175	9455	221	2733 $\frac{8}{19}$	2267 $\frac{51}{135}$	2 $\frac{5}{23}$	熹平四、正	8 $\frac{2}{23}$	熹平四、七	13 $\frac{22}{23}$	熹平四、十二
179	9459	225	2782 $\frac{17}{19}$	2308 $\frac{4}{135}$	0 $\frac{4}{23}$	光和元、十一	6 $\frac{1}{23}$	光和二、四	11 $\frac{21}{23}$	光和四、九
62	9342	108	1335 $\frac{15}{19}$	1107 $\frac{75}{135}$	3 $\frac{6}{23}$	永平五、二	9 $\frac{3}{23}$	永平五、七	15 $\frac{0}{23}$	永平六、正（会首）

第六节　行星运动和开普勒定律

一、行星的视运动

在古代，缺乏人工照明。夜晚地面黢黑一片。皎洁的明月或无月的晴夜，满天的星斗可能是最吸引人们视线的地方。古代的游牧人很早就发现有五颗亮星在众



星中移动。这就是后人称之为水星(辰星)、金星(太白)、火星(炭惑)、木星(岁星)、土星(填星)的五大行星。在中国,经孔子删定的《诗经》中就有关于行星的描述。五星的完整名称至迟战国时期已经出现。在西亚地区,四千年以前就以它们运行的快慢视作距离远近而分类。水、金移动较快,距离最近,火星次之,木星再次,土星运动最慢因而距离最远。

长期观测会发现,行星在恒星中的运动有一定的规律和特点。

(一)行星都在黄道附近星空运动

五大行星在星空中运动的路线非常接近,只有水星稍微有些差别,但水星不易看到。五星在恒星间运行的平均路径就是黄道,中国古代就以黄道、赤道附近天域的亮星,分作十二次、二十八宿,用来描述它们的运动。这些取作标志的亮星,古代曾有不同的选择。大概到西汉,才逐渐固定下来。在西亚,巴比伦人很早就把黄道两旁各宽 8°.5 的地方,画出一条宽 17°的黄道带。日月五星都在这条带内运行。1781 年 F. W. 赫歇耳(Frederick William Herschel)发现的天王星,它的轨道面与黄道交角不足 1°。1846 年 U. J. J. 勒威耶(Urbain Jean Joseph Le Verrier)观测找到的海王星,轨道倾角不到 2°。天王星、海王星的运行也在黄道带内。只有 1930 年在海王星之外发现的冥王星,它的偏心率 e 和轨道交角 i 都很大($e=0.246, i=17°7'$),公转周期约为 250 年。九大行星中,仅冥王星,另外,在火星、木星之间运行的某些小行星,因轨道倾斜度大会走出黄道带去。巴比伦人并将黄道带沿周天分为 12 等份,称作黄道十二宫。用它描述日、月和五大行星的运行和位置。

(二)行星视运动有顺逆、疾徐和停留

追随某一行星一段时间,便会发现行星运动非常复杂。行星主要做自西向东运动,但速度有疾有徐。当慢到一定时候,会在星空中做短暂的停留。然后向相反方向(向西)移动,由快而慢。几个星期或几个月以后,再做短暂停留,又复向东运行。这种顺逆、疾徐、停留有一定规律和周期。往复一次的时间,天文上称作会合周期,其值由百余天到近八百天,五星各不相同。若将行星在星空的路径画在星图上,呈现为带有环圈(如金、水、火星)的蜿蜒形蛇行轨道。

(三)行星有不同的公转周期或恒星周期

行星在恒星间的主要运动方向是自西向东,称作顺行。各行星沿着恒星星空视运行一周的时间各不相同。水星、金星约为 1 年,火星不到 2 年,木星约 12 年,土星约 29.5 年。



有些天文、历法史论著中，把古书上记载的水星、金星(地内行星)行天一周的时间与现代天文学上说的恒星周期等同起来并进行比较。实际上这还是有些不同的。水金火木土五星、天王星、海王星、冥王星以及地球都围绕太阳公转，是太阳系的九大行星。它们公转一周的时间称作公转周期。从太阳上看，这个时间就是行星在恒星间行天一周所用的时间。故也把公转周期叫作恒星周期。行星绕日运动，只有顺行，没有逆行和停留现象。之所以行星视运动会出现逆、留，是因为我们是在地球上观测，看到的行星运行是地球运动和行星绕日运动的综合结果。例如，当行星与地球同处在太阳一侧时，我们看到的行星运动总是逆行的。下面我们将要介绍当内行星(水、金)下合时，外行星(火、木、土)冲时，由于地球和五大行星运行速度各不同，行星在星空背景上的运行就要出现逆行。地球上观测者看到的水星、金星在恒星间运行一周的时间平均说来为 1 年，与太阳上观测结果不同。在太阳上看，水星行天一周只需 88 日，金星只要 224.7 日，即它们的公转周期。古人不明日心理论，总把地球当作不动的中心。古书记载的水星、金星一年行天一周，一日行天一度是与天象相合的。我们进行观测或查看水星、金星星历表和黄经表也会得出同样的结论。对于外行星问题不大。由于古人、今人都只能在地球上观测，所以最好不要把水金二星行天一周与公转周期相提并论，而下古人观测比较粗疏的结论。

二、地心体系与日心体系

中国天文学家可能在战国时期已经认识到行星有逆行。开始可能还只注意到火星的逆行。大概到战国末期，才发现五星皆有逆行。太史公司马迁在《史记·天官书》中说，“故甘石历五星法，惟独荧惑有反逆行。余观史记，考行事，百年之中，五星无出而不反逆行。反逆行，尝盛大而变色，日月薄食，行南北有时，此其大度也”。但中国古人，似未曾努力对它做出应有的解释。在西方，大概在公元前 4 世纪，希腊哲学家柏拉图(Plato)提出同心球理论，经亚里士多德(Aristoteles)发展成一个总的同心球体系，把地球中心说系统化。他认为，地球不动位于同心球中心，从地球向外，依次为月、水、金、日、火、木、土星和恒星天。在他的宇宙模型中，天穹是中空球体。天球层总数达到 55 个，最外一层是恒星天。此外，在恒星天之外，又加了一个宗动天。这些球层被认为是像水晶球那样透明的，故被称之为水晶球理论。这个体系比较繁琐，又不能解释行星时亮时暗现象。约在 1 世纪后，古希腊天文学家阿波罗尼奥斯(Apollonius)提出了本轮均轮说。他不再使用水晶球而采用一系列本轮、均轮的圆圈。每个行星并不直接绕地球旋转，而是绕一个比较小的圆圈(叫作本轮)沿同一方向运动，本轮的圆心在环绕地球的大圆(均轮)上运行。行

星在本轮上一年走一周，而本轮中心沿均轮的运行时间为该行星的恒星周期。例如，对火星，便是 1 年又 10.5 月(约 687 天)。这样，由此模型很容易看出，地球、火星之间距离有相当大的变化。火星处在最近处，行星是逆行的。这只需假设它在本轮上的速度比中心在均轮上运行的速度大些即可得出。

困惑了几个世纪的行星运动的逆、留之谜，总算用本轮、均轮解开了。但这还不够，行星不仅运动有逆留、亮度有强弱变化，而且速度还有疾徐的差异。公元前，希腊天文学家喜帕恰斯(Hipparchus)提出了偏心圆运动，对这个问题做了解释。他认为，太阳五星以不变的速度做圆周运动，可是地球不在圆的中心，而是偏心的。这类轨道称作偏心圆。如此，从地球上看，太阳五星运动的速度就不是均匀的，而且距离也就有远有近了。不难证明，若太阳五星绕地做偏心圆的匀速运动，那么地球和圆心的距离就等于天体做椭圆运动情况下焦点距中心距离的两倍。

公元 2 世纪，托勒密(Ptolemaeus)将阿波罗尼奥斯和喜帕恰斯等希腊天文学家关于五星运动的理论加以系统整理并做了补充和论证，建立起完整的地心学理论。并于公元 130 年记录在他的名著《数学综合论》书中。这部书后人称为《天文学大成》，阿拉伯人叫它《至大论》。书共 13 卷，集当时天文学成就之大成。在文艺复兴之前，此书一直被奉作天文学的经典。所以后人也一直以托勒密为地球中心说的代表人物。

火、金二星的运动，又给古人出了另一个难题。何以这两颗行星总在太阳附近，且只能在黎明或黄昏才能被看见，而从未被人在半夜看到过。托勒密于是又不得不做了这样的假设：它们的本轮中心总是在连接日地的直线上面。这样，水、金的运动就与外行星出现了不同情况。水金本轮心在均轮上的运动每年一周，而它们在本轮上的周期却等于它们的恒星(公转)周期。因此，为了说明水金二星的运行，地心说的理论失掉了统一性，并且渗进了日心说的成分。

1543 年波兰天文学家哥白尼(Nicholas Copernicus)在弥留之际，出版了他的巨著《论天体的转动》(即《天体运行论》)。在书中他用数学方法详细论证了地球运动的问题。此书全部以地球和行星绕日运动为基础，建立了系统严密的日心体系。这本书是他一生的事业。

哥白尼日心体系的基本要点是：①所有行星都沿着圆形轨道绕太阳运动；②地球与其他五星一样，是太阳的一个行星，每年绕日公转一周，轨道平面就是黄道面；③地球每昼夜自转一周，自转与公转轴方向不同，自转轴与黄道面并不垂直，而是倾斜的。

在地心体系中，行星运动变得多么复杂。为了解释行星运动的顺逆和停留，有多少个行星就要有多少个均轮和本轮。此外，为说明运行有疾徐、远近，又要假设



日月五星运动是偏心的，或增加另外的次轮和小轮。在介绍清时宪历的著作中，作者将详细介绍这方面的情况。地心体系今天看来是不科学的。但做了这些假设可以解释行星的运动，并还可计算行星的位置，计算结果对于当时的肉眼观测也基本一致。所以，17 世纪前，地心说支配着当时的天文学。

在哥白尼日心理论中，各个行星和地球都是没有任何停留地沿同一方向绕日公转。行星视行的逆留及视轨迹描出的环圈，这只是我们从运动着的地球上所看到的现象而已。人们看到的行星运动，都是行星和地球绕日运动的综合结果。在所有的行星运动中都有一年的周期（在地心体系里外行星每年沿本轮旋转一周，内行星本轮心循均轮运动的周期为一年），这只是地球绕日公转运动的反映。只要假设行星公转速度距日越远越小，行星和地球相对于太阳位置时有变化。这样，行星视行有顺逆、停留，以及时远时近等问题都可迎刃而解了。哥白尼把地球当作一个行星，使它回到它真正的位置上去，于是太阳系就非常简单，解开了本轮均轮理论中纷乱无用的结子。

哥白尼学说也有它的局限性。他仍认为行星的运动是沿着圆周的等速运动。因此他虽然推翻了地心说核心的本轮，但它仍保留了许多小轮以解释行星运动中的一些比较小的不规则性。行星运动有疾徐，对于火、木、土三星，托勒密提出等距偏心轮的假设，对于水星金星，还又附加了一些更复杂的条件。在这个问题上，哥白尼沿袭了托勒密的偏心圆方法，不同的只是圆轨道围绕着的是太阳而不是地球。

哥白尼学说开始并未引起人们注意。许多天文学家都只把它当作编算行星星历表的一种方法。由于 G. 布鲁诺（Giordano Bruno）和伽利略（Galilei）的宣传，才引起教会的恐慌，于 1616 年罗马教廷把《天体运行论》列为禁书。经过 J. 开普勒（Johannes Kepler）、I. 牛顿（Isaac Newton）等人的工作，大约一个半世纪以后，日心说最终在 17 世纪占据了天文学的主导地位，开始了近代天文学的历程。

三、开普勒定律

德国天文学家 J. 开普勒是近代天文学的主要奠基者，古代天文学的发展是与星占学紧密联系在一起的。开普勒结束了这个时代。自此以后，天文学和星占学就彻底分家了。开普勒师从丹麦天文学家布拉赫 · 第谷（Brahe Tycho）。他根据第谷遗留给他的观测资料，细心地研究火星的运动。开普勒信奉哥白尼的理论，并赞同天体沿圆周运动的观点，因此他花费很多精力去探求火星的偏心圆轨道。直到 17 世纪初年才发现火星的轨道不是偏心圆，而是椭圆。1609 年，开普勒在他的名著《火星运行论》中，发表了关于行星绕日运动的两个重要定律。

第一律，行星的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二律，行星向径扫过的面积与时间成正比，即向径在相等的时间内扫过的面积相等。

由第二律，可以确定行星在轨道上任意点的速度。星距日越远，速度越小。只要知道椭圆的长短轴（或其一及偏心率），即可确定椭圆的形状和面积。这样就可由一、二两律，算出任何时刻行星在轨道上的位置。这样，行星的运动由这两条定律就可以解出来了。但他认为，行星之间的运动也有一定的关系，终于在1619年，他发现并刊布了行星运动的第三律。

第三律，行星公转周期的平方与它们椭圆轨道长轴的立方成正比。

若以 T_1、T_2 表示两行星的恒星周期，a_1、a_2 为它们椭圆轨道半长径，即有下列关系：

$$T_1^2/T_2^2=a_1^3/a_2^3$$

已知行星的恒星周期时，可以算出其轨道长轴。

1687 年，牛顿在其名著《自然哲学的数学原理》中宣布了一个更广泛的引力定律。由此得出，在引力作用下，天体轨道的形状除椭圆外，还有抛物线和双曲线。牛顿并且发现，维系行星作椭圆运动是来自太阳的引力。这个力就是万有引力。它作用于所有物体之间，而不仅限于天体之间。万有引力定律可这样陈述：质量为 N、m，距离为 r 的两个质点，互相有一种力在吸引对方，方向在质点连线上，大小与两质点质量成正比，而与其间距离平方成反比。

$$F=-k^2\frac{Nm}{r^2}$$

牛顿提出了引力定律以后，又用数学方法推出了行星绕太阳的运动定律。计算结果，牛顿得出了与开普勒由观测得到的同样的面积定律。由面积定律和能量守恒定律，在无其他外力作用的二体问题下，可以得出天体做椭圆运动的面积常数和活力公式，形式如下：

$$C^2=k^2(N+m)a(1-e^2)$$

$$v^2=k^2(N+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

k 为引力常数，a 为椭圆半长径，e 为偏心率，N、m 分别为二天体的质量，如 N 为太阳质量，m 为行星质量。v 为天体在与太阳中心的距离为 r 时的速度。C 为面积速度的两倍，名面积常数。

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=C$$

设 T 为行星绕日的公转周期，行星在一日内的平均运动为$n=2\pi/T$。令 M 为行星在$(t-t_0)$的时间内以平均运动的速度所走的角度，称作平近点角。于是有



$$M=n(t-t_0)=\frac{2\pi}{T}(t-t_0)$$

根据面积定律，向径扫过的椭圆面积与时间$(t-t_0)$成正比，整个椭圆面积为πab，b为椭圆半短径。则单位时间内扫过的椭圆分面积为$\pi ab/T$。椭圆偏心率与长短轴之间有下列关系：

$$偏心距(半焦距)=\sqrt{a^2-b^2}=ae$$

$$e=\sqrt{a^2-b^2}/a,\quad b^2=a^2(1-e^2)$$

C为面积速度(即单位时间扫过的椭圆分面积)的两倍。所以

$$C=2\pi ab/T=\frac{2\pi}{T}a^2\sqrt{1-e^2}=na^2\sqrt{1-e^2}$$

由

$$\begin{aligned}C^2&=k^2(N+m)a(1-e^2)\\&=(na^2\sqrt{1-e^2})^2\\&=\frac{4\pi^2}{T^2}a^4(1-e^2)\end{aligned}$$

得到

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=k^2(N+m)=n^2a^3$$

$$a^3/T^2(N+m)=k^2/4\pi^2$$

这是更准确化了的开普勒第三定律。

对于质量为m_1，半长径为a_1，公转周期为T_1的另一行星，同样可得出$\frac{a_1^3}{T_1^2(N+m_1)}=k^2/4\pi^2$，两式相除，可得：

$$\frac{T^2(N+m)}{T_1^2(N+m_1)}=\frac{a^3}{a_1^3}$$

这是第三定律的准确式子。它与观测相符合。如果忽略行星质量，即假设m、m_1为0，就有：

$$T^2/T_1^2=a^3/a_1^3$$

这就是开普勒第三定律。因为行星质量比起太阳来甚为微小，所以开普勒定律还是足够准确的。引力常数k的数值为：

$$k^2=4\pi^2a^3/T^2(N+m)$$

如a用天文单位表示，以太阳日表示T，用太阳质量表示$m(N=1)$，则引力常数称高斯常数。

$$k=0.017202\approx\frac{1}{58}$$

对于地球，$a=1$，$m\approx N/300000$，$k\approx n=2\pi/T$，即地球的平均周日行度，化为弧秒得 $k=3458''.19$。在物理学中常用 cgs(厘米，克，秒)单位，在这个系统里，$k^2=6.67\times10^{-8}=1/15000000$。即，两个各为 1 克的物体，相距 1 厘米时，彼此间的吸引力为 1/15000000 达因。

为计算行星在其轨道面上的位置，方便的办法是将行星的极坐标表示为偏近点角 u 的函数。以椭圆中心为圆心，以椭圆半长径 a 做圆，时间 t 行星在轨道上的位置，由其向径 r 和真近点角 v 的数值决定。v 是行星在近日点(t_0)时的向径与 t 时的向径 r 间的夹角。过行星所在位置做垂线与拱线正交。它和大辅助圆的交点与近日点之间的圆弧，或近日点与交点在圆心的张角，称偏近点角 u。半长径和半短径分别为 a、b 的椭圆，可看作是半径为 a 的圆在和圆平面成 γ 角的平面上的投影，即 $\cos\gamma=b/a$。在清代雍正癸卯元时宪历计算椭圆面积时常用到这个概念。现在，将行星位置由直角坐标表示：

$$x=a\cos u,\ y=b\sin u=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

而

$$r\cos v=x-ae=a(\cos u-e)$$

$$r\sin v=y=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

因而

$$r=a(1-e\cos u)$$

$$\cos v=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u},\quad \sin v=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}$$

因为



$$\cos v=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{v}{2}}=1-2\sin^2\frac{v}{2}=2\cos^2\frac{v}{2}-1$$

$$=\sin^2\frac{v}{2}+\cos^2\frac{v}{2}-2\sin^2\frac{v}{2}$$

$$=\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}$$

所以

$$r\left(\cos^2\frac{v}{2}-\sin^2\frac{v}{2}\right)=a(\cos u-e)$$

$$r\left(\cos^2\frac{v}{2}+\sin^2\frac{v}{2}\right)=a(1-e\cos u)$$

u 用类似处理后，两式相加相减，得：



$$r\cos^2\frac{v}{2}=a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}$$

$$r\sin^2\frac{v}{2}=a(1+e)\sin^2\frac{u}{2}$$

所以有

$$\mathrm{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{u}{2}$$

行星的真近点角 v 常常就从这个式子中求出。

上面已将行星坐标表为偏近点角 u 的函数，为了决定行星在 t 时的位置，须将 u 表示为 t 的函数。由面积定律有：

$$r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=C=na^2\sqrt{1-e^2}$$

可写成

$$r^2\mathrm{d}v=na^2\sqrt{1-e^2}\mathrm{d}t$$

将上面推出的真近点角表示式微分，得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\cos^2\frac{v}{2}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

由

$$r^2\cos^2\frac{v}{2}=a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}$$

$$r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

上式可写成：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\sqrt{1-e^2}\frac{a}{r}=\frac{\sin v}{\sin u}$$



由

$$r^2\mathrm{d}v=na^2\sqrt{1-e^2}\mathrm{d}t$$

$$r=a(1-e\cos u)$$

消去 v，得：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{na}{r}=\frac{n}{1-e\cos u}$$

积分这个已分离变数的微分方程，得：

$$u-e\sin u=n(t-t_0)=M$$

这就是有名的开普勒方程。它是 u 的连续上升函数，与 u 同时从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，显然它有一个根。已知 t、t_0 时，可解出偏近点角 u。t_0 为行星过近日点时刻。可用

逐次逼近法求解此式。

①先将 M 作为初值代入方程，求出 u 的第一近似值 u_1，即$u_1=M+e\sin M$；

②再将 u_1 代入方程，得出 $u_2=M+e\sin u_1$；

③再由 $u_3=M+e\sin u_2$，解出 u_3；

④继续类似做法，直到得出的 $u_n=u_{n-1}$ 为止。一般需做三五次。当 $u_n-u_{n-1}<10^{-6}$时，所得 u_n 即为所求的偏近点角 u 值。

将所得 u 值代入

$$r=a(1-e\cos u),\ \mathrm{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{u}{2}$$

得出向径 r 和真近点角 v。至此就可以得出行星在它的轨道平面上相对于太阳的位置。

对于一切椭圆轨道都可用逐次近似法求解 u。如果把 u、r、v 展开为偏心率的乘幂函数，这时展开式中的系数都是平近点角 M 的周期函数，因而是时间的函数。这一特点使得可以不必求解开普勒方程而来确定 r、v。对于许多应用提供很大方便。不难证明，通过偏近点角的傅利叶级数形式和面积定律、开普勒方程，可得到中心差$(v-M)$和$\frac{r}{a}$的展开式

$$v=M+\left(2e-\frac{e^3}{4}\right)\sin M+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4\right)\sin 2M$$
$$+\frac{13}{12}e^3\sin 3M+\frac{103}{96}e^4\sin 4M+\cdots$$

$$\frac{r}{a}=1+\frac{e^2}{2}-\left(e-\frac{3}{8}e^2\right)\cos M-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{3}e^4\right)\cos 2M$$
$$-\frac{3}{8}e^3\cos 3M-\frac{1}{3}e^4\cos 4M-\cdots$$

由此得到的 r、v 与解开普勒方程结果是一致的。

平近点角 $M=n(t-t_0)$，所以中心差 $v-M$ 的极大值出现在$\frac{dv}{dt}-n=0$ 的时候。由

$$r^2\frac{dv}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}$$

$$\frac{dv}{dM}=\frac{dv}{n\,dt}=\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$$

即发生于$\frac{dv}{dt}=n$，$r^2=a^2\sqrt{1-e^2}$，即 $r=a(1-e^2)^{1/4}$之时。由

$$r=a(1-e\cos u),\quad r\cos v=a(\cos u-e)$$



可求出当 $r^2=a^2\sqrt{1-e^2}$，即 $r=a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$ 时，

$$e\cos v_m=(1-e^2)^{3/4}-1$$

$$e\cos u_m=1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$$

由此式求出 u_m，再由开普勒方程得到 M_m，最后算出最大中心差 v_m-M_m。这样，所有在椭圆轨道上运行的行星和卫星，只要根据轨道偏心率，就可算出它们轨道运动中最大中心差数值。由 $\arccos v_m$ 的展开式可将 v_m 表示为 e 的展开式，同理可得到 u_m、M_m 及最大中心差 v_m-M_m 的展开式。

$$v_m=90°+\frac{3}{4}e+\frac{21}{128}e^3+\frac{3409}{40960}e^5+\frac{97875}{1835008}e^7+\cdots$$

$$v_m-M_m=2e+\frac{11}{48}e^3+\frac{599}{5120}e^5+\frac{17219}{229376}e^7+\cdots$$

轨道上 r 为极小和速度 v 为极大之点叫近日点，即圆锥曲线上最接近太阳的顶点。近日距是 $q=p/(1+e)$。对于椭圆运动，设 a、b 为轨道半长轴、半短轴，a 与参量 p、偏心率 e 的关系为 $a=p/(1-e^2)$。所以

$$q=\frac{p}{1+e}=\frac{a(1-e)(1+e)}{1+e}=a(1-e)。$$

开普勒方程 $u-e\sin u=M=n(t-t_0)$，当 $t=t_0$ 时，可看出相应的偏近点角 u 为 0。而

$$r=a(1-e\cos u)$$

当 u 为 0 时，$r=a-ae=a(1-e)=q$。此时 r 为最小值 q，即行星在近日点。故 t_0 为行星过近日点的时刻。

四、轨道根数和星历表的计算



行星都在黄道附近、黄道带内运行(冥王星稍远)，但它们的轨道面并不与黄道重合。为完全描述行星的运动，必须确定 6 个基本数值，此 6 个量称作行星的轨道根数。

因行星绕日公转，所以取太阳作为坐标原点，黄道面作为基本平面，春分点当作黄道面内的计量起点。这就是日心黄道坐标系。

从太阳上观测行星在星空的视运动，行星在星空走过的轨道不与黄道重合，轨道面与黄道面的交角称作轨道交角 i，轨道面与黄道面在天球上的两个交点，其中行星由黄道南进入黄道北经过者称升交点 N，以 Ω 表示升交点的黄经。知道了 i、Ω，行星轨道的位置便确定了。所以 i、Ω 为行星轨道的第一、第二个轨道根数。要确定行星椭圆轨道的形状，还需知道行星近日点的方向和轨道半长径及偏心率。设 p 为行星近日点的方向。近日点与升交点在轨道上的弧长叫作近日点的升交距

角，记作ω，是第三个轨道根数。以π来表示近日点的升交距角ω与升交点黄经Ω之和。π称作近日点黄经。$\pi=\omega+\Omega$，这是一段折弧。因为ω角的测量是在行星轨道上，Ω的量度是在黄道上。第四、第五个轨道根数就是椭圆偏心率e和半长轴a。这样，行星轨道的位置、形状、大小就完全确定了。由开普勒第三定律$n^2a^3=k^2(N+m)$，平均运动n或运行周期皆可由半长轴a算出来。而n要出现在平近点角M的计算中，所以有时也以n作为第五个轨道根数。为了确定t时的行星位置，应该知道某一次行星过近日点的时刻t_0或黄经位置，亦即历元时刻t_0或黄经L_0。这是第六个轨道根数。设M和υ分别表示平近点角与真近点角，即行星与近日点的平、真距角。行星的平黄经等于$\pi+M$，真黄经等于$\pi+\upsilon$。这两个角的计量与π的计量相同，一部分是在黄道，一部分是在行星轨道面上。平黄经$\pi+M$之值等于L_0+nt，即

$$\pi+M=L_0+nt,\quad M=L_0+nt-\pi$$

由开普勒方程或展开式，根据$L_0-\pi$、n、e及t，便可以决定向径r和真近点角υ。如此，行星的运动和位置就可完全决定了。

根据这6个轨道根数$(\Omega, i, \pi, e, a, t_0)$，可以计算任何时刻行星的位置。这项工作叫作星历表的计算。至于怎样依据观测得来的天体位置求出轨道的这6个根数，这是天体力学中的轨道计算和确定的问题，是更为困难的。一般由相近的三次观测得到的天体位置，可以计算求出这6个根数的近似值。求出初轨，以后再加以改正。这就是天文学常说的三次观测定轨道，通过几次观测确定轨道对于发现新的行星、小行星、彗星是非常重要的方法。

下面介绍计算星历表的过程。

（一）计算行星的日心球面坐标l、b

设t时行星在日心黄道坐标系中的黄经为l，黄纬为b。l是过行星的黄经圈与黄道的交点与春分点的距弧；黄纬b是沿黄经圈行星与黄道的距弧，向北为正。行星与升交点的距角为$\upsilon+\omega$，υ为真近点角，ω为近日点的升交角距。在由行星、升交点及过行星的黄经圈与黄道之交点组成的球面直角三角形中，可得出：

$$\sin b=\sin i\sin(\upsilon+\omega)$$

$$\cos b\cos(l-\Omega)=\cos(\upsilon+\omega)$$

$$\cos b\sin(l-\Omega)=\cos i\sin(\upsilon+\omega)$$

对于椭圆轨道，有：

$$r\cos\upsilon=a(\cos u-e),\ r\sin\upsilon=a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

式中的偏近点角u，可由开普勒方程求出。据前面介绍的方法，可得出r、υ。由υ及



轨道根数 i、ω、Ω，可由上式计算行星日心球面坐标 l、b。

(二)计算行星的日心直角坐标 x、y、z

日心直角坐标是这样选取的，以太阳为坐标系原点；x 轴指向春分点；y 轴在黄道平面上，从 x 轴沿行星运动方向（自西向东，反时钟向）旋转 90°；z 轴指向黄极。设行星的向径为 r，则它的日心直角坐标为：

$$x=r\cos b\cos l,y=r\cos b\sin l,z=r\sin b$$

它们可由前面得到的 r、b、l 求出。

(三)计算行星的地心直角坐标 ξ、η、ζ

通常我们所求的是行星的视位置，故需要把坐标原点平移到地球中心。

设在日心黄道坐标系中，用 x_0、y_0、z_0 和 r_0、l_0、b_0 分别表示地球的直角坐标和球坐标。它们之间的关系为：

$$x_0=r_0\cos l_0\cos b_0,y_0=r_0\sin l_0\cos b_0,z_0=r_0\sin b_0$$

设 ρ 为行星与地心的距离。根据坐标平移变换原理，行星的地心黄道直角坐标 ξ、η、ζ 与 x、y、z 的关系是：

$$\xi=x-x_0,\eta=y-y_0,\zeta=z-z_0$$

再设 $x_\odot$、$y_\odot$、$z_\odot$ 和 $r_\odot$、$l_\odot$、$b_\odot$ 表示太阳的地心黄道直角坐标和球坐标。由日地关系有

$$l_\odot=l_0+180^\circ,b_\odot=-b_0$$

所以

$$x_\odot=r_0\cos l_\odot\cos b_\odot=-x_0$$

$$y_\odot=r_0\sin l_\odot\cos b_\odot=-y_0$$

$$z_\odot=r_0\sin b_\odot=-z_0$$

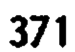
如此，上式可写成

$$\xi=x+x_\odot=x+r_0\cos l_\odot\cos b_\odot$$

$$\eta=y+y_\odot=y+r_0\sin l_\odot\cos b_\odot$$

$$\zeta=z+z_\odot=z+r_0\sin b_\odot$$

太阳的黄经 $l_\odot$、黄纬 $b_\odot$、矢径 $r_\odot$ 可由纽康表得出。由前面介绍的开普勒方程及 r、v 的解法及中心差 $v-M$、$\frac{r}{a}$ 的展开式中，代入地球轨道偏心率 e 及 t 时的平近点角 M，也可很方便地计算黄经和矢径。而太阳的黄纬 $b_\odot$ 很小，一般不超过 1″，故取作 0，这样很容易得出 $x_\odot$、$y_\odot$、$z_\odot$，从而得到 ξ、η、ζ。



(四)计算行星的视位置

行星的黄道地心球坐标(ρ、λ、β),在算出 ξ、η、ζ 后就很容易由下式得出:

$\xi=\rho\cos\lambda\cos\beta$,$\eta=\rho\sin\lambda\cos\beta$,$\zeta=\rho\sin\beta$。由上式可知:

$$\mathrm{tg}\lambda=\frac{\eta}{\xi}$$

$$\sin\beta=\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

得出地心黄经黄纬后,由下列黄道赤道坐标变换公式计算赤经 α、赤纬 δ。

$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda$$

$$\cos\delta\sin\alpha=-\sin\beta\sin\varepsilon+\cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

$$\sin\delta=\cos\varepsilon\sin\beta+\sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda$$

x、ξ 的符号为正,y、η 亦为正,则 l、λ 在第一象限;y、η 为负,l、λ 在第四象限;若 x、ξ 为负,y、η 亦为负,则 l、λ 在第三象限;y、η 为正,则 l、λ 在第二象限。b、β 与 z、ζ 同号。得到的 α、δ 经光行差、岁差、章动修正后,得出行星的视位置。

五、五星的地心运动

行星绕日一周的公转周期为恒星周期。对于地球上的观测者,内行星(水、金星)在恒星背景上行天一周所用的时间,与它们的公转周期并不相同。以地球为中心,地球和行星与地球和太阳连线之间的交角在黄道上的投影称为行星的距角。距角为零时,称作合。是时行星与太阳的黄经相等。行星按同一方向运动连续两次处于同一距角所经历的时间,叫作行星的会合周期。一般规定它为行星与地球连续两次日心合的时间间隔。由以上定义可知,行星在恒星间的平均运动 $n=2\pi/T$。T 即为公转或恒星周期。公转(恒星)周期 $T=360°/n$。以地球和行星的平均运动之差除 360°,就得出会合周期 θ,即:

$$\text{会合周期}\ \theta=\frac{360°}{|n'-n|}$$

其中 n' 为地球的平均运动(3548″.1928)。会合周期也可由会合运动方程得出,这一点我们以后介绍。

设 p、p' 分别表示行星和地球。它们与太阳的距离分别为 a、a',平均运动为 n、n',椭圆运动速度 v 为:

$$v^2=k^2(N+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$



前面由面积速度消去 C，得出过下式：

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}=n^2a^3=k^2(N+m)$$

则有

$$v=na\sqrt{\frac{2a-r}{r}}=na\sqrt{\frac{r'}{r}}$$

r'为椭圆轨道上对第二焦点的向径。$r+r'=2a$，这是椭圆的基本性质。当行星经过轨道的短轴两端时，$r'=r$，则 $v=na$。

由开普勒第三律 $n^2a^3=n'^2a'^3$，可写成 $na\sqrt{a}=n'a'\sqrt{a'}$，由此得出：

$$v'/v=n'a'/na=\sqrt{a}/\sqrt{a'}$$

即，两行星的线性速度比与其距离的平方根成反比。行星轨道越近地球，速度越接近，其会合周期就越长。所以金星火星的会合周期较长。

行星速度与距日平方成反比。距日越远速度越小。不同轨道行星的速度总是不同的。因此，当行星与地球同在太阳一侧相合时（日心合），行星的地心运动必然是逆行的。外行星冲时或内行星下合时就是这种情况。这时，行星的地心黄经每日变率可由下式求得：

$$\Delta_1\lambda=\frac{-na}{a-a'}\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}-1\right)$$

令

$$v/v'=\sqrt{a'/a}=q$$

则

$$\Delta_1\lambda=\frac{n}{q+q^2}$$

另一方面，当行星和地球分列太阳两侧时（日心冲），行星的相对运动总是自西向东顺行。因此，外行星处在合，内行星当上合时，行星一定是顺向运行。这时行星地心黄经的每日变率为：

$$\Delta_2\lambda=\frac{na}{a+a'}\left(\sqrt{\frac{a}{a'}}+1\right)=n\frac{1+q}{q+q^3}$$

行星的地心运动有时顺行有时逆行，交替之际，行星有一段时间好似不动，称作留。留时它的黄经适在相对的极大和极小之际。不难证明，当行星和地球的日心黄经差满足下式时，行星呈现留。

$$\pm\mathrm{tg}(L'_s-L_s)=\frac{q-1}{q}\sqrt{1+q^2}$$

由于留时，$L'-L$ 角的数值可由此式算出，因而容易推出逆行总共经历的时间为：

$$T_s = 2\frac{L'_s - L_s}{|n' - n|}$$

还可证明，在留时内行星与太阳的距角及外行星与太阳距角之余角 l_s，可由下式得出：

$$\pm \operatorname{tg} l_s = \frac{a'}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a'}{a}}} = \frac{q^2}{\sqrt{1+q^2}}$$

以逆行期间地球日心黄经改变的弧长 nT_s 减 $2l_s$ 弧得逆行弧，为两个留点之间的地心黄经差，即：

$$逆行弧 = 2l_s - nT_s$$

对于内行星这段弧内包括一个下合，对外行星则含一次冲。逆行弧长即为行星在天球上视轨迹所描述的环圈的平均幅度。表 5－16 提供五星及地球公元 2000 年的轨道根数，最大中心差及对应的真、平近点角和向径值，以及它们的平均运动、公转、会合周期，与地球的速度比。表 5－17 记载五星冲、合时地心黄经的每日变率 $\Delta_1\lambda$、$\Delta_2\lambda$ 和留时的 $L'_s - L_s$，与太阳距角 l_s（外行星与太阳距角的余角）及逆行时间和逆行弧长。

表 5－16　五星地球轨道特征根数（2000）速度周期

	a	e	$i(°)$	$\pi(°)$	$\Omega(°)$	$(v-M)_m$	v_m
水星	0.3871	0.2056	7.0050	77.4561	48.3309	23°41′	98°55′
金星	0.7233	0.0068	3.3947	131.5637	76.6799	0°47′	90°18′
地球	1.0000	0.0167	0.0000	102.9373		1°55′	90°43′
火星	1.5237	0.0934	1.8497	336.0602	49.5581	10°42′	94°1′
木星	5.2026	0.0485	1.3033	14.3313	100.4644	5°32′	92°5′
土星	9.5550	0.0555	2.4889	93.0568	113.6655	6°24′	92°24′
	M_n	r_n/a	n'	v km/sec	$\frac{v}{v'}=\sqrt{\frac{a'}{a}}=q$	T（日）	θ（日）
水星	75°14′	0.98926	14732.4	47.89	0.6222	87.969	115.88
金星	89°31′	0.99999	5767.7	35.03	0.8505	224.701	583.92
地球	88°48′	0.99993	3548.2	29.79	1.0000	365.256	
火星	83°19′	0.99782	1886.5	24.13	1.2344	689.980	779.94
木星	86°32′	0.99942	299.13	13.06	2.2809	4332.59	398.88
土星	86°00′	0.99922	120.45	9.64	3.0911	10759.2	379.09





表 5—17　五星逆行、留平均数值

	下合	上合				
	$\Delta_1\lambda$	$\Delta_2\lambda$	L'_s-L_s	l_s	逆行弧	逆行期(日)
水星	−3516″	+6669″	35°34′	18°12′	13°49′	22.9
金星	−2254″	+4480″	13°0′	28°51′	16°9′	42.2
	冲	合				
火星	−1286″	+2545″	16°47′	136°12′	15°57′	72.7
木星	−474″	+823″	54°26′	115°35′	9°58′	120.6
土星	−281″	+445″	65°32′	108°46′	6°47′	137.7

内行星距太阳比地球近，从地球上看，内行星在轨道上任何位置，它与太阳的距角都超不过某一定范围。如不考虑行星轨道的偏心率和倾角，最大距角发生在日星地组成直角三角形时。行星和地球与行星和太阳连线成直角，从地球看此时星日间的张角最大，称作大距。在太阳东为东大距，在西称西大距。设 L、L' 为星与地的日心黄经，则大距时有：

$$\cos(L'_g-L_g)=a'/a=q^2$$

大距即星日之间最大的角距，为 $L'-L$ 的余角。中间为下合的东西大距之间所经历的时间为 $2\,\frac{L'_g-L_g}{n'-n}$。由此得出，水星大距时距日 22°46′，大距间的间距为 43.3 日；金星大距时与日角距为46°20′，东西大距相隔 141.7 日。由于轨道之偏心率，实际上水星大距最大可达 27°.8，金星可达 47°.8。在远日点大距时，角距要大于平均值。由于水星偏心率较大，这种情况尤为明显。反之，若大距发生于近日点时，行星与太阳的角距要小于平均值。

外行星距太阳比地球远，因而它的地心运动与内行星不同。在一个会合周期内，距角可从 0°到 360°。当距角成 90°时称为方照。从地球看，行星对于太阳位在西方称西方照；行星位于太阳东方叫东方照。行星在方照时，行星上的观测者看见地球在大距。地球和太阳与地球和行星的连线成直角。因此可用下列公式去求地球与行星的日心黄经差：

$$\cos(L'_g-L_g)=1/q^2$$

中间有同一冲的西东两方照之间所经历的时间则为 $2\,\frac{L'_g-L_g}{n'-n}$。这段时间对于接近地球的行星很长，到了距离为 5 天文单位的天体为极小，然后缓慢增加。当半长轴无限增长时，达到半年(182.6 日)为其极限。由此得出，火星方照时，地球与行

星的日心黄经差为 48°59′，西东两方照的平均间隔为 212.2 日；木星相应的日心黄经差为 78°55′，平均间隔是 174.9 日；土星则分别为 84°00′和 176.4 日。这里列出的只是平均值，由于偏心率和倾角，实际数字可能相差很大，特别是在偏心率显著的火星，情况更是如此。

现在简单介绍内行星的地心运动。距角为 0 时，即太阳、行星的地心黄经相等时称作合。星、地分在太阳两侧者，叫上合；星在日地之间者，称下合。内行星一个会合周期内有一次上合，一次下合。上合后，水星平均 36 日，金星平均约 220 日到达东大距。合时，星光为日光所淹没看不到。内行星运行较地球快，合以后行星走到太阳之东。几天后，在太阳落山后，它出现在西方天空，为昏星。大距后，水星平均约 11 日、金星约 51 日，地心运动停止顺行，出现留。留后水星大约逆行 11 日、金星逆行 21 日，星与日下合，又看不到了。下合后相同的现象循逆向发展，即经过留及西大距，此时行星于黎明前晨见东方，为晨星。最后再回到上合，完成一个会合周期。

火、木、土地外行星的地心运动情况如下：行星的地心黄经与太阳相等时，与太阳相合，因而不能看见。这时星、地分居太阳两侧。外行星距日较地球为远，合后，它偏离太阳，落在太阳之西，因而呈现晨见东方。以后，与太阳的距角日益加大。当距角达 90°时，行星处在西方照。这时星在夜半出东地平，地方时卯时中天。顺行速度逐渐减慢，而后停止顺行，呈现留。留后行星逆行而到达冲。冲时地球位于星日之间。冲后，相同现象循逆向发展。开始仍为逆行，渐减慢、停止而至留，再顺行到东方照。此时行星于酉时中天，上半夜可见。最后与日又一次相合，完成一个会合周期。

行星的地心运动，是由于地球与行星绕日公转的综合结果。再考虑到行星的轨道倾角，所以行星在恒星背景上的视行便是一种蜿蜒的环圈式的（内行星多呈此状）或呈现为之字形的蛇行轨道。其环圈和摺曲幅度即为逆行弧，前后转折点，即为留点。

在一个会合周期里行星在星空行天一周以上的只有火星。木星、土星两冲之间在黄道上经过的弧不长。它们的平均值为：火星 408°.7；木星 33°.1；土星 12°.7。

火星轨道偏心率很大，一般不能根据它的会合周期去预推其地心运动的各种动态的准确日期。



第七节 步五星术

一、基本法数

四分历步五星先计算行星与日相合时刻所在的月日和星度，然后根据动态表求出行星在某一时刻所处会合运动中与太阳、地球的相对位置和对应的黄道、赤道星度。对每一行星给出会合运动的各项基本数据及在一会合周期内顺逆、留伏、疾徐各类视行动态的时段和行度。

术文对五星会合运动的基本法数的组成及相互关系做了说明。行星与日同宿同度谓之相合。连续两次合日的时间间隔为一会合周期，古历称作一合、一终、合终。将会合周期的日数与一岁的日数（周天之度数）通分相约，得周率和日率。于是有：

$$周率\times会合周期日=日率\times周天度$$

对于火、木、土星这个关系是对的。四分历将水金二星的会合周期一分为二：上合至下合、下合至上合皆称一合。对于水星、金星关系为：

$$周率\times\frac{1}{2}会合周期=日率\times周天度$$

周率、日率确定后，其他法数皆可由此得出。

$$月法=章法\ 19\times周率$$

$$章月\times日率/月法=积月+月余/月法$$

以章法19除章月235，为一年的月数。因此上式显然为火、木、土三星会合周期所当的月及分数，即以月表示的会合周期长度。亦为水星、金星半会合周期（上合至下合或下合至上合）的月数。

$$[朔策(29\frac{499}{940})\times积月/60]_R=朔大余+\frac{朔小余}{940}$$

$$日度法=日法\ 4\times周率$$

$$虚分=蔀月\ 940-朔小余$$

$$\frac{蔀日\ 27759\times月余+月法\times朔小余}{章法\ 19\times章月\ 235\times日度法}=入月日+\frac{日余}{日度法}$$

$$\frac{周天\ 1461}{日度法}\times(日率-周率)=积度+\frac{度余}{日度法}$$

五星日率相约取其公倍数得2999162158026300，为五星同时与日相合之时。可视作五星会合的太极上元或计算起点。以上得出的周率、日率，合积月、月余，月法，星合月朔大余、小余、虚分，入月日、日余，日度法，积度、度余等为四分历五星推步

的基本法数。

二、推五星合日术

(1)推星合年：

$$距元年\times周率/日率=积合+合余/日率$$

合余小于周率，星合其年；以周率除合余，得数为所求年前冬至距其前星合之年数。得1，星合其前一年；得2，星合其前二年。五星中只有火星，其会合周期为780日，大于2年，会出现星合其前二年的情况。木星、土星有时星合其前一年。金星会合周期583.92日，但古历水、金二星合日周期一分为二，以其二合(上合至下合、下合至上合)为一终。天正冬至前之合总在当年。内行星(水、金)上合时星为顺行，星行较日为速，合后星居日东，日没后星见西方，为昏星；下合时内行星视运动为逆行，合后日在星东，日出前星见东方，为晨星。四分历五星运动以合日起算，内行星从上合开始(夕合)。故术文说，"金、水积合奇为晨，偶为夕"。所求年天正冬至后之星合，与天正冬至相距为度分，"其不满周率者反减之，余为度分"。即，度分＝周率－合余。

(2)推星合月：

$$小积=合积月(法数)\times积合$$

$$\frac{月余(法数)\times积合}{月法(法数)}=N+\frac{月余}{月法}$$

$$积月=小积+N$$

$$入纪月=[积月/纪月\ 18800]_R$$

积月满纪月去之，余为入纪月。



$$\frac{入纪月\times章闰\ 7}{章月\ 235}=闰月+\frac{闰余}{章月}$$

$$[(入纪月-闰月)/12]_R=入岁月数$$

从天正十一月起计数入岁月数，十一月不计入，所得即星合所在月。闰余为224～231者，星合闰月。

(3)推星合月朔日大小余：

$$\frac{蔀日\ 27759\times入纪月}{蔀月\ 940}=积日+\frac{小余}{蔀月}$$

$$星合月朔日大余=[积日/60]_R$$

得数，依干支序数从甲子数起(甲子不计)，为星合月朔日干支。

(4)星合入月日：

$$\frac{蔀日\ 27759\times月余+月法(法数)\times朔小余}{章法\ 19\times章月\ 235\times日度法(法数)}=入月日\ \frac{日余}{日度法}$$



自朔日(朔日不计)计数入月日,所得为星合日。

(5)推合度:

$$\frac{\text{周天 }1461\times\text{度分}}{\text{日度法(法数)}}=\text{积度}\frac{\text{度余}}{\text{日度法}}$$

从斗 $21\frac{1}{4}$度计数积度,算外(斗 21 度不计),得数为星合所在度。

(6)求星合岁天正冬至日:

距元年减 1,满 80 除去之,余 n,以没数 21 乘之,满日法 4 得 1,为大余,不尽为小余。以甲子命大余,则星合数天正冬至日也。即:

$[(\text{距元年}-1)/80]_R=n$

$n\times 21/4=\text{大余}+\text{小余}/4$

大余满 60,去之。自甲子数起,甲子不计,所得为天正冬至日干支及小余。

(7)求至后星合日数:

$$\text{至后星合日数}=\frac{\text{周天 }1461\times\text{度分}}{\text{日度法(法数)}}+\text{冬至小余}$$

为所求年天正冬至子夜与其后星合相距的时日。上式去冬至小余,为冬至与其后星合之时距。

以上(6)、(7)两步为计算星合的又一种方法,须与第 1 步推星合年配合使用。推星合年得出所求年天正冬至前之星合,(6)、(7)计算天正冬至后之星合。配合使用时,后者距元年须减 1。所得结果两法完全相同。

(8)求后合所在月:

$$\text{合积月(法数)}+\text{入岁月数}+\frac{\text{月余(法数)}+\text{月余}}{\text{月法(法数)}}$$

$$=\text{后合月数}+\text{余数}/\text{月法}$$

由前合入岁月数及月余加一个会合周期(合积月及月余)即得后合月数。依前法计数,得后合所在月。其中有闰月须计入。内行星(水、金)二合为一终,其合积月和月余法数为一合(上合至下合或下合至上合,半个会合周期)之数。故由上式所得之后合月,前合为晨合者后合为夕合;前合为夕合者加后为晨合。

(9)求后合月朔日:

前合朔日大小余加法数大余、小余即得。因合日不一定在朔日,一合之月为合积月与月余之和。法数大、小余乃积月乘朔策去 60 之余。如前合月余加法数月余满一月,则大余另加 29,小余加 499,即有:

$$\text{后合朔日大、小余}=\text{前合大余}+\text{法数大余}+\frac{\text{前合小余}+\text{法数小余}}{\text{蔀月 }940}$$

若前合月余加法数月余之和大于月法,则:

后合朔日大小余

$$=前合大余+法数大余+29+\frac{前合小余+法数小余+499}{蔀月\ 940}$$

小余满蔀月 940,进位为大余。大余自甲子计数,甲子不计入,所得即后合月朔日干支。

(10)求后合入月日:

后合入月日

=前合入月日+入月日(法数)+(前合入月日日余+日余法数)/日度法

前合月朔小余大于虚分(法数)者,因后合朔日已进一日,故空(少)加一日,所得日满朔策时先去 29,后合月朔小余不足 499 者,又减 1 日。入月日自朔计数,朔不计入,所得即后合日。

(11)求后合宿度:

后合宿度=前合所在度+积度(法数)+(前合度余+度余法数)/日度法

三、五星会合周期内视运动

火、木、土三颗外行星,在会合周期(一终)内的视运动大致相似。合日时与日同经,同升同落,看不见,称作伏。星行迟于日,伏后星在日西十余度,晨见东方。顺行若干日,与日距离拉远;速度减慢而留;留后逆行过冲(与日相距 180°),复留;留后顺行,星在日东,太阳逐渐追上行星,夕伏西方,而再次合日。即:

合一晨伏一晨星一顺行一顺迟一

留一逆行一留一顺行一夕伏一合

内行星(水、金)一终为两合,视运动动态为:

下合一晨伏一晨星一逆行一留一顺一晨伏一上合

上合一夕伏一昏星一顺行一留一逆一夕伏一下合

以木星为例,它在会合周期内的视运动和行度如下:

合日,晨伏 16 日 7320.5 分,行 2 度 13811 分,在日后(西),而见东方。

太阳日行 1 度,伏 $16\frac{7320.5}{17308}$日,日行 $16\frac{7320.5}{17308}$度,星行$2\frac{13811}{17308}$度。日星行度相减,得星在日西 13 度 10817.5 分($13\frac{10817.5}{17308}$度)。

见顺,星日行 11/58 度,58 日行 11 度。

太阳 58 日行 58 度,加前行 16 度许,日共行 $74\frac{7320.5}{17308}$度。星 58 天行 11 度,加前行 2 度许,共行 $13\frac{13811}{17308}$度。日星行度相减知星在日西 $60\frac{10817.5}{17308}$度。



微迟，星日行 9 分，58 日行 9 度（度 58 分）。

这一段日比星多行 49 度。加其前两段多行之值，日在星东 109 $\frac{10817.5}{17308}$度。

留不行，25 日。星留不行，而日行 25 度。留后星在日西 134 度 10817.5 分（以 17308 为分母）。

旋逆，星日行 1/7 度，84 日退 12 度，复留 25 日。

逆、留段太阳共行 109 度，而星退 12 度。这一进一退日星又拉大差距 121 度。加前面伏、顺、迟、留日星距度，得日在星前255 $\frac{10817.5}{17308}$度。

复顺，58 日行 9 度，又 58 日行 11 度，在日前 13 度有奇，而夕伏西方。

此顺段分顺迟和顺疾两部分，星共行 20 度，而日行 116 度。日比星多行 96 度。加前积日星距度，得 351 $\frac{10817.5}{17308}$度。为日在星西、星在日前 13 度 10817.5 分（$365\frac{4327}{17308}-351\frac{10817.5}{17308}=13\frac{10817.5}{17308}$）。此时，星光为日光所淹，而夕伏西方。

除伏逆，一见 366 日，行 28 度。

自星见至夕伏，历经顺 58 日 11 度，迟 58 日 9 度，留 25 日，逆 84 日，退 12 度，留 25 日，复顺 58 日 9 度及 58 日 11 度，共历 366 天，星行 28 度。

伏复 16 日 7320.5 分，行 2 度 13811 分而与日合。凡一终，398 日又 14641 分，行星 33 度 10314 分，通率日行 398/4725 度。

晨与夕伏各 16 $\frac{7320.5}{17308}$日，星各行 2 $\frac{13811}{17308}$度，共长 32 $\frac{14641}{17308}$日，行 5 $\frac{10314}{17308}$度。加一见日数和行度，得一终（会合周期）长398 $\frac{14641}{17308}$日，行星 33 $\frac{10314}{17308}$度。通之，将一终日数和行星化为日分和度分，分别得出一终日分为 6903225，一终星行度分 581478，两数相约得 1461 为周天数。以约一终日分得 4725 为法，以约星行积分得 398 为实，实不满法，以法命之，得星日行 398/4725 度。即以一终日数除一终行星所得之商（或以一终积日分除一终行星积度分）。以通率日行除全天度数 365.25 度，得以日表示的行星的恒星周期。

其他四星（水、金、火、土）与此类似，不赘述。根据五星动态和行度，就可得到任何时刻五星的视运动情况和位置。星合之时，星日同度。如由前面的介绍，即可求得木星每日的动态和星度。这个推步过程四分历称作“步术”。方法如下：

（1）求星见日度：

晨见日＝星合日、余＋晨伏日、余

星晨见度＝星合所在度分＋伏行度分

(2)求各动态星度：

因在会合周期内，行星视行速度不同。四分历用不同的分母表示各动态段的行分，顺段星度当加、逆段需减。为方便分数加减，需要通分。伏段星行度分五星皆以各自日度法表示。要和其后各行段星行度分相加减，将日度法为分母改成以行段度分值为分母的星见度分，有：行段分母表示的星见度分＝行分母×见度分/日度法，所得度分在半日度法以上进1，已下舍之。当顺段，日加所行分，满行段分母得1度。行段顺逆、疾徐度法不同(分母不一)，采用和上式类似的方法通分，即：当行之母表示的星见度分＝当行之母×故分/故母。如星当逆行段，则以逆行段之分母为当行之母，此前顺段之母为故母，其前不足故母的度分为故分。如此，就将以故母为分母表示的度分(故分)，换成以当行之母表示的新度分了。计算星所在度分，留段时仍承前顺行度分，至逆行段则须减之。这样，就可得出行星在任一动态段中的星度。伏时，因星不可见，故通常不注明伏段星的宿度。星所在度以斗 $21\frac{1}{4}$度命度。此$\frac{1}{4}$度亦按上法通分而减。计算中度分如有按上述方法舍入(损益)者，应前后照应，消长折衷。按四分历二十八宿赤道宿度满宿度者去之，至不满，得星所在赤道宿度。依黄赤道宿度进加退减，得星所在黄道宿度。

四、四分历推五星合日计算实例

以木星为例，用四分历方法计算自元和二年至永元四年8年间木星合日的时刻和所在宿度。每次合日都用推星合所在月日及推星合在天正冬至后的日数两种方法计算。推算依据前面介绍的方法和公式。推步程序和结果列于表5－18。

计算表明，两种方法推算的结果完全一致。先推算天正冬至，再求天正冬至后星合日数的方法更简单一些。

为了考查四分历步五星术的合天情况，我们用现代天文方法计算了其时木星真实的合日时刻和位置。结果也列于表5－18中。四分历推得的星合日期和所在星度，按表列二十八宿赤道、黄道宿度得出的为赤道宿度和极黄经宿度。极黄经与黄经距度对于距黄道较远的星宿差别较大。表中为了比较极黄经已做了改正。四分历计算的星合日期与实合平均相差6.28日。星合位置平均约有8°.16的偏离。四分历给出的冬至点的赤道，黄道位置约大3°。平合位置是根据冬至在斗 $21\frac{1}{4}$度(赤道度)和斗$19\frac{1}{4}$(黄道度)推得的。考虑到这一点，四分历得出的星合位置实际上平均约有5°.35的误差。



表 5－18　元和二年(85)至永元四年(92)木星合日时刻和所在宿度

纪年	元和二年	元和三年	元和四年	章和二年	永元元年	永元二年	永元三年	永元四年
距元	9365	9366	9367	9368	9369	9370	9371	9372
积合	8576	8577	8577	8578	8579	8580	8581	8582
合余星合	755 当年	357 当年	4684 去年	4286 当年	3888 当年	3490 当年	3092 当年	2694 当年
小积	111488	111501		111514	111527	111540	111553	111566
N	4340	4340		4341	4341	4342	4342	4343
月余	8636	50242		9635	51241	10634	52240	11633
积月	115828	115841		115855	115868	115882	115895	115909
入纪月	3028	3041		3055	3068	3082	3095	3109
闰，闰余	90 46	90 137		91 0	91 91	91 189	92 45	92 143
入岁月数	10	11		0	1	3	3	5
星合月	九月	十月		十一月	十二月	二月	二月	四月
合朔大小余	19 392	43 299		36 705	0 612	54 78	17 925	11 391
儒日	1752030	1752414		1752827	1753211	1753625	1754008	1754422
入月日	3.519	18.365		4.211	19.057	3.903	19.749	4.595
后合月余数	23 50242	25 9635		13 51241	15 10634	16 52240	17 11633	18 53239
$\frac{距元-1}{80}$	$117\frac{4}{80}$	$117\frac{5}{80}$		$117\frac{7}{80}$	$117\frac{8}{80}$	$117\frac{9}{80}$	$117\frac{10}{80}$	$117\frac{11}{80}$
冬至大小余	21.00	26.25	31.50	36.75	42.00	47.25	52.50	57.75
儒日	1751732	1752097		1752827	1753193	1753558	1753923	1754288
度分	3572	3970		41	439	837	1235	1633
至后星合日数	301.5191	335.1150		3.4609	37.0568	70.6527	104.2486	137.8445
星合儒日	1752033.519	1752432.365		1752831.211	1753230.057	1753628.903	1754027.749	1754426.595
星合干支	丙戌	乙丑		甲辰	癸未	辛酉	庚子	己卯
时刻	51.9 刻	36.5 刻		21.1 刻	5.7 刻	90.3 刻	74.9 刻	59.5 刻
儒略历	84.10.21	85.11.24		86.12.28	88.1.31	89.3.4	90.4.7	91.5.11
实合儒略历	84.10.15	85.11.15		86.12.17	88.1.21	89.2.25	90.4.4	91.5.11
儒略日	1752027.618	1752423.668		1752821.102	1753220.519	1753621.969	1754024.569	1754426.970
相差(日)	5.901	8.697		10.109	9.538	6.934	3.180	－0.375
星赤道宿度	氐 11.52	箕 2.11		斗 24.71	危 2.06	壁 2.65	娄 11.25	毕 7.84
黄道宿度	氐 9.52	尾 17.11		斗 22.71	危 4.06	壁 3.65	娄 10.25	毕 4.84
极黄经	208°.1	241°.55		275°.42	308°.07	341°.0	13°.72	47°.43
实合黄经	200°.89	232°.15		265°.00	299°.70	335°.89	12°.44	48°.08
相差	7°.20	14°.25		10°.90	11°.06	10°.28	5°.00	－1°.54

第六章　魏晋南北朝历法

第一节　乾象历

一、减少斗分

乾象历是一部优秀历法，东汉灵帝时，泰山蒙阴人刘洪所献。为创制乾象历，刘洪考查日月进退、出入及古今历日十余年。乾象历有所创建和突破，较三统、四分为优。

太初历冬至日在牵牛初度。四分历于元和二年至永元元年测候5年，得冬至日在斗$21\frac{1}{4}$度，不及太初历5度。古历规定太阳日行1度，岁而周天。每岁长365日有余。为计算太阳所在宿度方便起见，将岁实的奇零部分放在冬至日所在的星宿，其他二十七宿的距度皆为整数。自四分历冬至在斗，始称此奇零为斗分。刘洪考验天官和日月运行十余载，领悟四分于天疏阔，皆因斗分太大之故。于是更以589为纪法，145为斗分。这样。乾象历岁实(回归年)为：

$$岁实=\frac{周天215130}{纪法589}=365\frac{145}{589}日=365.24618日$$

东汉末年，真实的回归年长为365.2423032日，四分历岁实365.25日，每岁后天0.0077日。乾象历岁实虽仍大0.003877日，但已较四分大为改进。乾象历称589为纪法，仍用19年7闰的章法。得1纪为31章、7285个月，为纪月。周天和纪月可为5公约，得43026和1457，分别称作通法和日法。纪31章，31称为通数。故

$$朔望月长=\frac{章岁\times周天}{章月\times纪法}=\frac{周天}{纪月}=\frac{通法}{日法}=29.53054221日$$

3世纪初年(东汉末叶)，朔望月实长29.53058533日。乾象历朔实较天为短，小0.00004312日。而四分历朔实29.530851064日；较天长0.00026573日。可见，乾象历岁实、朔实比四分历都要精确得多。

1纪589年、7285月、215130日，年月日都为整数。以60去纪法，余49。故岁名干支一纪后移49位。纪日215130以60除，余30。两纪后，日数可为60整除，



朔望、节气日期干支皆可复原。故刘洪以两纪 1178 年为乾法。取太初历元丁丑岁为近距之元。又上加太初元(前 104)12 纪(7068 年)之己丑岁(前 7172)为日月五星交会之上元。所以,晋书律历志记乾象历上元己丑以来,至建安十一年(206)丙戌,岁积 7378 年。己丑算上。太初历以元封七年岁前天正甲子朔旦冬至为元。乾象历二纪后朔旦冬至复起甲子,一纪之后朔旦冬至乃在甲午。故以二纪为乾法,称内纪、外纪。内纪以甲子为纪首,外纪以甲午为首日。太初历元为乾象历 13 纪内纪甲子首日,建安十一年丙戌入甲子内纪 310 年。乾象历推步首算入纪。方法是,置上元积年(上元己丑计入),以乾法 1178 除之,不满乾法之年,如小于纪法 589,则为入内纪甲子之年;如大于纪法则去之,为入外纪甲午纪首年数。如乾象历始行之吴大帝黄武二年(223),距元 7395 年,以乾法除之,得 6 余 327,327 不满纪法 589,为入内纪甲子 327 年。

二、过周分和近点月

太阳在恒星背景上运行一周 360°的时间叫恒星年 T,其平均运动(每日平行度)以 n 表示,故 $T=360°/n$。月亮从恒星间某点出发行天一周的时间称恒星月 S,月亮相对于恒星的平均运动(每日平行度)用 n'表示,则有 $S=360°/n'$。日月同经,谓之合朔。连续两次日月相合的时间间隔为朔望月 M。日月合朔以后,太阳以速度 n,月亮以速度 n'同向运动。月速日徐,当月亮运行一周天回到出发的恒星位置时,太阳已前行了一段距离。当月亮再次赶上太阳,所经历的时间为朔望月。所以它的长度为 $M=360°/(n'-n)$。此式可改写成:

$$\frac{1}{M}=\frac{n'}{360°}-\frac{n}{360°}=\frac{1}{\frac{360°}{n'}}-\frac{1}{\frac{360°}{n}}=\frac{1}{S}-\frac{1}{T}$$



称作会合运动方程。以后将严格地推导它。

恒星年 T 是视太阳从星空某一点出发,运行一周,又回到星空原出发点的时间间隔。太阳的平均运动 n 为 3548″.1928。由 $T=360°/n=1296000/3548.1928$,得出恒星年 T 为 365.256364 日。反映四时寒暑变化的回归年长是视太阳中心连续两次经过春分点的平均时距。由于地轴进动,春分点在恒星间慢慢地向西移动。每年西行约 50″.25。春分点的这种运动叫作岁差。每日春分点西移 0″.1376,称作周日岁差,春分点运动方向与视太阳相反。由上面讨论知,回归年 E 长度为:

$$E=\frac{360°}{n+\text{周日岁差 }0''.1376}$$

$$=\frac{1296000}{3548''.1928+0''.1376}$$

$$=365.2422\text{ 日}$$

月球循椭圆轨道绕地球公转。由于太阳的摄动，月球轨道长轴在不停地做顺向转动，近地点持续地向东移动。近地点对于恒星的平均运动 μ 为 400″.9167，因此近地点的转动周期 θ 为：

$$\theta=\frac{360^\circ}{\mu}=\frac{1296000''}{400''.9167}=3232.5917\ \text{日}$$

$$=8.850543\ \text{年}=8\ \text{年}\ 310.6541\ \text{日}$$

近地点与月亮做同向运动，类似前面朔望月的讨论，可知月亮两次过近点所历的时间为：

$$\text{近点月}=360^\circ/(n'-\mu)$$

月亮对于恒星的平均运动 n' 为 47434″.8907，所以

$$\text{朔望月}=\frac{360^\circ}{n'-n}$$

$$=\frac{1296000''}{47434''.8907-3548''.1928}$$

$$=29.53058813\ \text{日}$$

$$\text{恒星月}=\frac{360^\circ}{n'}=\frac{1296000''}{47434''.8907}$$

$$=27.32166093\ \text{日}$$

$$\text{近点月}=\frac{360^\circ}{n'-\mu}$$

$$=\frac{1296000''}{47434''.8907-400''.9167}$$

$$=27.55455025\ \text{日}$$

以上得出的都为现代数值，古代稍有出入。

月球在椭圆轨道上运动有快有慢。在近地点时运行最速，在远地点最缓。这一点东汉的天文学家已经发现。《续汉书·律历志》记载永元四年(92)“贾逵论历”中说，“月行当有迟疾，不必在牵牛、东井、娄、角之间，又非所谓朓、侧匿，乃由月所行道远近、出入所生。率一月移故所疾处三度，九岁九道一复。”明确指出月行轨道有远近，从而速度有疾徐，过近地点时最疾，过一近点月，近点前移 3 度，转动周期为 9 年。

根据上面介绍，“九岁九道一复”，相当于近地点对于恒星的平均运动速度为：

$$\mu=\frac{365.25}{9\times365.25}=\frac{1}{9}\text{度}$$

$$=0.1111111\ \text{度}$$

$$=0^\circ.1095152=394''.2546$$



从而可知近点月相应的长度是

$$近点月=\frac{365.25}{13.36842105-0.1111111}$$
$$=27.55083812\text{ 日}$$

这相当于近地点每月东行 3.061204 度或 3°.0172349。

刘洪乾象历给出比贾逵论历更为准确的近点月长度和近地点平均运动数值。刘洪称一近点月月亮近地点东移的数值为过周分，叫近点月长为历日数。由“月行三道术”术文，有：

$$过周分=(会数+天地凡数)\times余率^2/会数$$

$$历日数=(过周分+周天)/月周$$

乾象历采用太初历元为内纪甲子元。有些法数也沿用之。式中，会数 47，周天 215130，天地凡数 55(取自易经系辞)，余率 29，月周 7874，代入后

$$过周分=(47+55)\times29^2/47$$
$$=1825\frac{7}{47}=1825.148936$$

$$历日数=\left(215130+1825\frac{7}{47}\right)/7874$$
$$=27.55335902\text{ 日}$$

历日数即近点月，以周日法 5969 除历周亦可得出。

$$近点月=\frac{历周\ 164466}{周日法\ 5969}=27\frac{3303}{5969}=27.55335902\text{ 日}$$

其中余数 3303，称周日分，以减周日法 5969，得周虚 2666。

以纪法除周天得周天度，则度法为 589 分。

将会合运动方程，两端各乘以 T，得：

$$\frac{T}{S}=\frac{T}{M}+1$$

汉人不识岁差，太初、四分、乾象诸历皆以太阳日行 1 度，岁行周天。视回归年 E 为恒星年 T，其值等于周天度。所以上式变成：

$$\frac{周天度}{恒星月}=\frac{回归年}{朔望月}+1$$

因为恒星月 $S=周天度/n'$，故以恒星月除周天度，即得前面说的月亮平均运动 n'(月每日平行度)。

$$回归年/朔望月=章月/章岁=235/19$$

所以

$$月每日平行度=章月/章岁+1$$

$$=\frac{235}{19}+1=\frac{254}{19}=\frac{小周\ 254}{章岁\ 19}=13\,\frac{7}{19}度$$

因

小周×通法＝月周

章岁×通法＝纪法

故

月每日平行度＝月周/纪法

即

月每日平行分＝月周 7874

日每日平行分＝纪法 589

周天分 215130。

因

$$近点月＝周天分/(月每日平行分-\mu)=\frac{215130}{(7874-\mu)}$$

$7874\times$近点月$-\mu\times$近点月＝7874 近点月－过周分

μ 为近地点的平均运动(每日平行)，$\mu\times$近点月为一近点月近点东移之值，即过周分。由

7874×近点月－过周分＝215130

知道近点月，可得出过周分；晓得过周分，可求出近点月。乾象历有：

$$近点月=\frac{历周}{周日法}=\frac{164466}{5969}=27.55335902\ 日$$

故

$$过周分=7874\times27.55335902-215130$$
$$=1825.1489=1825\,\frac{7}{47}$$

过周分化为度(度 589 分)，得近地点每月(近点月)东移 3.098724849 度(3°.0541)。

近点月(历日数)＝(215130＋过周分)/7874(月周)

这就是"月行三道术"给出的近点月计算式。式中，代入历日数＝历周 164466/周日法 5969，可得出 $\mu=66.24052$ 分，以 589 除之，化为度，$\mu=0.11246$ 度。化为 360°制，得 $\mu=0^\circ.110847=399''.05$。

由此看出，刘洪给出的近点月和近地点东移平均运动 μ 值，比贾逵论历给出值有很大提高，与现代测得数值已相去不远了。



三、月行迟疾与定朔计算

乾象历首次将月行迟疾引入历法计算。并创制月离表为后代历法所效法。月离表给出月亮在一个近点月中每日的实际行度、行分，及每日月亮实位置与平位置的差数。根据它可以计算任意时刻月亮的实际位置，并由月亮平实位置之差，改正月亮与日相合，得到定朔时刻。定朔定望的计算，提高了日食月食预报精度，中国历法推步从此进入一个新的历史时期。

月离表是计算月所在度分及定朔望时刻的基础。乾象历月离表由下列五栏数值组成。

日转度分，为一个近点月内月亮每日实行度分，自近地点开始。

列衰，次日与本日月实行分之差。由近地点至远地点半周，月速由快至平而慢，远地点为月速最小之处。此半周速度减慢为退段；由远地点至近地点半周，月速由慢而平至快，为进段。退段、进段各以中点速度为平。近地点至平，列衰为退减；平至远地点列衰为退加。远地点至平列衰为进减；平至近地点列衰为进加。其加减实际上是由下栏损益率的绝对值确定的。

损益率，为每日月实行与平行分之差值。退段（近地点至远地点半周）实行分大于平行分为益，反之为损；进段（远地点至近地点半周）实行分小于平行分为益，实行大于平行为损。

盈缩积，其前各日损益率的累计值。退段，实月总在平月之前，为盈；远地点至近地点半周（进段），实月常居平月之后，为缩。

月行分，将每日第一栏月亮的实行度，按度 19 分，所化的月实行分。

关于各栏的损益、盈缩、加减符号的含义和其间关系，第七章中将做详细讨论。

乾象历计算定朔方法如下。

(1)推求平朔

$$\frac{\text{入纪年}\times\text{章月 }235}{\text{章岁 }19}=\text{定积月}\frac{\text{闰余}}{19}$$

闰余大于 12，是岁有闰。

假积日＝定积月×通法 43026

假积日/日法 1457＝定积日＋小余/日法

所求年天正月平朔大余＝$[\text{定积日}/60]_R$

以 60 去积日，所余为天正平朔大余。以所入纪首干支计数，纪首干支不计，即得所求年天正月平朔干支。递加朔望月得各月平朔大小余。

(2)推合朔入历（平朔在近点月中的位置）

以上元积月乘朔行大小分，小分满通数 31 从大分，大分满历周 164466 去之，

余满周日法 5969 得 1 日，不尽为日余。日余命算外即得。

$$朔行大小分=半小周\times\frac{通法}{通数}-历周=11801\frac{25}{31}$$

代入各法数得朔行大分 11801，小分 25。日法 1457，周日法 5969，可为会数 47 整除，分别得到通数 31 和半小周 127。所以朔行大小分实际上是以周日法分表示的朔望月与近点月的分数差。即：

$$\frac{朔行大小分\ 11801\frac{25}{31}}{周日法\ 5969}=朔望月-近点月$$

乾象历上元为甲子朔旦冬至齐同，又为日月交会、五星合日、月在最卑(近地点)的时刻。因此根据上述术文即可得出所求合朔入历日数。

$$上元积月\times小分/31=N+余分/31$$

$$合朔入历日+\frac{日余}{5969}=\frac{\left[\frac{上元积月\times朔行大分+N}{历周\ 164466}\right]_R}{周法\ 5969}$$

一般可用

$$\frac{\left[\frac{上元积月\times朔行大小分\ 11801\frac{25}{31}}{历周\ 164466}\right]_R}{周法}=合朔入历日\frac{日余}{5969}$$

算出。所得日数即合朔入近点月日数及日余。

依次递加 $1\frac{5832\frac{25}{31}}{5969}$ 日，得各月入历日及余。以周日法除朔行大小余 $\left[\frac{11801\frac{25}{31}}{5969}\right]$ 即得 $1\frac{5832\frac{25}{31}}{5969}$ 日。

(3)求定朔大小余

由所得合朔入历日查月离表，得到该日的月行分、盈缩积和损益率。再由下式计算加时盈缩和差法，以修正平朔大小余。

$$加时盈缩=入历盈缩积\times通周\ 185039$$
$$\pm日余分\times通数\ 31\times损益率$$

$$差法=(月行分-章岁\ 19)\times周半\ 127$$

$$定朔大小余=平朔大小余\pm\frac{加时盈缩}{差法}$$

盈减缩加。由于

$$通周\ 185039=周半\ 127\times日法\ 1457$$



$=$通数 31×周日法 5969

差法=(月行分－章岁)×通周/日法

加时盈缩=入历盈缩积×通周

$\pm\frac{\text{日余分}}{\text{周日法}}\times$通周×损益率

定朔大小余=平朔大小余

$$\pm\frac{\text{入历盈缩积}\pm\frac{\text{日余分}}{\text{周日法}}\times\text{损益率}}{\text{月行分}-\text{章岁}}\times\text{日法}$$

日余分/周日法为入历日的小数部分,章岁为太阳的日平行分。由此得出,经过月亮迟疾运动改正的定朔日期、时刻。由上式可看出"加时盈缩",由月离表盈缩积线性内插得出。刘洪用线性内插方法计算月亮迟疾运动的改正。

计算定弦、定望方法与此相同。

乾象历谓,"月经四表,出入三道,交错分天,以月周(7874)除之,为历之日。"称月行三道,中道即黄道;内道为阴历,月入黄道北;外道月行黄道南,为阳历。以月亮相对于恒星的平均运动 n' 除周天为恒星月。以章岁为度分,月平均运动为小周254;以纪法为度分,月平均运动为月周 7874。以纪法 589 为度分表示的周天是 215130 分。以月周除周天分,为历之日,此"历之日"即恒星月。故

$$\text{恒星月}=\frac{\text{周天}}{\text{月周}}=27\frac{2532}{7874}=27.32156464\text{ 日}$$

乾象历首次在历法中给出月入阴阳历的数表。表中列半个恒星月 $13\frac{5203}{7874}$ 日中,每日月亮距黄道的度分,称作兼数。这个角度是沿着过天极、月亮的大圆(赤经圈)量度的。因与沿黄经圈测得的黄纬不同,学者称之为极黄纬。表中并列出相邻两日兼数之差"损益率"及损益率之差"衰"值。利用此表及线性内插法可以求出任何日时的兼数——月亮的极黄纬值。



刘洪不仅给出月亮每日极黄纬的数值,并首次引进交食的食限概念和大小。日月合望如发生在食限之内,为入食限,有可能出现交食。月行三道。月亮在交点月中的位置如在前限之前、后限以后时月行中道——黄道。朔望时月行中道则可能有交食发生。乾象历在月行阴阳历表中首次给出了前限和后限的数值。

前限 $1\frac{1290\frac{457}{2209}}{7874}$ 日;后限 $12\frac{3912\frac{1752}{2209}}{7874}$ 日。月周 7874 为月每日平行分,即平均运动 n'。前限加后限为 $13\frac{5203}{7874}$ 日,正好是半个恒星月。

$$前限+后限=\frac{1}{2}\times 27\frac{2532}{7874}$$

$$=13\frac{5203}{7874}$$

$$=\frac{历周\ 107565}{月周\ 7874}$$

$$前限=\frac{1}{2}恒星月-后限$$

兼数表示月行黄道南北而距黄道的度数，是因为月行轨道与黄道不在一个平面的缘故。黄道面与月轨面约有 5°9′的交角。两面相交为一直线，此线在天球所指的两点称作黄道、月道（白道）的交点。月由黄道南（外道、阳历）进入黄道北（内道、阴历）所经过的那个交点叫升交点，与它相对的称作降交点。在升降交点正中间，月亮离开黄道最远，这时兼数最大。显然，在升、降交点，兼数为 0。所以，兼数大小是随月亮在轨道上距交点远近而异的。

由于日、地、月三者中心不在同一平面，因此太阳对月球的摄动力就在轨道面的正交方向有一个法向分量。由它的作用，月球的交点不停地沿黄道向西移动，即逆着月亮本身的运动方向。经精密计算和测定，得出月球交点对于恒星的平均运动 v 为 $-190''.7717$。负号表示它与月亮轨道运动方向相反。由前面介绍可知，月亮交点的旋转周期为 $\frac{360°}{190''.7717}=\frac{1296000''}{190''.7717}=6793.46$ 日（18.6 年）。

朔望发生在月亮交点附近时，日地月近乎在一条直线上。这时就会出现日月食现象。朔望时日月距交点越近，发生交食的机会越多；距交点超出某一数值就不会出现交食。所以食限也是由日月距交得出的。月亮从升交点出发向东运行，又回到升交点的时距称作交点月；太阳连续两次过升交点所历时间叫食年。因交点运行方向与日月相反，由前面介绍的方法知：

$$食年=\frac{360°}{n-v}=\frac{1296000''}{3548''.1928+190''.7717}=346.62003\ 日$$

$$交点月=\frac{360°}{n'-v}=\frac{1296000''}{47434''.8907+190''.7717}=27.21222\ 日$$

而

$$恒星月=\frac{360°}{n'}=\frac{1296000''}{47434''.8907}=27.321661\ 日$$

恒星月是月亮行天一周所需的时间。因交点向西移动，好像是迎着月亮而行。所以月亮连续两次经过同一交点的时间比恒星月来得短一些。

乾象历推月食，以 47 章为 1 会，会岁 893，会月 11045，会率 1882。一会 893 岁



有 1882 食。每食$\frac{11045}{1882}$月，即 5 $\frac{1635}{1882}$。朔望合数 941，为会率之半，乃 1 会 47 章日行交周之数。故乾象历交周为：

$$交周(食年)=\frac{会月\ 11045}{朔望合数\ 941}=11\frac{1388}{1882}月=346.61513\ 日$$

由

$$食年=\frac{周天度\ 215130}{日平行度+交点日西移度}=\frac{215130}{589+v}$$

代入乾象历食年值，得：

$$589\times 食年+食年\times v=215130$$

$$食年\times v=215130-204156.3124=10973.6876$$

$$v=31.65957457=0.0537514\ 度$$

可得到乾象历交点月为：

$$交点月=\frac{215130}{(7874+31.6596)}=27.21215074\ 日$$

四分历交周(食年)为 11 $\frac{17}{23}$月(346.6665116 日)，乾象历精度有了较大的提高。但乾象历不知交点月。兼数、食限(前限、后限)由恒星月得出。虽恒星月、交点月相差不大，但天文意义不明确，是乾象历美中不足之处。

乾象历朔合分 18328 $\frac{914}{2209}$，由下式得出：

$$朔合分=周天\ 215130\times\frac{朔望合\ 941}{会月\ 11045}=18328\frac{914}{2209}$$

$$\frac{塑合分}{月周}=\frac{18328\frac{914}{2209}}{7874}=2\ \frac{2580\frac{914}{2209}}{7874}$$

$$=2\times 前限=2\times 1\ \frac{1290\frac{457}{2209}}{7874}日$$

$$朔合分\times\frac{11045}{941}=18328\frac{914}{2209}\times\frac{11045}{941}=215130$$

两端各以月周除之，得：

$$\frac{朔合分}{月周}\times\frac{11045}{941}=\frac{18328\frac{914}{2209}}{7874}\times\frac{11045}{941}=\frac{215130}{7874}(恒星月)$$

$$2\times 前限\times 2\times 5\frac{1635}{1882}=恒星月=27.32156464\ 日$$

根据前面讨论，月亮极黄纬(兼数)、食限应该由交点、交点月推算。前已得出乾象

历交点月应为 27.21215074 日。故

$$\text{朔交行分}/\text{月周}\ 7874\times\text{交周}\frac{11045}{941}=\text{交点月}$$

$$\frac{\text{朔交行分}}{\text{月周}}=\frac{\text{交点月}\ 27.21215074}{\text{交周}\ 11.73751328}=2.318391476\ \text{日}$$

$$\text{交点月}+\frac{\text{朔交行分}}{\text{月周}\ 7874}(2.318391476)$$

$$=\text{朔望月}=29.53054222\ \text{日}$$

推朔入阴阳历与推合朔入近点月历日成为完全类似的计算。并且朔交行分与朔行分也具有完全类似的天文意义。

$$\text{近点月}\ 27.553359+\frac{\text{朔行分}}{\text{周日法}}\left[1\frac{5832\frac{25}{31}}{5969}\right]=29.5305422\ \text{日}$$

于是，可仿照计算月入近点月历日，得出推朔入阴阳历方法。

以会月去上元积月，余以朔交行日分乘之，得数满交点月去之，其余不满半交点月者，为入阳历；满去之，余为入阴历。所余日数为合朔入历，不尽为日余。

累加朔交行 2.318391476 日，得各月入历，满半交点月去之，阴历入阳历，阳历入阴历。

也可直接以上元积月乘朔交行日，满交点月去之，余在半月以下入阳历，以上去半月，入阴历。

入历在前限前、后限后者为月行中道。

乾象历减少斗分，得到较精密的回归年、朔望月长度；给出过周分、近点月数值；首次将月行迟疾引入历法，创作月离表及定朔、定望计算法，使历法推步迈上了一个新的台阶；提出月行阴阳、出入三道、兼数、前限、后限等新概念和计算方法。总之，乾象历创法很多，确为“后代推步之师表”。

献帝建安元年(196)，郑玄受其法，以为穷幽极微，又加注释。吴中书令阚泽受刘洪乾象法于东莱徐岳，又加解注。两注今皆不存。吴中常侍王蕃以洪术精妙，用推浑天之理，以制仪象及论。三国孙吴用乾象历，自大帝黄武二年(223)，直至吴亡(280)。

第二节　景初历

三国时期，孙吴施行乾象历，蜀汉沿用四分历。魏文帝初用四分历。至明帝景初元年(237)，尚书郎杨伟造景初历。表上，帝遂改正朔，颁行之，直到魏亡。晋代魏，武帝泰始元年(265)，因魏之景初历，改名泰始历。景初日中晷影，即用后汉四



分法，是以渐就乖差，其推五星，则甚疏阔。晋江左以来(317 年以后)，更用乾象五星法以代之。两晋一直行用景初，无所改作。北魏太祖天兴初(398)，命太史令晁崇修浑仪以观星象，仍用景初历，至太平真君十二年(451)。文成帝兴安元年(452)以赵畋所修玄始历，以代景初。420 年六月，宋王刘裕代晋，是为宋武帝。改泰始历为永和历继续沿用，至元嘉二十二年(445)诏行元嘉历为止。景初历自景初元年(237)，历代行用，至宋元嘉二十一年(444)、北魏太平真君十二年(451)，前后共行用 215 年。

杨伟推考天路，稽之前典，验之以食朔，查知四分历行至汉末，日食率常在晦。皆因斗分太多，故先密后疏而不可用。景初历测定斗分，推定纪法，采用的岁实、朔策较四分为优，与乾象历相近。其数如下：

$$朔策=\frac{通数\ 134630}{日法\ 4559}=29\frac{2419}{4559}=29.53059882\ 日$$

$$岁实=\frac{周天\ 673150}{纪法\ 1843}=360\frac{9670}{1843}=365\frac{455}{1843}=365.24688\ 日$$

其朔策较密，因保留 19 岁 7 闰 235 月的章法，岁实(回归年)的数值稍大。

景初历以 1843 年为一纪，当 97 章。22795 月为一纪之月(97×235)，纪日 673150，纪日去 60，余 10。一纪之后，纪首日名干支移动 10 位，故以 6 纪 11058 年为一元。元为朔旦冬至及纪日干支复原的周期。景初历以公元前 3809 年壬辰岁为历元。壬辰元至景初元年丁巳岁(237)积 4046 年，壬辰岁计入，此元以天正建子黄钟之月为历首。元首之岁，夜半甲子朔旦冬至。但壬辰历元并非日月交会、月居最卑之时。因此景初历给出壬辰元及 6 纪纪首至朔齐同夜半时的交会与迟疾的差率数值。这是与其前三统、四分及乾象诸历相异之处。

$$景初历近点月=\frac{周通\ 125621}{日法\ 4559}=27\frac{2528}{4559}=27.55450757\ 日$$

会通 790110 犹会月，通数 134630 如乾象历会率，朔望合数为会率之半，乃会月交周之数。

以通数除会通得 $5\frac{116960}{134630}$月而 1 食。

$$\begin{aligned}交周(食年)&=\frac{会通\ 790110}{朔望合数\ 67315}\\&=11\frac{49645}{67315}日\\&=\frac{会通}{朔望合数}\times\frac{通数}{日法}\\&=\frac{会通}{朔望合数}\times 2\times\frac{朔望合数}{日法}\end{aligned}$$

$$=2\times\frac{会通}{日法}=2\times173\frac{1403}{4559}日$$

$$=346\frac{2806}{4559}日$$

$$=346.6154858522\ 日$$

$$一交(半食年)=\frac{会通}{通数}=5\frac{11696}{13463}月=\frac{会通}{日法}=173\frac{1403}{4559}日$$

会通＝朔望合数 67315＋入交限数 722795

两端各以日法除之，得：

$$\frac{会通}{日法}=\frac{朔望合数}{日法}+\frac{入交限数}{日法}$$

$$半食年=173\frac{1403}{4559}=14\frac{3489}{4559}+158\frac{2473}{4559}日$$

景初历不识岁差，日每日平行 1 度，1 岁日数即周天度数。因此，以日法(度法)表示的朔望合数和入交限数就分别是景初历交食的前限和后限。朔望去交分，如朔望合数以下，入交限数以上者，朔则交会，望则月食。

景初历 6 纪纪首日名、交会、迟疾差率为：

甲子纪第一　纪首合朔，月在日道里(北)

交会差率 412919　　迟疾差率 103947

甲戌纪第二　纪首合朔，月在日道里(北)

交会差率 516529　　迟疾差率 73767

甲申纪第三　纪首合朔，月在日道里(北)

交会差率 620139　　迟疾差率 43587

甲午纪第四　纪首合朔，月在日道里(北)

交会差率 723749　　迟疾差率 13407

甲辰纪第五　纪首合朔，月在日道表(南)

交会差率 37249　　迟疾差率 108848

甲寅纪第六　纪首合朔，月在日道表(南)

交会差率 140859　　迟疾差率 78668

上面说过，一交周(食年)有两交，每交日数为会通/日法，173.307743 日。交会差率为会通的分数，因元首不在日月交会故其数不为零。如壬辰元首(即甲子纪第一纪首)甲子日朔旦冬至子夜，交会差率 412919，以日法 4559 除，得 $90\frac{2609}{4559}$ 日(90.572275 日)。这表示壬辰元甲子朔旦冬至夜半在交点后 90.572275 日。经过一纪之后，到达甲戌纪第二纪首，甲戌冬至朔旦夜半时，交会差率 516529，以日法除之，得 $113\frac{1362}{4559}$



(113.29875)日。为甲戌纪首距其前交点的日数。由上列数据看出,每纪后交点差率递增 103610 分,此数称作交会纪差。以日法除,得 $22\frac{3312}{4559}$(22.7264751 日)。即每纪后,纪首距交点增加 22.726475 日(度)。当纪首交差递增大于会通 790110 时,表示月距原交点超过半交周,去之。于是月由日道里(北)而至日道表(黄道南),余数以日法除,为距新交点之度(日)。

一纪 22795 月(673150 日)不是交周(食年)或交(半食年)的整数倍。以半食年除纪日(周天)所得的交数及余数,其余数即为交会纪差。由交数奇偶可知一纪后月所在黄道的表里。具体计算如下:

$$纪月\times\frac{通数}{会通}=22795\times134630/790110=3884\ \frac{103610}{790110}$$

$$交会纪差=[纪月\times通数/会通]_R=103610$$

一纪有 3884 交(食)及余数 103610。3884 交为 1942 交周(食年),故一纪后月在黄道表里同前,但入交分增加交会纪差之值。入交分满会通去之,月在黄道表里易位。

迟疾差率表示纪首时月入近点月的日数。如甲子纪首迟疾差率 103947。说明甲子冬至朔旦夜半距其前近地点 103947/日法 4559 = $22\frac{3649}{4559}$日 = 22.8003948 日。一纪后,甲戌纪首,迟疾差率 73767,表示甲戌纪首夜半入历(距其前近地点) $16\frac{823}{4559}$(16.180522)日。每纪迟疾差率递减 30180 分,此值称作迟疾纪差。

$$\begin{aligned}迟疾纪差&=通周-[纪月\times通数/通周]_R\\&=125621-[22795\times134630/125621]_R\\&=30180\end{aligned}$$

由近点月长除纪日 673150,得一纪有 $24429\frac{95441}{125621}$近点月(转周),即有 24429 个近点月又 95441 余分。近点月长(通周)125621 分,一纪比 24430 个近点月少 30180 分。一纪有多少个近点月由下式得出:

$$纪月\times通数/通周=24429\ \frac{95441}{125621}转周$$

每纪后月所处近点月的位置都要后退 30180 分,或 $6\frac{2826}{4559}$日(6.61987278 日)。以之转减前纪,则得次纪月亮入转。不足减时,加通周(125621)或近点月($27\frac{2528}{4559}$日或 27.55450757 日)减之。

景初历有明确的去交度分和交食食限概念。首次引入以入交限数计算交食的

方法。推交会月食，以去交15度为法，论亏食多少；以及计算日月食亏食方位等，也都是景初历的创新。

景初历推合朔、交会、月食术情况如下。

(1)推朔积月

积年/纪法＝入纪次第＋入纪年/纪法

入纪年×章月/章岁＝积月＋闰余/19

闰余12以上，其年有闰，闰月以无中气为准。

(2)推朔日

朔积分＝通数×积月

朔积分/日法＝积日＋小余/日法

天正朔大余＝$[积日/60]_R$

以60去积日，余为大余。大余以纪名数起，纪名不计，得天正十一月朔干支，加$14\frac{3489}{4559}$日得望。

(3)求朔望去交度分及合朔交会月食

天正合朔去交度分

＝$[(人纪朔积分＋纪下交会差率值)/会通]_R$

次朔去交度分

＝$[(天正朔去交度分＋通数)/会通]_R$

月望去交度分

＝$[(其月合朔去交度分＋朔望合数67315)/会通790110]_R$

朔望去交分，如小于朔望合数，或大于入交限数(722795)，朔则交会，望则月食。

(4)推合朔交会月食月在日道表里

$$入交周分＝\left[\frac{朔积分＋人纪下交会差率}{2×会通}\right]_R$$

所得余数即入交周分。如不满会通，则天正合朔月所在随所入纪首表里。若大于会通，天正合朔月所在与所入纪首表里易位。

(5)求去交度及食分

去交在朔望合数以下，则

去交度分＝去交分/日法

去交在入交限数以上，则

去交度分＝(会通－去交分)/日法

食分，以15为法。去交度大于15度，交而不食；去交度10以下肯定有食；



10～15，亏食微小仅光影相及。合望正在交点者去交度为零，全食。

景初历月离表每日月行迟疾度分及月行分与乾象历略有增损。因而损益率、盈缩积分数值稍有不同。二十八宿赤道宿度，除减少斗分外皆同后汉四分历，为西汉所测，直至唐大衍历方始改易。没有列出黄道宿度。晷漏表除无黄道进退数外，全沿后汉四分历之旧，而无所变更。

五星的基本推步法数，乾象、景初大致皆依四分。斗分为乾象所增，景初因之，其值为：

五星斗分＝斗分 455×五星合终合数

四分历五星会合运动给出通率日行数值。五星的恒星周期 T，可由

恒星周期 T＝周天/通率日行

得出。乾象历、景初历没有给出通率日行。但可由一终日数及所行星度推出。计算景初历五星日行、会合、恒星周期结果列于表 6－1 中。

表 6－1　景初历五星参数

	通率日行	恒星周期(日)		会合周期(日)	
		景初	今值	景初	今值
木星	0.08446	4324.381	4332.59	398.942	398.88
火星	0.53222	686.266	686.98	780.815	779.94
土星	0.03398	10747.520	10759.2	378.096	378.09
金星				584.088	583.92
水星				115.873	115.88

除土星外，景初历五星运动不及四分历准确，也较乾象历逊色。

乾象历推合朔用日法，推迟疾用月法，推月入三道阴阳历用月法，各异其法。景初历步朔望、交会、入转皆用日法，用法简约。此李淳风麟德历总法之所本。其岁实稍逊于乾象，但朔策较之为优。景初壬辰元首不为日月交会，月过最卑之时，各纪首日皆有交会、迟疾差数，此又为统天历诸差、授时历各应的源头。景初历之创法，尤以交食推步为其代表。阴阳、去交皆以交点入算，给出前限、后限数值，以去交 15 度为法，论亏食多少，以及关于日月食亏起的方位讨论等，皆为后世历家所效法。

第三节　元嘉历和大明历

420 年，刘裕代晋，国号宋，史称刘宋。刘宋初行景初历。宋文帝元嘉二十年

(443),诏令于宋二十二年(445),普用元嘉历。直到宋顺帝禅位于齐、宋亡(479)。齐沿用24年,亡于梁(502)。梁代齐后仍循行元嘉历8年,共行65年。梁天监九年(510)颁行大明历。梁、陈两朝一直行用大明历,至陈亡(589),凡80年。元嘉历为何承天所撰修,大明历系祖冲之创制。两历为南朝施行的主要历法。

一、元嘉历

何承天自幼随其舅习天文历数。他的舅舅晋秘书监徐广素善其事。自永和年间(345～356)至太元(376～396)之末,观天四十多年,并记录下日月五星的运动。此后,何承天继续观测,“比岁考校,至今又四十载”。故对七曜运行,离合去来,其疏密差会,皆有新的认识。俟元嘉二十年(443)献元嘉历,何承天上表称“自昔幼年,颇好历数,耽情注意,迄于白首”。是年已74岁高龄。所以,元嘉历是继承前贤并依据观测制订出来的。

经过两汉、魏晋多年的观测积累,中国天文历法的历理和推步在东晋、十六国时期出现了一些突破。其一是东晋初年会稽人虞喜发觉冬至日躔有每岁渐差,因分天周与岁周而立岁差之法。太阳一回归年所行度数,不足周天之度,所差就是岁差。虞喜认为冬至日所在“五十年退一度”。自此,历法中天自为天,岁自为岁。其二,后秦姚兴时,当刘宋孝武太元九年(384),岁在甲申,天水姜岌造三纪甲子元历,首创以月食检日宿度所在,为历术者宗焉。并首次提出冬至日在斗17度近天之说。其三,北凉沮渠蒙逊玄始元年(412)颁行赵𢾺玄始历。第一次在历术中采用章岁600,章月7421,章闰221的新闰率,始破19年7闰235月的旧章法。岁实、朔策数有奇零,不能公约。19个回归年与235个朔望的长度非常接近。至今农历的闰月安排还大致遵循19年7闰的章法。这个闰率自古六历以来,一直为历法沿用。但235个朔望月比19回归年稍长。严格计算可知19个回归年约当234.9970616个朔望月。所以三统、四分、乾象、景初诸历按19岁235月章法很难得出合天的岁实朔策。如景初历朔策比较合天,但囿于19岁7闰章法,所得岁实就要稍大于天。若测得合天的岁实,依据旧章法,朔望月必小于天。依天,回归年长约当12.3682765个朔望月。按19岁235月章法,得12.36842105月。据赵𢾺章岁600,章月7421,章闰221,每岁为12.3683333月。显然玄始历于天接近。

何承天根据《尚书・尧典》四仲中星的记载,尧时“日永星火,以正仲夏”,元嘉时季夏火中;尧时“宵中星虚,以殷仲秋”,元嘉时季秋虚中。尧宋相距2700余年,以中星考查,已相差二十七八度。故认为冬至日躔约百年退1度。他又根据月食检日所在宿度,来与按景初历推日度术所得结果比较,算得是时冬至应在斗17度,与四分、景初之斗21度相差4度。又由史官受诏,以土圭测景,考校日至,所得较



景初早3日有余。何承天说，今历书给出的二至，非天之二至。天之南至，日在斗十三四矣。何承天依据观测得到的冬至日躔是比较合天的。经作者核算，元嘉二十年(443)冬至赤道日躔斗12°.9061，合中历13.0943度，与何承天所得相差不足1度。元嘉历认识到19年7闰，闰数微多，宜改法易章，因嫌运算滋繁，仍用旧章法。合朔月食，理应当历朔望。因月有迟疾，元嘉历拟以盈缩定其小余，采用定朔定望。景初历昼漏表未经实测，全部沿袭四分旧数。其值春分日长，秋分日短，冬至后昼漏率长于冬至前，且长短增减，进退无渐。元嘉历重新给出昼漏刻表各项数值。二至二分，各据其正。则冬至前后完全对称，不复差异。元嘉历改用建寅正月和雨水中气为历元气朔。因雨水日在室宿，故将回归年的奇零改为室分，不用斗分。以608为纪，半纪304为度法，75为室分。故元嘉历的回归年长$365\frac{75}{304}$日。

宋文帝认为，何承天所陈，殊有理据，诏"可付外详之"。太史令钱乐之、兼丞严粲以元嘉十一年至十七年五次月食食既时的位置，按月食所冲，考日之所在。与景初历日度相较，补充论证冬至之日，日并不在斗21度少，并在斗17度半间，"悉如承天所上"。又用元嘉十一至二十年土圭测景所得日景极长，与景初历冬至日期比较，"寻校前后，以影极长为冬至"，均在历前3日。得出结论说，以月食检日所在已差4度。土圭测影，冬至又差3日。今之冬至乃在斗14间，又如承天所上。但他们对采用定朔定望持保留态度，说，"承天法每月朔望及弦皆定大小余，于推交会时刻虽审，皆用盈缩，则月有频三大、频二小，比旧法殊为异"，"愚谓此一条自宜仍旧"。员外散骑郎皮延宗也反对改行定朔定望。何承天年已垂老，未再坚持，乃改新法依旧术，不复每月定大小余。于是，元嘉历于二十二年(445)，得诏施行。

元嘉历以公元前5261年庚辰岁甲子纪首为元。至元嘉二十年(443)癸未积5703年，算外(庚辰岁不计入)。以608年为纪，6纪3648年为元。纪月7520，纪日222070。以60去纪日，余10。一纪后纪首日名干支移后10日。历以甲子纪首为元，所以二纪纪首甲戌，三纪纪首甲申，四纪甲午，五纪甲辰，六纪甲寅。6纪为元，6纪后朔旦雨水齐同，日得甲子。日名、朔、气全可复原。但元首及元嘉历上元并非日月交会及月过最卑(近地点)之时。这一点和6纪为元，元嘉历是效法了景初历的做法。由于元嘉历将纪法半之取作度法，并改斗分为室分。所以法数中比景初历增加度法($\frac{1}{2}$纪法)。这样，回归年的奇零是室分/度法，而景初历为斗分/纪法。因纪法二分为度法，所以纪日外，另有周天。

元嘉历岁实朔策为：

$$回归年=\frac{纪日}{纪法}=\frac{222070}{608}=365\frac{150}{608}=365\frac{75}{304}$$

$$=365.24671\text{日}$$

$$=365\frac{\text{度分}}{\text{度法}}=360\frac{1595}{304}=360\frac{\text{余数}}{\text{度法}}$$

$$=360\frac{3190}{608}\text{日}$$

回归年长由度法化为度分，即：

$$\text{回归年}=365\frac{75}{304}=\frac{111035}{304}=\text{周天}/\text{度法}$$

太阳日行1度（304分），岁行111035分，恰好是元嘉历给出的周天值。可见，何承天虽承认有岁差，并由《尧典》四仲中星得出冬至日躔约百年退行1度。但他在历法中没有引进岁差。元嘉历中岁实和周天还是一码事。

$$\text{朔策（朔望月）}=\frac{\text{通数}}{\text{日法}}=\frac{22207}{752}=29\frac{399}{752}=29.530585\text{日}$$

因仍沿用19岁235月章法，元嘉与景初类似，朔望月比较密近，回归年稍疏。略大于天。

法数中，元嘉历的没法、没余与景初历没法、没分也稍有不同。景初历中有下列关系：

$$\frac{\text{周天}}{\text{余数}}=\frac{673150}{9670}=\frac{67315}{967}=\frac{\text{没分}}{\text{没法}}$$

以没法除没分得没日的间距。根据没日的定义，一岁有3190/608个没日。一纪608年有3190没日。一纪222070日，以3190除纪日222070，得：

$$\text{没日间隔}=\frac{222070}{3190}=69\frac{1960}{3190}=69\frac{196}{319}=\frac{22207}{319}$$

元嘉历称319为没法，196为没余。纪日的1/10为22207，是元嘉历的通数。故以没法319去通数，不尽为没余196。

元嘉历如景初历，也给出各纪首迟疾、交会差率，数值如下：

甲子纪第一　迟疾差17663　交会差877

甲戌纪第二　迟疾差3043　交会差279

甲申纪第三　迟疾差9144　交会差620

甲午纪第四　迟疾差15245　交会差22

甲辰纪第五　迟疾差625　交会差363

甲寅纪第六　迟疾差6726　交会差704

仿效景初历，可以得出迟疾纪差6101和交会纪差598。每纪迟疾差率递加纪差6101，交会差率递减598，得次纪。交会差率不足减时，加会月939。会月为交限数与朔望合数之和，与景初历的会通相当。会月939，有160交（食）、80交周，得



$$食年(交周)=\frac{会月}{朔望合数}=11.7375\ 月=346.6152427\ 日$$

$$一交=\frac{会月}{会数}=5.86875\ 月=173.3076214\ 日$$

次纪迟疾差率由前纪差率递加纪差 6101 而得。递加后差率大于通周 20721 者，减通周。

元嘉历推步附有实例，对初学者很方便。

(1)推入纪法

置上元庚辰(公元前 5261 年)尽所求年，以元法除之，不满元法，以纪法除之。余数不满纪法即入纪年；满法去之，得后纪。

如，元嘉二十年距庚辰上元 5703 年，以元法 3648 去之，余 2055。

$$入元年=[积年/元法]_R=[5703/3648]_R=2055$$

$$入纪年=\frac{入元年}{纪法}=\frac{2055}{608}=3\ \frac{231}{608}$$

元嘉二十年入第四甲午纪 231 年。

(2)推积月

$$入纪年\times 章月/章岁=积月+闰余/19$$

闰余 12 以上，其年闰。

(3)推天正朔：

$$朔积分=通数\ 22207\times 积月$$

$$朔积分/日法\ 752=积日+小余/日法\ 752$$

$$正月朔大余=[积日/60]_R$$



以纪首日名计数大余，算外，得所求年正月朔日干支及小余。累加朔策 29 $\frac{399}{752}$ 日得各月朔。小余 353 以上，其月大。加弦策7 $\frac{287\frac{3}{4}}{752}$ 日得上弦。再加得望，又加得下弦。

(4)推二十四气

$$入纪年\times\frac{余数\ 1595}{度法\ 304}=积没+\frac{小余}{度法}$$

$$所求年雨水大余=[积没/60]_R$$

自纪首日名数起，算外，得所求年雨水干支、小余。递加15 $\frac{66\frac{11}{24}}{304}$ 日，得各气大余、小余。

(5)推合朔月食术：

所求年正月朔去交分

$=[(积月\times 会数\ 160+所入纪交会差)/会月\ 939]_R$

次月朔去交分＝正月朔去交分＋会数 160

满会月 939 去之。元嘉二十年入甲午纪，交会差 22。

望日去交分＝朔日去交分＋朔望合数 80

朔望去交分小于合数 80，或大于交限数 859，朔则交会，望则交食。

(6)推入迟疾历法

$$\frac{[(朔积分+所入纪迟疾差)/通周\ 20721]_R}{月法\ 752}$$

＝所求年正月朔入历日＋日余/日法

次月朔入历

$=正月朔入历日及余+1\frac{734}{752}日$

元嘉二十年入甲午纪第四，所入纪迟疾差 15245。$1\frac{734}{752}$日为朔望月与近点月之差。元嘉历近点月为：

$$近点月=\frac{通周}{日法}=27\frac{417}{752}日=27.5545213\ 日$$

417 称作周日日余。周虚为日法与周日日余之差。

月望入历＝朔入历＋14＋575.5/752

(7)推合朔月食定大小余(定朔定望)

定积分＝盈缩积分±入历日余×损益率

定差法＝差法±入历日余×列差/日法

定积分损减益加，定差法盈加缩减。

$$朔望定小余=朔望平小余\pm\frac{定积分}{定差法}$$

盈减缩加。列差、损益率、盈缩积分、差法皆由月离表查出。差法为月实行分与日平行分之差。

元嘉上元庚辰甲子纪首仅为朔旦雨水起于甲子夜半之元，既非日月交会、月过最卑，亦非五星合日之时。推步五星，另取近距、用做后元。法数列表 6－2 中，积年指后元距元嘉二十年。其中：

日度法＝度法 304×合数

室分＝度分 75×合数

合岁×回归年＝合数×会合周期(一终)



水星、金星两合为一终。所以

$$会合周期=合岁\times回归年(365\frac{75}{304})/合数$$

由一终行星可得到五星相对恒星的平均运动 n，从而求出恒星周期 T(=周天/平均运动 n)。元嘉历五星会合、恒星周期数值也列于表 6－2。由表看出，元嘉历五星数值精度比前历有所提高。

(8)推五星星合年

$$所求年距元\times\frac{合数}{合岁}=积合+\frac{合余}{合岁}$$

合余不满合数，合其年；以合数除合余，得 1，合往年；得 2，合前往年(只有火星可能如此)。

$$度分=合数-合余$$

(9)星合度、星合日

$$周天\ 111035\times\frac{度分}{日度法}=积度+\frac{度余}{日度法}$$

自室 2 度数起，算外(室 2 不计)，星合所在度。

$$日余=雨水小余\times合数+度余$$

$$星合日=积度+日余/日度法$$

自雨水起数，雨水不计，所得为星合日。

表 6－2　元嘉历五星法数和会合、恒星周期

	合岁	合数	日度法	室分	后元(公元)	积年	会合周期(日)		平均运动	恒星周期(日)	
							元嘉	今值		元嘉	今值
木星	344	315	95760	23625	丙戌 326	118	398.873	398.88	0.08430	4332.58	4332.59
火星	459	215	65360	16125	乙亥 435	9	779.759	779.94	0.53159	687.08	686.98
土星	383	370	112480	27750	甲戌 434	10	378.080	378.09	0.03394	10760.73	10759.2
金星	267	167	50768	12525	甲申 384	60	583.957	583.92			
水星	79	249	75696	18675	乙丑 425	19	115.881	115.88			

(10)星见日、星见度

星见日=星伏日数及余+星合日及余

星见度=星伏行度及余+星合度及余

星伏、星合之和满日度法进位。计数方法与前同。即皆以雨水所在日、度为起算点。

会合周内其他动态段内的行星位置和所当之日皆仿此。

景初晷漏沿袭四分。四分历黄道去极及晷影乃刘洪等于熹平三年(174)据仪、表所测定的结果。昼夜漏刻依黄道去极,昏旦中星按昼夜漏刻计算得出。元嘉历始对四分、景初晷漏数值做较大改动。据作者研究,元嘉晷漏为推算结果,未经实测,这个问题,留待下面与大明历步晷漏一起讨论。

年月不可公约,又皆不是日长的整数倍。中国古代不用十进制小数而用分数来表示年、月日数的奇零部分。历算家怎样根据观测找出比较准确的分数的数学方法称作调日法。北宋周琮在明天历历论中指出,调日法是何承天创制的。他以26/49为强率,以9/17为弱率,累强弱之数,得中平之率,以求日法朔余。元嘉历日法752,朔余399,得15强1弱($26\times15+1\times9=399$,$15\times49+1\times17=752$)。自后治历者多因循何承天之法累强弱之数得出日数奇零的表达分数。调日法是历算数学方法上的重大发展。这个问题在后面章节中还会谈到。

元嘉历月行阴阳法乃元嘉二十年太祖使著作令史吴癸依刘洪阴阳历法所补。除日分不同外,基本全仿效乾象术。表中没有列出衰值一栏。表中给出半个恒星月($13\frac{2685.5}{4064}$日)每日的损益率和兼数(月亮极黄纬)值。有关讨论已见乾象历,不赘述。



二、大明历

大明六年(462),南徐州从事史祖冲之上表献历。称何承天意存改革,但置法简略,今已乖远。据他考校,元嘉历至斯已有三方面的差谬,"日月所在,差觉三度;二至晷影,几失一日;五星见伏,至差四旬,留逆进退,或移两宿"。大明历改易旧法、创新二事。其一,破19岁7闰旧章法,改行391年144闰的新章法。其二,参以中星,课以蚀望,得今冬至之日在斗11度。通而计之,未盈百载,所差2度。旧法并会冬至日有定处,今令冬至所在,岁岁微差。在历法中首次引入岁差。大明历取岁差值为860分,当860/39491度(0.021777114度,合45.9198年差1度)。并称大明历设法三点:①以子为辰首、位在正北,因以今历上元日度,发自虚1;②日辰之号,甲子为先,历法设元,应在此岁;今历上元,岁在甲子;③上元之岁,历中诸条,均应为始;而景初交会迟疾元首有差;元嘉日月五星各自有元,交会迟疾亦并置



差；而大明历设法，日月五纬，交会迟疾，悉以上元岁首为始。

祖冲之指称元嘉三谬所言稍过，设法三事亦非必需。唯引进岁差和改革闰法为大明历的两大创法。祖冲之 391 年有 144 闰，每岁为 12.368286445 月。真值每岁约当 12.3682765 月。依章法 19 岁 7 闰为岁有 12.36842105 月，玄始历为 12.3683333。可以看出，大明历闰法犹胜过赵𢾺玄始历。大明历岁差 860 分，冬至点岁岁微差，当 45.9198 年西移 1 度。数值偏大。但将岁差引入历法，自此历法计算，天自为天，岁自为岁，是历法发展的一项重大创举。同时代的北朝各历都没有引进岁差。

大明历上元甲子至宋孝武帝大明七年(463)癸卯 51939 年，甲子岁不计。

元法 592365；纪法 39491；章岁 391；元 15 纪；纪 101 章；章月 4836；岁 4836/391 月；章闰 144；月法 116321；日法 3939。

$$\text{朔望月}=\frac{\text{月法}}{\text{日法}}=\frac{116321}{3939}=29\frac{2090}{3939}=29.53059152\text{ 日}$$

$$\text{回归年}=\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}\times\frac{\text{月法}}{\text{日法}}=365\frac{9589}{39491}$$

$$=360\frac{207044}{39491}=365.2428148186\text{ 日}$$

大明历称 9589 为岁余，207044 为余数。

大明历引入岁差。太阳在恒星间运动，一岁行天不足一周，与周天之差谓岁差。太阳日行 1 度，一岁行天 365 $\frac{9589}{39491}$度。以纪法 39491 为度法，故一岁行天 14423804 分。称为岁周。大明历周天是 14424664 分。

故

$$\text{岁差分}=\text{周天}-\text{岁周}=14424664-14423804=860$$

$$\text{周天度}=\frac{\text{周天}}{\text{纪法}}=\frac{14424664}{39491}=365\frac{10449}{39491}=365.26459\text{ 度}$$

称 10449 为虚分。

$$\text{岁差度}=\text{周天度}-\text{回归年}$$

$$=860/\text{纪法}=860/39491=0.021777\text{ 度}$$

$$\text{近点月}=\frac{\text{通周}}{\text{通法}}=\frac{726810}{26377}=27\frac{14631}{26377}=27.5546878\text{ 日}$$

$$\text{交点月}=\frac{\text{会周}}{\text{通法}}=\frac{717777}{26377}=27\frac{5598}{26377}=27.21223\text{ 日}$$

$$\text{没分}=\frac{\text{岁周}}{4}=3605951$$

$$没法=\frac{余数}{4}=51761$$

$$纪法=23\times1717=101\times章岁$$

$$日法=101\times39$$

大明历称 23 为行分法,1717 为小分法,39 为差率,它们全是为计算方便而设的中间辅助量。

大明历推步情况如下。

(1)推朔术

$$距元年\times章月 4836/章岁 391=积月+\frac{闰余}{章岁}$$

闰余 247 以上,其年有闰。

$$积月\times\frac{月法 116321}{日法 3939}=积日+\frac{小余}{日法}$$

以 60 去积日,不尽为大余。即

$$天正朔大余=[积日/60]_R$$

大余命以甲子,算外(甲子不计入),所得即所求年天正十一月朔日干支。小余大于 1849,其月大。

$$次月朔大小余=天正朔大小余+29\frac{2090}{3939}$$

小余满日法 3939,进位;大余满 60,去之。累加朔望月$29\frac{2090}{3939}$日,得各月朔。

$$上弦日大小余=朔大小余+7\frac{1507\frac{1}{4}}{3939}$$

再加得望,又加得下弦。

(2)推闰术

$$闰所在月=12\times\frac{章岁 391-闰余}{章闰 144}=\frac{章岁 391-闰余}{12}$$

分母 12 称作闰法。闰余 247 以上,此式得数小于等于 12。可知其年有闰。闰所在月自天正月数起,天正月不计。

(3)推二十四气

$$距元积年\times\frac{余数 207044}{纪法 39491}=积日+\frac{小余}{纪法}$$

$$天正十一月冬至大余=[积日/60]_R$$

以 60 去积日,不尽为大余。大余自甲子计数,甲子不计,得天正十一月冬至干支。



$$次气=冬至大、小余+气策\ 15\ \frac{8626\frac{5}{6}}{39491}$$

小余满纪法 39491 进位。累加气策 15.21845 日得各气。

(4)求土王、没灭

土王、没灭为步发敛术的内容，将在历书历注论著中详细介绍。古历将一岁均分 5 份，分别为木、火、金、水、土五行用事日。春木、夏火、秋金、冬水四行各以四立之节开始，用事 $73\ \frac{1917.8}{39491}$ 日（73.048563 日）。土居四时之季。每时最后的 18.26214 日 $\left(18\ \frac{10352.2}{39491}日\right)$，即回归年的二十分之一，为土用事日。就是说，四立前 18.26214 日，为土用事日之始。冬至距立春 $45\ \frac{25880.5}{39491}$ 日，距季冬土用事日 $27\ \frac{15528}{39491}$ 日。四立分别相距 $91\ \frac{12270}{39491}$ 日。故有

$$季冬土用事日=冬至大小余+27\ \frac{15528}{39491}$$

$$季春土用事日=季冬土用事日+91\ \frac{12270}{39491}$$

累加六气策(91.3107037 日)得各季土用事日。

没日、灭日已在四分历中做过介绍。一岁有没日 $5\ \frac{9589}{39491}$ 个，没日相距 $365\ \frac{9589}{39491}/5\ \frac{9589}{39491}=69\ \frac{34442}{51761}$ 日，称没策。

$$天正后没日距冬至=\frac{没分-90\times冬至小余}{没法}=距日+\frac{日余}{没法}$$

$$次没=天正后没日及余+没策\ 69\ \frac{34442}{51761}$$

累加没策得各没。

(5)推日所在度

$$度实=[纪法\times朔积日/周天]_R$$

$$度实/纪法=积度+度余/纪法$$

积度自虚 1 计数，虚 1 不计，满宿次去之，至不满宿，为天正十一月合朔夜半日所在度。

$$次朔夜半日度=天正朔夜半日度+是月日数$$

大月加 30 度，小月加 29 度。入虚宿去度分(奇零，即虚分/纪法)。

$$虚分\ 10449/纪法\ 39491=10449/(1717\times23)$$

$$=10449/1717/23$$

$$=6\ \frac{147}{1717}/23$$

入虚宿去奇零，即去行分 6，小分 147。

求次日夜半日度＝朔夜半日度＋1 度

(6)推朔日夜半月所在度

前面推出了朔日夜半日所在度，此处要计算朔日夜半月所在度。合朔时日月同度。现在的问题是，求出夜半时月距太阳的度数。若合朔时刻在子夜夜半，即合朔小余为零时，夜半月度等于夜半日度。这是特例。绝大多数情况下朔小余不为零。小余为日的奇零部分，一般用分数(小余/日法)来表示。设月亮平均运动为 n'，即日行 n' 度；太阳日行 1 度，令为 n，即 n 等于 1 度。合朔时太阳已较夜半日度东行了 $n\times$小余/日法度，月比夜半月度已东移 $n'\times$小余/日法度。合朔时日月同经，故有：

$$夜半日度+\frac{n\times 小余}{日法}=夜半月度+\frac{n'\times 小余}{日法}$$

所以

$$夜半月度=夜半日度-(n'-n)\times\frac{小余}{日法}$$

式中，夜半日度已知，n 为太阳平均运动，等于 1，只需知道月亮的平均运动 n'，即可求得夜半月度。大明历由于引进了岁差，所以月亮的平均运动计算方法与前面所述其他几种历法稍有不同。为便于理解，我们还是从月亮的会合运动方程入手讨论这个问题。将会合运动方程 $1/S=1/M+1/T$ 两端各乘 T，则有：

$$T/S=T/M+1$$

其中 S 为恒星月，M 是朔望月，T 系恒星年。太阳日行 1 度，行天一周所行的度数就是周天度。故 T 用日表示为恒星年，用度表示即周天度。在大明历中纪法亦为度法，故 T＝周天/纪法。前面已述，以月平均运动 n' 除周天，得恒星月 S。所以，月亮的平均运动 n' 为：

$$n'=\frac{T}{S}=\frac{周天度\ T}{朔望月\ M}+1=\frac{周天/纪法}{月法/日法}+1$$

周天等于岁周加岁差分，即：

周天 14424664＝岁周 14423804＋岁差分 860

故

$$n'=\frac{\frac{岁周}{纪法}}{\frac{月法}{日法}}+\frac{\frac{岁差分}{纪法}}{\frac{月法}{日法}}+1=\frac{回归年}{朔望月}+\frac{岁差\times 日法}{纪法\times 月法}+1$$



因为

章月/章岁＝回归年/朔望月

如此，代入上式可避免大数字运算，而

$$\frac{岁差\times日法}{纪法\times月法}=\frac{860\times3939}{39491\times116321}$$

$$=\frac{860\times3939/116321}{39491}$$

$$=\frac{29\,\frac{14231}{116321}}{39491}$$

所以

$$月亮平均运动\ n'=\frac{章月}{章岁}+\frac{岁差\times日法}{纪法\times月法}+1$$

$$=\frac{4836}{391}+\frac{\frac{860\times3939}{116321}}{39491}+1$$

$$=12\,\frac{144}{391}+\frac{\frac{860\times3939}{116321}}{39491}+1$$

代入夜半月度＝夜半日度－$(n'-n)$×朔小余/日法中，因太阳平均运动 $n=1$，即太阳日行 1 度。故

$$n'-n=n'-1=12\,\frac{14544}{39491}+\frac{\frac{860\times3939}{116321}}{39491}$$

$$(n'-n)\times\frac{朔小余}{日法}=\left(\frac{488436}{3939}朔小余+\frac{朔小余}{3939}\times\frac{860\times3939}{116321}\right)/39491$$

$$=\left[124\times朔小余+\frac{860\times朔小余}{116321}\right]/39491$$

因此

$$合朔夜半月所在度=合朔夜半日所在度-\left[124\times朔小余+\frac{860\times朔小余}{116321}\right]/纪法\ 39491$$

所以，推月所在度术文说：

以朔小余乘 124 为度余。又以朔小余乘 860 为微分。微分满月法(116321)从度余，度余满纪法(39491)为度，以减朔夜半日所在，则月所在度。求次月，大月加度 35，度余 31834，微分 77967；小月加度 22，度余 17261，微分 63736。入虚去度



分也。

大月 30 日，小月 29 日。要求次月月朔夜半月所在度，大月需加 $30\times n'$ 度，小月则加 $29\times n'$ 度。29、30 日皆大于恒星月，故次朔夜半月度加后需减去周天度。

大月 30 天情况下：

$30\times n'$ — 周天度

$$=30\times 13\frac{14573\frac{14231}{116321}}{39491}-365\frac{10449}{39491}$$

$$=390+30\times\frac{14573}{39491}+\frac{\frac{30\times 14231}{116321}}{39491}-365\frac{10449}{39491}$$

$$=35\frac{31834\frac{77967}{116321}}{39491}$$

次月朔夜半月度

$$=\text{本月朔夜半月度}+35\frac{31834\frac{77967}{116321}}{39491}$$

小月 29 日情况下：

$29\times n'$ — 周天度

$$=29\times 13\frac{14573\frac{14231}{116321}}{39491}-365\frac{10449}{39491}$$

$$=377+10\frac{27707}{39491}+\frac{3\frac{63736}{116321}}{39491}-365\frac{10449}{39491}$$

$$=22\frac{17261\frac{63736}{116321}}{39491}$$

$$\text{次朔夜半月度}=\text{本月朔夜半月度}+22\frac{17261\frac{63736}{176321}}{39491}$$

(7)推入迟疾历

通实＝朔积日×通法

$[\text{朔积日}\times\text{通法 }26377/\text{通周 }726810]_R=\text{余数}$

$$\frac{\text{余数}}{\text{通法 }26377}=\text{入历日}+\text{日余}/\text{通法}$$



即得天正十一月朔夜半入历日及余。

本月为大月(30 日),次月朔夜半入历日、余＝本月朔夜半入历日、余＋30－近点月$\left(27\frac{14631}{26377}\right)$＝本月朔夜半入历日、余＋$2\frac{11746}{26377}$。

小月情况下(29 日),次月朔夜半入历日、余＝本月朔夜半入历日、余＋29－近点月$\left(27\frac{14631}{26377}\right)$＝本月朔夜半入历日、余＋$1\frac{11746}{26377}$。

次日夜半入历＝月朔夜半入历日、余＋1。

(8)求日所在定度

大明历月离表与其他历法稍有不同。表供计算月行迟疾使用。共分五栏。

近点月内的日数。从近地点开始,每日一值。"一日"为 0.0 到 1.0 日,"二日"乃 1.0 至 2.0 日。共 28 日。

月行度。为月亮每日的实行度分。以行分法 23 为度法,即 1 度为 23 行分。

$$损益率=(月实行分-月平行分)\times\frac{日法}{通法}$$

前面我们已经推出大明历月平行运动 $n'=13\dfrac{14573\frac{14231}{116321}}{39491}$(13.369024)度。以章岁 391 为度母,则月平行分为 5227.288341 分。将月实行度也以章岁为度法化为月实行分。实行与平行之差,乘日法,以通法除之,得损益率。

盈缩积分,为其前各日损益率与通法乘积的累加累减值。即

$$\begin{aligned}盈缩积分&=\sum损益率\times通法\\&=\sum(月实行分-月平行分)\times日法\end{aligned}$$

差法,乃月实行分与日平行分之差值。太阳日行 1 度为 391 分,故

$$差法=月实行分-章岁\ 391$$

月实行分、平行分是以章岁 391 为度法的。盈缩积分要化为度,由前式看出,须以日法章岁乘积除之。盈缩积分为损益率与通法相乘的累计积,化为度,也需以日法章岁乘积除之。计算日所在定度,就是将平朔日所在度加上月行迟疾改正。

$$\begin{aligned}月行迟疾改正&=\left(盈缩积分\pm\frac{日余}{通法}\times损益率\times通法\right)/(日法\times章岁)\\&=\frac{盈缩积分\pm日余\times损益率}{日法\times章岁}\end{aligned}$$

由于纪法＝101×章岁,日法＝101×39(差率),代入得:

$$月行迟疾改正=\frac{盈缩积分\pm日余\times损益率}{差率}/纪法\ 39491$$

$$=改正度+\frac{度余}{纪法}$$

$$日所在定度=日所在平度\pm\left(改正度+\frac{度余}{纪法}\right)$$

盈加缩减。这就是求日所在定度术文中所说的：

以夜半入历日余乘损益率，以损益盈缩积分，如差率(39)而一，所得满纪法(39491)为度，不尽为度余，以盈加缩减平行度及余为定度。

(9)推月入阴阳历

乾象、元嘉诸历推月入阴阳历皆以恒星月入算。大明历始改用交点月。月入黄道南北，是否入食限，都与黄白交点、月亮去交远近有关，是由交点月决定的。

通实(朔积日×通法)以会周去之，不满交数 358888.5 时，为朔入阳历(黄道南)。大于交数，则月入阴历(黄道北)。

$$朔入阳历分=[通实/会周\ 717777]_R$$

$$朔入阴历分=\left[\frac{通实}{会周}\right]_R-交数\ 358888.5$$

会周为交点月日分，为月亮连续两次经过降交点的时间间隔。一会有两交。为月自降交点至升交点，或自升交点至降交点所经历的日分。

$$\frac{朔入阴阳历分}{通法}=天正朔夜半入历日+\frac{日余}{通法}$$

大月(30 日)情况下，次月朔夜半入历日、余＝本月朔夜半入历＋30－交点月 $27\frac{5598}{26377}$＝本月朔夜半入历＋$2\frac{20779}{26377}$。

小月(29 日)情况下，次月朔夜半入历日、余＝本月朔夜半入历＋29－交点月 $27\frac{5598}{26377}$＝本月朔夜半入历＋$1\frac{20779}{26377}$。

一会有两交。一交等于半个交点月($13\frac{15987.5}{26377}$日)。入阴阳历日大于一交，说明月亮已过交点，则减去一交$\left(交数/通法=13\frac{15987.5}{26377}日\right)$。原为阳历易为阴历，本为阴历则成阳历。

$$次日夜半入历日、余=本日夜半入历+1$$

(10)求朔望差

前面介绍了朔日及平日夜半入阴阳历日的计算方法。朔望发生在夜半的机会是难得的。大多数朔望都有加时，即有朔、望小余。计算得出的朔望小余都是以日



法为分母的。而入阴阳历日计算是以通法为分母的。为了计算朔望加时所入阴阳历日，必须化为以通法为分母。朔差数、望差数就是以通法为分母表示的朔望小余。处理方法就是分数计算中的通分。

$$朔差数=\frac{朔小余}{日法\ 3939}\times\frac{通法\ 26377}{通法\ 26377}$$

$$=\frac{朔小余\times 2029\times 13}{303\times 13}/通法$$

$$=朔小余\times\left(6+\frac{211}{303}\right)/通法$$

$$=朔小余\times\left(6+\frac{422}{606}\right)/通法$$

$$=\left(6\times 朔小余+\frac{422\times 朔小余}{606}\right)/通法$$

$$=\left(日余+\frac{小分}{606}\right)/通法$$

$$\frac{1}{2}朔望月=14\ \frac{3014.5}{3939}日$$

$$=14+\frac{3014.5}{3939}日$$

$$\frac{3014.5}{3939}\times\frac{通法\ 26377}{26377}$$

$$=20186\ \frac{125}{606}/26377$$

$$望差数=朔差数+\frac{1}{2}朔望月$$

$$=\frac{朔小余\times 2029\times 2}{606}/26377$$

$$+14+20186\ \frac{125}{606}/26377$$

$$=14+\Big(6\times 朔小余+20186$$

$$+\frac{422\times 朔小余+125}{606}\Big)/26377$$

(11)求合朔、月食

$$合朔加时入历=合朔夜半入历+朔差数$$

$$=合朔夜半入历+\Big(6\times 朔小余+$$

$$\frac{422\times 朔小余}{606}\Big)/26377$$

$$望加时入历=合朔夜半入历+14+\left(6\times朔小余+20186+\frac{422\times朔小余+125}{606}\right)/26377$$

当计算朔入阴历分时要去交数 358888.5，故朔望夜半入阴阳历日及余，有时会出现半分的情况。此时可以小分 303 代之，即$\frac{303}{606}$。小分加满 606 进位成日余，日余满通法 26377，进位为日。日满交点月去之。

朔望加时入阴阳历数值小于食限内限，或大于食限外限，朔则交会，望则交食。

$$内限=\frac{1}{2}(朔望月-交点月)=1\frac{4198\frac{428}{606}}{26377}日$$

$$外限=\frac{1}{2}交点月-内限=12\frac{11788\frac{481}{606}}{26377}日$$

(12)求合朔月食定大小余

朔、望差数已将朔望小余换成以通法为分母。这样不仅可得朔望加时入阴阳历日，也可计算朔望加时入迟疾历日。

$$朔、望加时入迟疾历=合朔夜半入迟疾历日+朔、望差数$$

根据朔望加时入迟疾历日、余查月离表，得到与该历日对应的盈缩积分和损益率数值。

$$朔、望定小余=朔、望平小余+\frac{盈缩积分\pm入历余\times损益率}{差法}$$

盈减缩加。以日法 3939 除小余得日的小数。小余满日法为日。

(13)求月去日道度

由月入阴阳历日查阴阳历表，则：

$$月去日道度=\frac{1}{12}\left(兼数\pm\frac{入阴阳历余\times损益率}{通法\ 26377}\right)$$

阳历月在表(黄道南)，阴历月在里(黄道北)。

(14)五星会合、恒星周期

前面曾介绍五星会合、恒星周期满足

$$恒星周期=\frac{周天}{n'}$$

$$会合周期=\frac{周天}{|n'-n|}$$

其中 n'是行星的平均运动，n 为视太阳的平均运动。知道 n'，则可得出行星的恒星周期。因视太阳的平均运动 n 已知，故由行星的会合周期可求出行星对于恒



星的平均运动 n'，从而得出恒星周期。大明历推五星术，给出五星的会合周期和一终行天度数。由它们可计算行星的平均运动 n'。以 n'除周天 365 度 10449 分得恒星周期。大明历列出的木、火、土、金、水五率为五星一终（会合周期）的纪法分，即以纪法 39491 除五率，得五星以日表示的会合周期值。大明历五星会合、恒星周期数值列于表 6－3 中。

表 6－3 大明历五星会合、恒星周期值

	五率	会合周期（日）		行天度	n'	恒星周期（日）	
		大明历	真值			大明历	真值
木星	15753082	398.903	398.88	33.6385	0.08433	4331.500	4332.59
火星	30804196	780.031	779.94	414.7662	0.53173	686.9355	686.980
土星	14930354	378.070	378.09	12.8052	0.03387	10784.334	10759.2
金星	23060014	583.931	583.92				
水星	4576204	115.880	115.88				

会合周期比较准确，但木星、土星不及元嘉；恒星周期除火星外，稍逊于元嘉历。

（15）求星合日、星合度

度实＝朔积日×纪法

$$\frac{\text{星率}-[\text{度实}/\text{星率}]_R}{\text{纪法 } 39491}=\text{星合入岁日}+\frac{\text{日余}}{\text{纪法}}$$

星合入岁日自所求年天正十一月朔日计数，朔日不计，得星合日。

星合所在度＝天正朔积度余＋入岁日、余

星合之时，日星同度。因太阳日行 1 度，故天正朔积度及余与星合入岁日及余相加得星合所在度。和满周天度 365 度 10449 分，去之。自虚宿 1 度数起，算外（虚 1 不计），即得星合度。

（16）星见日、星见度

星见日＝星合日、余＋伏日、余

星见度＝星合度及余＋星伏度及余

星伏日及余、星伏度及余皆由五星动态表查出。日余、度余皆满纪法 39491 进位。

（17）行五星法

大明历步五星以纪法作度法。为用分数计算方便，又将纪法分成小分法与行分法。纪法 39491＝小分法 1717×行分法 23。将度的奇零（称度余）用行分法和小

分法表示。

$$\frac{度余}{纪法}=\frac{度余}{1717\times 23}=度余/(1717\times 23)=\frac{整数\frac{小分}{1717}}{23}$$

小分满 1717 进位为行分，行分满 23 成度。例如，周天度 365 度 10449 分。10449 为周天的度余。以小分法 1717 除度余，所得为行分，不尽为小分。故周天的奇零可用下列行分、小分表示。

$$周天奇零\frac{10449}{39491}=\frac{10449}{1717\times 23}=\frac{10449}{1717}/23=\frac{6\,\frac{147}{1717}}{23}$$

$$周天度=365\,\frac{10449}{39491}度=365\,\frac{6\,\frac{147}{1717}}{23}度$$

其中 6 为行分，147 为小分。

大明历五星行度表中，伏行度数以纪法为分母，其他顺、逆、疾、迟各段，行度皆以行分 23 为分母。所以要推算某日某时五星的位置，需先将星合度余、伏行度余以小分法除，化为行分、小分表示的形式，再与其他各段相加减，这样都化为以行分 23 为分母，通分后加减，即得所求。五星各段的行日，每日的行分，动态表中讲得很清楚。顺行为加，逆行减之，很易入算。读者也可参看本书四分历步五星的介绍。

后汉四分历晷漏表为刘洪等人于灵帝熹平三年所完成。上一章我们对它做了较严格的分析和考查。何承天认为四分历晷漏春分昼长，秋分日短，所差超过半刻。而二至日夜为长短至，二分昼夜应等长。故分析得出四分历春分近夏至，秋分近冬至。所测分至日有差误，故日有短长。他并考校景初二至差 3 日有余。历之二至，非天之二至。这些分析是有一定道理的。四分历冬至后昼漏长于冬至前，元嘉历晷漏表昼夜漏刻、日中晷影，二至前后并皆对称相等。祖冲之也说，四分历立冬中影长 10 尺，立春中影长 9.6 尺。冬至日南至，日晷最长，二气（立冬、立春）去冬至，日数既同，则中影应该相等才对。可是四分历前（立冬）长，后（立春）短，相差至 4 寸之多，可证四分历冬至是后天的。立冬、立春时晷影，每天约差 0.95 寸弱，依此推之，二气应各退 2.12 日。如此，则晷影之数，立冬要短、立春要长，各差 2 寸，中影应长 9.8 尺。即晷影长 9.8 尺之日为正确的立冬、立春之日。所以大明历晷漏表冬夏至前后各气的日中影长和昼夜漏刻也是一一对称而相等的。

元嘉历晷漏表始自雨水、终于立春，表中给出二十四气每气始日的日中晷影、昼漏刻、夜漏刻、昏中星、明中星及日所在度等 6 项数据。大明历晷漏表以冬至开始，大雪结束，列出各气交气日日中影、昼漏刻、夜漏刻、昏中星度、明中星度等 5 项



数值。表中没有给出日所在度。它可由冬至日度累加气策一一得出。元嘉历昏、明中星是昏、明时刻南中星的宿度;大明历给出的是昏、明时刻太阳距午的度数,即太阳的时角 t,自南天子午线向西计量。

昏、明中星＝夜半日所在度＋昏、明中星度

我们依照元嘉历、大明历制定的年代,元嘉二十年(443)和大明七年(463)的天象考查了两历的晷漏表的日中影长和昼夜漏刻数值。方法与考查四分历晷漏术类似。结果有些出人意料,两历晷漏表的各项数据可能皆非何承天、祖冲之的实测所得,而是根据理论分析而来。

自吴大帝孙权黄龙元年(229)迁都南京(时称建邺),至孙皓天纪四年(280)降,吴亡,南京为吴都 52 年。晋愍帝司马邺建兴元年(313),因避讳,改建邺为建康。建兴四年(316)愍帝降汉。次年(317)三月琅邪王司马睿在建康即晋王位,自此史称东晋。过年(318)三月,晋王称帝,改元建武二年。自此以后,历南朝宋、齐、梁、陈,直到陈后主叔宝祯明三年(589),亡于隋,皆以建康为都。南京为六朝古都 324 年。我们以南京的纬度计算元嘉二十年、大明七年的日中晷影和昼夜漏刻与两历晷漏数值皆不相符,并有较大差异。而与洛阳、阳城纬度的计算结果,虽仍有出入,但比较接近。因为①两历冬至日所在仍有一定误差,元嘉差 0°.41,大明约大 0°.19;②日行有盈缩,相同的时间并不走过同样的角度。两历皆用平气。二至前后相应各气日行距离不等,对应的赤纬(去极度)各异。所以冬至、夏至前后各气日中影长、昼夜漏刻并不对称相等。再加上大气折射,即使春秋二分,实测的昼夜长短也并不同。考查显示,元嘉历、大明历晷漏表并非南京、阳城实测。

祖冲之在答辩戴法兴所难中,曾列举了大明历实测的三个晷影长度结果:大明五年十月十日(461 年 11 月 27 日)影长 10.775 尺;十一月二十五日(462 年 1 月 11 日)影长 10.8175 尺;十一月二十六日(462 年 1 月 12 日)影长 10.7508 尺。

我们用现代天文方法计算,这三个晷影确为祖冲之是时在南京的实测,考查结果见表 6－4。史载的这三个晷影长度与南京计算结果相差不足 1 寸,相对误差不到 1%,而洛阳计算结果误差约当 1.2 尺,相对误差超过 10%。可证确为斯时建康实测。十月十日为大明五年小雪后八日,十七日大雪,为大雪前第七日;十一月十一、十二日分别为小寒后第八、第九日,十二月三日大寒,当大寒前的第八、第七天。而在大明历晷漏表中,小雪、大雪的日中影分别为 11.2 尺,12.43 尺;小寒、大寒分别为 12.43 尺和 11.2 尺,数值悉比实测结果大很多。这更证明了大明历晷漏表日中影并非祖冲之南京实测。

细审大明历日中影数值,考虑前引祖冲之对四分历中影长度的分析,及做出立冬立春影长俱应为 9.8 尺的理由,可知其日中影数值完全是据四分历冬夏二至前

后各对应节气“晷影”相加折半得到的。这一点由表 6－5 可以看得很清楚。

表 6－4 祖冲之所测三个晷影尺寸

日期	正午日度(°)		南京					洛阳		阳城
	黄经	赤纬	$\varphi-\delta$ (°)	晷影 (尺)	史载	差	相对误差 (%)	$\varphi-\delta$ (°)	晷影 (尺)	晷影 (尺)
461.11.27	246.91	－21.67	53.67	10.878	10.775	0.103	0.96	56.27	11.982	11.852
462.1.11	292.75	－21.73	53.73	10.902	10.818	0.084	0.78	56.33	12.008	11.894
462.1.12	293.76	－21.55	53.55	10.833	10.751	0.082	0.76	56.15	11.930	11.794

元嘉历日中晷影数值，考查证实并非建康实测，由表 6－5 看出亦非四分历相应二气晷影相加折中，而与阳城、洛阳纬度实测结果相近。

表 6－5 大明历、元嘉历晷影、漏刻数值及与四分历的比较

		晷影(尺)		四分历晷影值(尺)			昼漏(刻)		四分历昼漏值(刻)		
		大明	元嘉			平均	大明	元嘉			平均
冬至		13.00	13.00	冬至 13.00		13.00	45.0	45.0	冬至 45.0		45.00
小寒	大雪	12.43	12.48	小寒 12.30	大雪 12.56	12.43	45.6	45.6	小寒 45.8	大雪 45.6	45.65
大寒	小雪	11.20	11.34	大寒 11.00	小雪 11.40	11.20	46.7	46.7	大寒 46.8	小雪 46.7	46.75
立春	立冬	9.80	9.91	立春 9.60	立冬 10.00	9.80	48.4	48.4	立春 48.6	立冬 48.2	48.40
雨水	霜降	8.17	8.22	雨水 7.95	霜降 8.40	8.175	50.5	50.5	雨水 50.8	霜降 50.3	50.55
惊蛰	寒露	6.67	6.72	惊蛰 6.50	寒露 6.85	6.675	52.9	52.9	惊蛰 53.3	寒露 52.6	52.95
春分	秋分	5.37	5.39	春分 5.25	秋分 5.50	5.375	55.5	55.5	春分 55.8	秋分 55.2	55.50
清明	白露	4.25	4.25	清明 4.15	白露 4.35	4.25	58.1	58.0	清明 58.3	白露 57.8	58.05
谷雨	处暑	3.26	3.25	谷雨 3.20	处暑 3.33	3.265	60.4	60.3	谷雨 60.5	处暑 60.2	60.35
立夏	立秋	2.53	2.50	立夏 2.52	立秋 2.55	2.535	62.4	62.3	立夏 62.4	立秋 62.3	62.35
小满	大暑	1.99	1.97	小满 1.98	大暑 2.00	1.99	63.9	63.9	小满 63.9	大暑 63.8	63.85
芒种	小暑	1.69	1.69	芒种 1.68	小暑 1.70	1.69	64.8	64.8	芒种 64.9	小暑 64.7	64.80
夏至		1.50	1.50	夏至 1.50		1.50	65.0	65.0	夏至 65.0		65.00

四分历昼夜漏刻，术文明确记载是根据去极远近计算得出。我们的考查显示元嘉、大明两历亦非南京实测所得，由表 6－5，与四分历漏刻比较看出，与日中影类似，大明、元嘉昼夜漏刻，亦为四分历对应两节漏刻的平均值。



元嘉历、大明历晷漏表分别给出了昏明中星及昏明中星度。它们皆由计算得出。昏明中星度是昏明时刻太阳距午度，各加夜半日所在，就得昏明中星。关于昏明中星及昏明太阳距午度的计算，在后汉四分历已做详尽说明。在后代历法中还会遇到太阳时角（即太阳距午度）及昏旦中星的计算，这里就不再重复多讲了。

第四节　北朝历法概况

北魏始自公元386年拓跋珪称代王，改元登国，都盛乐（今内蒙古呼和浩特西南）。晋安帝隆安二年（398），拓跋珪迁山东六州民吏十万余口赴代。六月定国号为魏，七月迁都平城（今山西大同）。十二月即帝位，是为道武帝，改元天兴。初，道武帝令太史令晁崇修浑仪以观星象，仍用景初历。岁年积久，颇以为疏。太武帝拓跋焘太延五年（439），魏军克姑臧，沮渠牧犍降，北凉亡。得赵敺所修玄始历。后谓为密。文成帝拓跋濬兴安元年（452）行用之。延昌四年（515）冬，张洪、张龙祥、李业兴等三家并上新历，各求申用。太傅、清河王怿等以天道至远，非卒可量，请立竿候影，期之三载，乃采其长者，更议所从。蒙敕特许。神龟初（518），崔光又上表，奏请广访诸儒，更取通数兼通经义者及太史，并集秘书与史官同验疏密。并请宰辅群官临检得失，至于岁终，密者施行。奉诏听可。这样，过去三年，再历寒暑，积勤构思，大功获成。于是将张洪等所上三历，以及卢道虔、卫洪显、胡荣、道融、樊仲遵、张僧豫所上，总合九家共成一历，请定名神龟历施用。肃宗孝明帝以历就，大赦改元，因名正光历，颁于天下。其历九家共修，以张龙祥（张明豫之子）、李业兴为主。北魏孝武帝永熙三年（534），高欢反，攻洛阳。孝武奔关中依宇文泰。欢入洛阳，立清河王亶之子元善见为帝，改元天平，是为东魏孝静帝。魏自此分为东、西。东魏迁都于邺（临漳）。闰十二月宇文泰毒杀孝武帝，立南阳王元宝炬，是为西魏文帝。东、西魏仍用正光历，直到西魏恭帝三年（556）禅位于周。北周初仍沿用之，至明帝武成元年（559）。

东魏孝静世，正光壬子历气朔稍违，荧惑失次，四星出伏，历亦乖舛。兴和元年（539）十月，齐献武王入邺，复命李业兴，令其改正。成甲子元历。于翌年兴和二年（540）颁行，又称兴和历。行用至武定八年（550）。五月，高洋废孝静帝，自立，东魏亡。北齐文宣帝受禅，命散骑侍郎宋景业协图谶，造天保历。次年天保二年（551）行之。兴和历共用11年。

正光历乃总合九家，共成一历。兴和历似主要为李业兴所修撰。两历数有微异，法则一理。历术推步皆分为七章，章目大同小异。

正光历、兴和历月离表的组成和形式也是完全一样的。由月行迟疾度及分、损益率、盈缩并率、盈缩积分等四栏组成。

两历基本法数见表 6－6。

表 6—6　正光历、兴和历基本法数表

	正光历	兴和历
回归年	$\frac{周天分}{蔀法}=\frac{2213377}{6060}=365\frac{1477}{6060}$ $=365.24372937$ 日	$\frac{周天}{蔀法}=\frac{6158017}{16860}=365\frac{4117}{16860}$ $=360\frac{88417}{16860}=365.2441874$ 日
朔望月	$\frac{周天分}{日法}=\frac{2213377}{74952}=29\frac{39769}{74952}$ $=29.53059291$ 日	$\frac{周天}{日法}=\frac{6158017}{208530}=29\frac{110647}{208530}$ $=29.53060471$ 日
近点月	$\frac{通周}{日法}=\frac{2065266}{74952}=27\frac{41562}{74952}$ $=27.55451489$ 日	$\frac{通周}{日法}=\frac{5745941}{208530}=27\frac{115631}{208530}$ $=27.55450535$ 日
恒星月	$\frac{周天分}{月周}=\frac{2213377}{81012}=27\frac{26053}{81012}$ $=27.32159433$ 日	$\frac{周天}{月周}=\frac{6158017}{225390}=27\frac{72487}{225390}$ $=27.32160699$ 日
朔望合数	$\frac{1}{2}经月=\frac{周天分}{2\times日法}=\frac{2213377}{2\times74952}$ $=14\frac{57360.5}{74952}$	$\frac{1}{2}经月=\frac{周天}{2\times日法}=\frac{6158017}{2\times208530}$ $=14\frac{159588.5}{208530}$
入交限数	$\frac{1}{2}$(食年—经月) $=173\frac{23208}{74952}-14\frac{57360.5}{74952}$ $=158\frac{40799.5}{74952}$	$\frac{1}{2}$(食年—经月) $=173\frac{67117}{208530}-14\frac{159588.5}{208530}$ $=158\frac{116058.5}{208530}$

月行迟疾度及分是近点月内每日月的实行度及分。以章岁为度分值。

正光、兴和两历计算中皆未引入岁差。前面说过，由月亮会合运动方程，可改写成

$$\frac{周天度}{恒星月}=\frac{回归年}{朔望月}+1$$

其中

恒星月＝周天度/月亮平均运动 n'

回归年/朔望月＝章月/章岁



故

月亮平均运动 n'（月日平行度）

$$=\frac{\text{周天度}}{\text{恒星月}}=\frac{\text{章月}}{\text{章岁}}+1=\frac{\text{章月}+\text{章岁}}{\text{章岁}}=\frac{\text{小周}}{\text{章岁}}$$

以章岁为度法，则月亮日平行小周分。

损益率为月实行分与月平行分之差。这里，月实行、月平行皆以章岁为度法分。

盈缩并率乃其前各日损益率累加累减值。

盈缩积分是盈缩并率与因子$\frac{\text{日法}}{\text{小周}}$的乘积。

于是，月离表各栏数值可表述为如下形式：

月行迟疾度及分＝月实行分

＝月实行度×章岁

损益率＝(月实行度－月平行度)×章岁

＝月实行分－月平行分

盈缩并率＝∑损益率

＝∑(月实行分－小周)

＝∑(月实行度－月平行度)×章岁

盈缩积分＝盈缩并率×日法/小周

＝∑损益率×日法/小周

正光、兴和两历计算合朔交会月食定大小余的方法也是相同的。由入历日数食月离表得入历日下损益率及盈缩积分。

$$\text{定积分}=\text{盈缩积分}\pm\frac{\text{入历日余}\times\text{损益率}}{\text{小周}}$$

定小余＝平朔望小余±定积分

$$=\text{平朔望小余}\pm\text{盈缩积分}\pm\frac{\text{入历日余}\times\text{损益率}}{\text{小周}}$$

盈减缩加。加满日法者进日。相减不足减时，减1日，加日法后减，则交会、月食加时在前日。

两历皆给出五星会合周期日分数。以日法除之，得五星会合周期日。由五星会合动态给出的一终行度，以会合周期除之得行星的平均运动 n（每日平行度）。根据下式可得恒星周期：

恒星周期＝周天度/每日平行度 n

正光、兴和两历五星会合、恒星周期列于表6－7。两历对火星、水星的认识较好，尤其火星优于前历。但木、土较粗略，逊于乾象、景初、元嘉、大明诸历。木星犹不及四分。



同一时代的历算家信都芳指出，兴和元年十二月二十日(540 年 1 月 14 日)，新历岁星在营室 13 度，顺，疾；天上岁星在营室 11 度，差 2 度。新历土星在角 11 度，留；天上镇星在亢 4 度，留，相差 5 度。新历太白在斗 25 度，晨见，逆行；天上金星在斗 21 度，逆行，相差 4 度。由此可对兴和历五星运动合天情况有个较明确的定量概念。

有关武成历、天保历的问题，我们将在第七章中谈及。

表 6—7　正光历、兴和历五星会合、恒星周期

五星	数		会合周期(日)			日平行度 n		恒星周期(日)		
	正光	兴和	正光	兴和	真值	正光	兴和	正光	兴和	真值
木星	2416660	6723888	398.789	398.807	398.88	0.08412	0.08416	4342.074	4339.966	4332.59
火星	4725848	13149083	779.843	779.898	779.94	0.53164	0.53168	687.007	686.966	686.980
土星	2291021	6374061	378.056	378.058	378.09	0.03389	0.03389	10777.15	10775.99	10759.2
金星	3538131	9843882	583.850	583.860	583.92					
水星	702182	1953716	115.872	115.879	115.88					



第七章 隋唐初历法大发展

第一节 日行盈缩的发现及在历法中的应用

公元581年，杨坚受周禅，建立隋朝，改元开皇，是为隋文帝。到元世祖至元十六年(1279)宋军兵败崖山，陆秀夫负帝投海死，宋亡，相距698年。至元十七年颁授时历，十八年(1281)施行。至此正好700年。隋唐时期，中国封建社会得到进一步发展，相应的历法也有长足的进步。这首先表现在，由于发现了日行和五星运动的盈缩，以及创立二次差内插法来处理日月五星不均匀运动的算法，提高了太阳、五星推步的精度。日月食的计算在月行迟疾外加上日行盈缩改正，使历法推步进入了一个新的历史时期。

《隋书·天文志》说："古历五星并顺行，秦历始有金火之逆。又甘石并时，自有差异。汉初测候，乃知五星皆有逆行，其后相承罕能察。至后魏末，清河张子信，学艺博通，尤精历数。因避葛荣乱，隐于海岛中，积三十许年。专以浑仪测候日月五星差变之数，以算步之，始悟日月交道，有表里迟疾，五星见伏，有感召向背。言日行在春分后则迟，秋分后则速。"

张子信发现日行五星运动盈缩，以算步之，作出日行春分后迟，秋分后速的结论，约当560～570年。其后，"又有广平人刘孝孙、张孟宾二人，同知历事。孟宾受业于张子信，并弃旧事，更制新法。又有赵道严，准晷影之长短，定日行之进退，更造盈缩，以求亏食之期。""盈缩转度，阴阳分至，与漏刻相符，共日影俱合，循转无穷。上拒春秋，下尽天统(565～569年)，日月亏食及五星所在，以二人新法考之，无有不合。"隋书律历志在这里记载了其门人张孟宾、刘孝孙将日行盈缩用入历法推步，收到了良好结果。北齐武平七年，"讫干敬礼及历家豫刻日食疏密。六月戊申朔(567年7月12日)，太阳亏，刘孝孙言食于卯时，张孟宾言食于甲时，郑元伟、董峻言食于辰时，宋景业(天保历)言食于巳时。至日食，乃于卯甲之间。"可见张孟宾、刘孝孙由于加进了日行盈缩的改正，推步日月食时刻已远较郑元伟、董峻所上甲寅元历及宋景业之天保历精确。次年(577)正月，周兵入邺(北齐都城)，二月齐亡于北周。各历短长"争论未定，遂属国亡"。刘孝孙、张孟宾历未得行用。

北周是时行露门学士明克让、麟趾学士庾季才制订的历法。大象元年(579)施

行太史上士马显制订的丙寅元历(又称大象历)。后年(581)二月,相国杨坚建立隋朝,改元开皇,仍行丙寅元历。杨坚"方行禅代之事,欲以符命曜于天下。道士张宾,揣知上意,自云玄相,洞晓星历,因盛言有代谢之征,又称上仪表非人臣相。由是大被知遇,恒在幕府。"及受禅之初,擢宾为华州刺史,使与仪同刘晖、骠骑将军董琳及前朝治历者马显、郑元伟等,议造新历。宾等依何承天法(元嘉历),微加增损。四年(584)二月撰成奏上。高祖下诏曰:"宜颁天下,依法施用。"张宾历沿袭马显丙寅元历,故其疏陋与之不相上下。颁行以后,就遭到刘孝孙及冀州秀才刘焯的批评。称其学无师法,刻食不中,所失凡有六条。主要是,不用赵𢾺闰周法,而爰用19年7闰古章法;不识岁差;不会计算上元积年而另立五星己巳别元;不识定朔及日月五星盈缩进退步法。谓其历未能验影定气继承天所长,而合朔顺天,何氏所劣,宾等依据,循彼迷踪。从而其密不及元嘉。"盖是失其菁华,得其糠秕者也。"刘晖、张宾串通一气,攻击孝孙,言其非毁天历,惑乱时人。孝孙、刘焯竟以他事斥罢。后来,张宾去世,刘孝孙再赴长安,又遭刘晖排斥。孝孙悲愤已极,乃抱书推棺到宫前哭诉,被抓起来报告朝廷。杨坚即命国子祭酒何妥安排评论孝孙与张宾历短长。这时,供职太史监的历算家张胄玄附和孝孙,一道批评张宾历。开皇十四年(594)七月,文帝查问日食测验事,杨素等奏,太史依张宾历所上25日食,仅4例近,他皆无验;而胄玄所定,前后适当,时起分数,合如符契;孝孙所定,验亦过半。杨坚遂有起用之意。孝孙趁机请斩刘晖,高祖不悦,改历之事再度搁置。不久,孝孙死,其历终未施行。

孝孙死后,杨素、牛弘等伤逝之,又荐胄玄。上召见之。胄玄因言日长影短之事,高祖大悦,令与参定新术。刘焯得知消息,便把孝孙历法略事增损,更名七曜新术,上奏。其术与胄玄之法,颇有参差,受到袁充与胄玄的诋毁,又未能成功。开皇十七年(597),胄玄历成。刘晖、刘宜等执旧历驳难,但得到通事舍人颜愍楚的支持。高祖才下决心斥罢刘晖等十人。胄玄所造历法,付有司施行。

胄玄历据刘焯、刘孝孙旧历改写,比张宾历确有进步,但仍有许多粗疏之处。开皇二十年(600),刘焯增修写定了他的著名历法皇极历,上书太子杨广。并于仁寿四年(604)历数胄玄历有六方面的问题,历术不合有六百余处。其中特别指出,开皇五年(585),胄玄曾上一历。而现今所行之胄玄历,与焯前历(七曜历)不异。且孝孙因焯,胄玄后附孝孙。历术之文,又皆是孝孙所作,则元本偷窃,事甚分明。上命仍下其书与胄玄参校。胄玄、刘焯互相驳难,是非不决,焯又罢归。大业四年(608),太史奏曰"日食无效",帝召焯,欲行其历,又为袁充、胄玄相互勾结阻拦,而未能实现。不久,刘焯卒,一代名历竟终未颁行。但历算家咸称其妙。所以皇极历得以著录而保存了下来。



胄玄学祖冲之，兼传其师法。开皇十四年日食验历，“胄玄所克，前后妙衷，时起分数，合如符契”，他是懂历法的。其开皇十七年所行历术，命冬至起虚5度，后稍觉其疏。至大业四年刘焯卒后，乃敢改法。上元冬至日躔，修正为命起虚7度。诸法率更有增损。经改定的历法通称大业历。现在历志所传即为此术。自大业五年(609)，行用到隋恭帝杨侑义宁二年(618)。

开皇十七年颁行的张胄玄历，史无记载。根据焯、玄驳难，知胄玄改正日行盈缩、月行迟疾，仅考虑一次差，不如皇极精确；日躔表组成数据比较粗疏，甚至还有不合理的地方；计算定朔的方法和岁差常数可能也不完善。

大衍历议日度议说，刘孝孙甲子元历，推太初冬至在牛初，下及晋太元、宋元嘉皆在斗17度，开皇十四年在斗13度。而刘焯皇极历仁寿四年冬至日在黄道斗10度，赤道斗11度。其后孝孙改从焯法，而仁寿四年(604)冬至，日亦在斗11度。

《隋书·律历志》载，刘孝孙谈到甲子元历的冬至日躔时说，汉书武帝太初元年丁丑岁，落下闳等考订太初历冬至之日，日在牵牛初。今以甲子元历术算，即得斗末牛初矣。晋时有姜岌，又以月食验于日度，知冬至之日日在斗17度。宋文帝元嘉十年癸酉岁，何承天考验乾度，亦知冬至之日日在斗17度。虽言冬至后上三日，前后通融，只合在斗17度。但尧年汉日，所在既殊，唯晋及宋，所在未改，故知其度，理有变差。至今大隋甲辰(584)之岁，考订历数象，以稽天道，知冬至之日日在斗13度。

《开元占经》卷一百〇五，给出孝孙甲子元历基本法数及各历冬至所在。

姜岌历冬至在斗17；宋何承天元嘉历，雨水室2度；周甄鸾天和历冬至日在斗15度；周马显丙寅元历冬至日在斗12度。

刘孝孙历上元甲子至今开元二年甲寅(714)435230算外。

章岁 619	元法 160940	纪法 8047
日法 1144	岁余 1966	虚分 6407
差分 509	度法 24141	行分 39
会月 2013	会率 341	周法 34320

历朔差分 67442

冬至命度起危前5度

虚分6407，意思是说周天度365加6407/24141的余分(0.2654度)附于虚宿。由上述法数得出：

$$岁差=509/24141=0.021084\ 度/年$$

或47.4283年/度。斗分为6407－509＝5898，故

$$岁实=365+5898/24141=365.244315\ 天$$

章岁619年为32章另11年，设228闰(＝32×7＋4)。纪13章，元20纪。岁

余为 5898×8047/24141。章月 7656(=619×12+228),纪月=13×章月=99528。纪日=8047×365+1966=2939121。月法=纪日/87=33783=朔策×日法 1144。日法=纪月/87。

朔策=纪日/纪月=29+52809/99528=29.53059441 日

隋开皇四年(584)甲辰岁距元积 435101 年。由上述岁差值,知上元距开皇四年冬至日躔已西行 42.234 度。即甲子元历上元冬至日躔在甲辰冬至赤道日度斗 13 度以东 42.23 度。斗宿共 26 度,尚余 13 度,加牛 8、女 12、虚分 0.26 度,可得知上元命起虚宿 9 度。合计 42.26 度。为上元冬至日躔所在。

刘焯历取仁寿四年(604)冬至,日在赤道斗 11 度、黄道斗 10 度,此值较合于天。孝孙后来改而从之。于是甲子元历冬至命起改为虚 7 度,以与刘焯推定的仁寿冬至日躔相合。

张胄玄开皇十七年(597)历上元起虚 5 度。因此历失传。从大业历岁差数值看,很可能亦沿袭刘焯、孝孙,定斯时冬至赤道日躔斗 11 度。大业历岁差为 503/42640=0.011796 度/年,或 84.7714 年/度。由大业历上元至大业四年积年为 1427644,上元冬至日躔虚 5 度应在开皇仁寿以东 39.4 度。可知隋时冬至太阳在斗 11 度。太初元年(前 104)距仁寿四年(604)707 年。由大业历岁差常数,707 年冬至点西行 8.34 度。推太初元年冬至日在斗 19.9 度,距牛初 6 度许,相距过远。故大业四年刘焯卒后,改为上元起虚 7 度。诸法率更有增损。

现以大业历推日度术,计算太初(前 104)、永平甲子(64)冬至赤道日度。方法是,置入元至所求年(上元积年),以岁分 15573963 乘之为通实,满周天分 15574466 去之,余如度法 42640 而一,为积度。不尽为度分。命度以虚 7 度宿次去之,经斗去其分,度不满宿,算外,即所求年天正冬至日所在度分。

太初元年(前 104)距元积年 1426933,积度 334.21;永平七年(64)距元积年 1427100,积度 332.38。以虚 7 度后各宿度去之,得太初元年冬至日在斗 23 度,永平七年冬至日在斗 21 度。这个结果与大衍历议所考及后汉四分历相合。但是仁寿四年,冬至日在斗 13 度却与其时天象不合。这一点又不及胄玄前历了。

《隋书·律历志》著录的张胄玄大业历,就是已经过修改为冬至上元命度起虚 7 度、大业四年(608)戊辰冬至日在斗 13 度的历法。

第二节 张宾历和大业历

一、张宾历的基本用数

隋开皇四年(584)二月颁行张宾历,行用到开皇十六年(596),凡 13 年。历法



基本用数如下：

上元积年：上元甲子至开皇四年甲辰(584)，积4129001，算上(甲子计入)。

元法 6177600(元6纪，纪10蔀)

纪法 1029600

蔀法 102960(亦名度法)

蔀 240 章

蔀月 240×章月

章岁 429(=19×22+11)

章闰 158(=7×22+4)

章月 5306(=429×12−158)

通月 5372209(以日法除之为朔策)

日法(亦名周法)181920(=240×章月/7)

虚分(朔虚分)85391(=30×日法−通月)

朔时法 15160(12分日法得一时之数)

周天分(亦名蔀日、没分)37605463(=365×蔀法+斗分)

余数(亦曰没法)539863(以蔀法除之加360得岁实，即回归年的日数)

岁中 12(岁之中气数)

斗分 25063(以蔀法除之得回归年日的奇零)

气法 24(二十四节气，以气法除岁实得气策)

气时法 8580(12分蔀法得1时之数)

会月 1297

会率 221

一交、食月、食周=会月/会率=5.868778281月

会数 110.5

交食年=会月/会数=346.6172328日

会分 1187258189

会分/会率=通月

会通(亦曰交数)6967755073

会通/会月=通月

会日法 40204320

会日法/会率=日法

会日 173

余 56143

小分 110

$$会日 = 173\frac{56143\frac{110}{221}}{181920} = 173.308616412$$

会虚 125776

小分 111

会日的虚分＝174－会月

会日限 158

余 98838

小分 220.5

会日限＝会日－半朔望月

$$= 158\frac{98838\frac{220.5}{221}}{181920} = 158.54331$$

朔望合月数 14

余 139224

小分 110.5

$$\frac{1}{2}朔望月 = 14\frac{139224+\frac{110.5}{221}}{181920} = 14.76530618\ 日$$

交法 512104800

交分法 2815

交法/交分法＝月法

阴阳历 13

余 110263

小分 2328

$$半交点月 = 13\frac{110263\frac{2328}{2815}}{181920} = 13.606111626\ 日$$

历合 27

余 38607

小分 1841

$$交点月 = 27\frac{38607+\frac{1841}{2815}}{181920} = 27.212223252\ 日$$

朔差 2



余 57921

小分 974

$$朔望月-交点月=2\frac{57921+\frac{974}{2815}}{181920}=2.318389\ 日$$

望差 1

余 28960

小分 1894.5

$$\frac{1}{2}朔差=1\frac{28960+\frac{1894.5}{2815}}{181920}=1.159194553\ 日$$

食限 12

余 81303

小分 433.5

日食前限＝阴阳历－望差＝12.44691707

通周 5012699

近点月＝通周/日法

周日 27

余 100859(亦名小大法)

$$近点月=27\frac{100859}{181920}=27.55441403$$

周虚 81061(＝日法－周日余 100859)

通率 7(蔀日、蔀月与通月、日法的公约数)

定差 44548

差虚 137372(＝日法－定差)

转率 240

分率 758

转率×分率＝日法

日周 1376400

日周/小周＝240

小周 5735(＝章岁 429＋章月 5306)

小周/章岁＝月日行度

岁星合率 41063889

荧惑合率 80297926

镇星合率 38925413

太白合率 60119655

辰星合率 11931125

以蔀法除之，得五星会合周期。

朔策＝蔀日/蔀月＝通月/日法＝29.53061236

岁实＝360＋余数/蔀法＝365＋斗分/蔀法

　　＝365.243424631

近点月＝通周/日法＝27.55441403

以上《隋书·律历志》和《开元占经》所传张宾历全部基本用数。由此可步其时中朔，得出历日，了解五星会合、日月交会的大致情况。没有给出月行迟疾损益率、盈缩积分及五星实测之度。推步月行迟疾改正、日月交食、五星运动和位置有一定困难。张宾历不用岁差和日行盈缩改正，是它的主要欠缺。此后行用的历法都加进了这方面的内容，历法推步和精度进入了一个新的历史时期。在历法规定以无中气之月为闰月之后，闰周的设置实际是多余的。唐后历家不讨论闰周数值也能制订较好的历法。在南北朝和隋，历家仍用改良的闰周来调整回归年数和朔望月数的比率，以期得出较准确的岁实和朔策。张宾历用 429 岁 158 闰，可以表示为 $(19\times22+11=)$429 岁设$(7\times22+4=)$158 闰。各家闰周皆可用$(7n+4)$闰/$(19n+11)$岁来表示。其中 n 为正整数。历代闰周中以祖冲之大明历的 391 岁 144 闰$(n=20)$最为准确，其他历法都嫌设闰稍多。刘孝孙、刘焯攻张宾之失，言学无师法，刻食不中，所驳凡六事。其一云，何承天不知分闰之有失，而用 19 年 7 闰。而这一条意见恰巧稍欠针对性。

二、大业历

自隋文帝开皇十七年(597)丁巳始用张胄玄历，至炀帝大业三年丁卯凡 11 年。大业四年刘焯卒后，张胄玄对他的历法做了修改，上元冬至起虚 5 度，改为命起虚 7 度，诸法率更有增损。自炀帝大业四年(608)戊辰始用，迄恭帝义宁二年戊寅(618)凡 11 年。胄玄前历无传。经过修改的历称大业历，《隋书·律历志》有著录。目前历表，自开皇十七年(597)至义宁二年(618)这 22 年的历谱皆依大业历术推出。胄玄师法祖冲之，步日月有盈缩之算，推五星有平定之率，其推步历日交食，较前法为详，基本合天。大业历基本用数如下：

上元积年：自甲子元至大业四年戊辰，积 1427644 年，算外(甲子不计入)。

章岁 410

章闰 151(＝7×21＋4)

章月 5071



日法 1144

月法 33783

辰法 286(＝1/4 日法)

岁分 15573963

度法 42640

没分 5191321

没法 74521

经过 5191321 日有没日 74521 个。

周天分 15574466

斗分 10866

气法 469040(＝章岁×日法)

气时法 10660(＝1/4 度法)

朔余 607

岁差 503

周日 27

日余 1413

周法 2548

周通 70209

交会通(比古会日)10646729

朔差(比古会数)907057

冬至命度虚 7 度

望差 453528.5

会时法 32604

望数 5776893

外限 4869836

内限 10193200.5

中限 5649404.5

次限 10326089

$$岁实=岁分/度法=365\frac{岁余}{度法}$$

$$=365\frac{10363}{42640}=365.2430347$$

$$朔策=月法/日法=29\frac{朔余}{日法}$$

$$=29\frac{607}{1144}=29.53059441$$

$$转周(近点月)=周通/周法=27\frac{日余}{周法}$$

$$=27\frac{1413}{2548}$$

$$周天=\frac{周天分}{度法}=365\frac{斗分}{度法}=365\frac{10866}{42640}$$

$$=365.2548311$$

小周＝章岁＋章月＝410＋5071＝5481

$$月日行度=\frac{小周}{章岁}=13\frac{151}{410}$$

$$没长(没日时距)=\frac{没分}{没法}=\frac{岁实}{(岁实-360)}$$

$$会日法=12\times会时法=(朔差+会通)\times\frac{日法}{月法}$$

朔差＝朔望月－交点月(交周)

$$交周=\frac{会通}{会日法}=27\frac{83033}{391248}=27.212226$$

以会日法除交食各限，得各限日分值。

大业历在颁行历法中首先将日行盈缩引入。其法和数虽比较粗疏，但后世各历合朔、交会、日月五星运动推步的改善实应归本历创建之功。

大业历术载有太阳视运动不均匀性的改正数值表，即日躔表。此后诸历历术皆行列出。它给出各气日行的损益率和盈缩数。并将日行盈缩改正应用于计算发生日月食定朔望的时刻。在"求朔望入气盈缩术"中，介绍了推算方法。

以入气日算乘损益率，如15得1，余8已上，从1；以损益盈缩数为定盈缩。

对于气中某日的盈缩数，大业历采用线性内插的方法得出。如何在计算定朔时刻中，加进日行盈缩和月行迟疾的改正，在"推朔望加时定日及小余术"中，张胄玄是这样说的：

以入历日余乘所入历日损益率，以损益盈缩积分，如差法而一，为定积分。乃与入气定盈缩，皆以盈减、缩加本朔望小余；不足减者，加时在往日；加之，满日法者去之，则在来日；余为定小余。无食者不须气盈缩。即：

加时定日及小余＝平朔望小余±定积分±入气定盈缩

其中，定积分为月亮改正，入气定盈缩为太阳改正。差法为月实行速减日平行速，由月离表给出。这是正确的算法。在正光、兴和、皇极、麟德、大衍诸历中，皆以月平行入算计算月亮改正。本书后面将要介绍，后者是比较粗疏的做法，理论上也不



严谨。

太阳改正(入气定盈缩)中的损益率、盈缩数由日躔表给出。盈缩数为损益率的累积数,损益率为本气内太阳实行度、平行度之差与月平行度之比,与日法之乘积。

定积分(月亮改正)中的损益率、盈缩积分、差法由月离表给出。月离表数值共分六栏,列出近点月内每日的转分、转法、损益率、盈缩积分和差法。转分为近点月内每日月亮实行分。每日实行度=转分×10/410=转分/41。转法是前后日转分之差。损益率=(10×转分-月平行分)×日法 1144/周法 2548。盈缩积分为每日转分×10-月平行分,所余与日法相乘,内减常数 17,其值的累积数。即:

盈缩积分=∑[(10×转分-平行分)×日法-17]

差法=月实行分-日平行分

月日平行分=月平行度×章岁=章月+章岁

=5071+410=5481

月平行分-日平行分=5481-410=5071

分母是章岁 410,日平行 1 度,即 410 分。

月日实行度=转分×10/410

差法=(月日实行度-日平行度)×410

如月离表入历 1 日,转分 601,月日实行度为 14.6585,日平行 1 度,差法为(14.6585-1)×410=5600。入历 2 日,转分 595,月日实行度为 14.5122,差法为 13.5122×410=5540。

这样,根据入气日、入历日,就可以计算出入气定盈缩和定积分,即太阳、月亮改正。加减平朔望,即可得出食月的定朔望大小余。

月日平行度=(章月+章岁)/章岁

月日平行分=章月+章岁

关于这两式的论证,我们将在本书的后面章节中给出。

在推交会术、推入交法中,大业历对入交日的改正,只考虑太阳的盈缩作用,未计及影响较小的月亮迟疾运动的因素。改正公式为:

入交定余=入交日余±气差

冬至后加,夏至后减。术中,大业历把气差改正按节气分为八段,给出各自数值。

大业历首先引进太阳、五星运动盈缩对五星的始见位置、时刻进行修正,并用匀加速运动方法计算行星行度。大业历推五星术,分为两步:一求星见术,二为行五星法。求星见术说:置通实,各以数去之,余以减数,其余如度法减 1 为日,不尽为日分,即所求年天正冬至后晨平见日及分(其金水,以夕见伏日去之,得者余为夕

平见日及分）；求晨平见月日，置冬至去朔日数及分，各以冬至后日数及分加之，分满度法从日，起天正月，依大小去之，不满月者为去朔日，命日算外，即星见所在月日及分；求后见，各以终日及分加之，满去如前（其金、水各以晨夕加之，满去如前，加晨得夕，加夕得晨）。

其中，通实＝积年×岁分，"数"、"终"为以分（度法）、日表示的五星会合周期，为推五星术的基本法数。大业历以星晨始见作为上元时刻。

内行星在会合周期内两次与日相合（上、下合）。古历称上合经东大距至下合段为"夕见伏"，称下合经西大距至上合段为"晨见伏"。因此，若所求年冬至后晨平见日及分大于夕见伏段，则减去夕见伏日数，所余即夕平见日及分。金水二星晨见伏、夕见伏段长度不一，且动态相反，所以确定金水二星的晨见时刻的属段是必要的。

按求星见术，由会合周期推出的五星晨见东方时刻为星平见时刻。行星的轨道运动为椭圆，由于中心差，五星实际星见时刻或早或迟。因此需经五星运动盈缩改正，得定见时刻。

定见时刻＝平见时刻±行星盈缩改正

大业历，以节气为标准，根据各段入气日数，分段给出行星盈缩改正的数值和算式。

大业历之前，推算五星行度，皆按行星会合周期内各动态段，以平行度计算。大业历引入等差级数的方法计算五星运动，大大提高了五星行度推步的精度。

行五星法，首先计算星初见所在位置。术文说：置星定见之前夜半日所在宿度算及分，各以定见日分加其分，满度法从度。又以星初见去日度数，晨减夕加之，满去如前，即星初见所在度及分。

星定见之前夜半日所在宿度由推日度术推得。依上求出定见日分。星初见去日度数，求星见术中已给出：木，初见伏去日各 14 度；火，17 度；土，17 度；金，11 度；水，17 度。

下面以木星为例，介绍大业历步五星行度的新方法。木星动态为：

初见，顺，日行 10618 分，日益迟 60 分，114 日行 19 度 13832 分而留。26 日乃退，日 6101 分，84 日退 12 度 804 分。又留 25 日 37612 分、小分 4，乃顺。初日行 3837 分，日益疾 60 分，114 日行 19 度 13718 分而伏。分母为度法。动态如表 7－1 所示。

木星在初顺段先疾后迟，后顺段先迟后疾，退行段为匀速运动。大业历采用等匀加速运动等差级数求和方法处理初顺和后顺段的运行。

表 7—1 大业历木星动态

	初顺	前留	退	后留	后顺	夕伏
初行速分	10618	0	6101	0	3837	
公差分	−60	0		0	60	
日数	114	26	84	$25\frac{37612}{42640}$	114	35
总行度	$19\frac{13832}{42640}$	0	$12\frac{804}{42640}$	0	$19\frac{13718}{42640}$	

顺段总行度＝段日×[初日行速＋(段日－1)

×公差(每日速度变化)/2]/度法

代入数值，得：

$$初顺总行度=114\times\frac{[10618+(114-1)\times(-60)/2]}{42640}$$

$$=19+13832/42640\ 度$$

初顺段日益迟，故公差为负。后顺段有：

$$后顺总行度=114\times\frac{[3837+(114-1)\times 60/2]}{42640}$$

$$=19+13718/42640\ 度$$

在会合周期各动态段内任一时刻的木星行度为：

初顺段，入段日 $n\leqslant 114$，木星行益迟

$$初顺行度=\frac{10618n+n(n-1)(-60)/2}{42640}$$

前留段，入段日 $n\leqslant 26$，行星不动

$$前留行度(位置)=19+13832/42640$$

退段，入段日 $n\leqslant 84$，行星按匀速逆行

$$退段行度=19+13832/42640-6101n/42640$$

后留段，行星停止不动，入段日 $\leqslant 25.882$

$$后留段行度=19\frac{13832}{42640}-12\frac{804}{42640}=7\frac{13028}{42640}$$

后顺段，木星日益疾，入段日 $\leqslant 114$

$$后顺段行度=7\frac{13028}{42640}+\left[3837n+\frac{n(n-1)}{2}\times 60\right]/42640$$

知道了星初见所在度分，计算出木星在初顺、前留、退、后留、后顺各段入段日的行度，就得出木星的位置。

此外，大业历以辰刻计时制度给出二十四节气日出日没时刻。这也是中国历法中的第一份日出日入时刻表。

第三节 刘焯皇极历的创法

隋大业四年(608)，炀帝驾幸汾阳宫，太史奏“日食无效”。帝召刘焯，欲行其历，又为袁充、胄玄结伙反对而作罢。又会焯死，一代名历竟未施行。历家皆称其妙。于是李淳风撰写的《隋书·律历志》详细著录了皇极历，使其术得以传世。刘焯泉下有知，应该也是很大的安慰。

皇极推五星以气日法为度法，所推皆密于前历。又推日月食所在，食之起讫，食分多少，及应食不食，不应食而食诸法，皆为前历所无，并立定朔法、定气法及躔衰法，为后世所宗。其术对后世有深远的影响。何承天因合朔交食不在朔望，因以盈缩定其小余，以正朔望之日。故定朔之法为何承天首倡。而刘焯用以治历，至唐初以后历法施行之。刘焯首用定气，大衍以后诸历皆有推定气之法。但直到清初行用西法，历书才用定气注历。诸历推日月度轨漏交会依定气，而注历皆以平气。皇极历日躔表开始列出躔衰——各气太阳实行与平行之差数，也为以后诸历所采用。

一、皇极历的基本用数和步法

上元积年：甲子元距隋仁寿四年(604)甲子，积1008840，算外。

岁率(即章岁)676(=19×35+11)



月率(章月)8361(=7×35+4+676×12)

朔日法 1242

朔实 36677

朔策=朔实/朔日法$=29\frac{659}{1242}=29.530595813$

旬周(甲子周期)60

朔辰 103.5(=朔日法/12)

小周=月日平行分=岁率+月率=9037

月日平行度=(岁率+月率)/岁率$=13\frac{249}{676}$

皇极历676岁有249闰(7×35+4)8361月。每年有$\frac{249}{676}$个闰月，称一年的闰衰。年12月，则每月有$\frac{249}{676}/12=\frac{20.75}{676}$个闰月，名月闰衰。$0.75=\frac{3}{4}$，为大(凡四分



者，皆一为小，二为半，三为大，四为全）。故皇极历推朔术谓每月加闰衰 20 大。

日分制：日、余、秒、么。

度分制：度、分、篾、幺。

三分法：少、太、全。

四分法：小、半、大、全。

气日法 46644

岁数 17036466.5

度准 338

约率 9

气辰 3887(＝气日法/12)

会通 897(＝气日法/日干元 52)

秒法 48

么法 5

$$岁实=岁数/气日法=365\frac{11406.5}{46644}=365.2445438$$

中历计算平气、平朔、入转，通用的方法是：先求出上元至所求年年前冬至日的积日；再由积日分别求出天正冬至大小余，冬至月龄（又称闰余），即冬至距天正经朔的时日，以及冬至与其前近地点（或远地点）的时距。

积日＝上元至所求年积年数×岁实

天正冬正大小余＝$[积日/纪法\ 60]_R$

冬至月龄（闰余）＝$[积日/朔策]_R$

天正经朔大小余＝冬至大小余－闰余

冬至近地点距＝$[积日/近点月]_R$

天正经朔入转日＝冬至近点距－闰余

R 表示求方括号内算式的余数。

以上各式奠定了历法推步的基础。皇极历却另辟蹊径。推经朔术云：

置入元距所求年，月率乘之，如岁率而一，为积月，不满为闰衰。朔实乘积月，满朔日法得一，为积日，不满为朔余。旬周去积日，不尽为日，即所求年天正经朔日及余。即：

入元距所求年×月率 8361/岁率 676

＝积月＋闰衰/岁率 676

朔实 36677×积月/朔日法 1242

＝积日＋朔余/朔日法 1242

用旬周累去积日，至不足减时（小于旬周 60），余数，即所求年天正经朔日及

小余。

按前述求余表示法，有：

闰衰＝[入元距所求年×月率/岁率]$_R$

朔余＝[朔实×积月/朔日法]$_R$

天正经朔大小余＝[积日/旬周]$_R$

由天正经朔可得出上下弦、望、后朔经日。

上弦经日及余＝经朔大小余$+7\frac{475.25}{1242}$

经望大小余＝经朔大小余$+14\frac{950.5}{1242}$

下弦经日及余＝经朔大小余$+22\frac{183.75}{1242}$

次朔＝经朔大小余$+29\frac{659}{1242}$

次月闰衰＝天正经朔闰衰＋20.75

每月加闰衰20.75，得各月之闰衰。

皇极历推气术说：

半闰衰乘朔实，又度准乘朔余，加之，如约率而一，所得满气日法为去经朔日，不满为气余。以去经朔日，即天正月冬至恒日定余。

冬至一定在天正月内。闰衰、朔余皆由求天正经朔时得出。度准、约率为基本法数。有

$$\frac{(\text{半闰衰}\times\text{朔实}+\text{度准 }338\times\text{朔余})/\text{约率 }9}{\text{气日法 }46644}$$

＝去经朔日＋气余/气日法

天正冬至大余＝天正经朔大余＋去经朔日

天正冬至小余＝气余/气日法

天正冬至大小余即交冬至恒气的日期时刻，故命日甲子算外，即恒冬至干支时刻。

转终日 27

余 1255

终法 2263

终实 62356

终全余 1008(＝终法 2263－终余 1255)

近点月(转终)＝终实/终法＝27.5545736

转法 52



篾法 897(＝气日法 46644/转法 52)

闰限 676＝(月率 8361－闰率 249)/12

推入转术：

终实去积日，不尽，以终法乘而又去，不如终实者，满终法得一日，不满为余，即其年天正经朔夜半入转日及余。

皇极历直接用上元以来积日，求天正经朔夜半距近地点的日数和余数。为避免大数字运算，将终实除积日，与终法乘积求余，化成了两次求余运算。即先求 r_1＝[积日/终实]$_R$，次求[(r_1×终法)/终实]$_R$，得天正经朔夜半入转日＋小余/终法。

要计算定朔望，必须先求出平朔望入转日分进行月行迟疾的改正。皇极历"求经辰所入朔弦望"即求经朔望所入日及余方法如下：

经余变从转，不成为秒，加其夜半所入，皆其辰入日及余。因朔辰所入，每加 $7\frac{865\frac{1160.75}{1242}}{2263}$，秒满日法成余，亦得上弦。望、下弦、次朔经辰所入径求者，加望日14，余 1731，秒 1079.5；下弦日 22，余 334，秒 998.25；次朔日 1，余 2208，秒 917。亦朔望各增日 1，减去全余；望 531，秒 162.5；朔 54，秒 325。

首先要将经朔望由以朔日法为分母的小余改换成以终法表示，即需将小余分母由日法变成终法，将"经余变从转"，为此分子需乘一个$\frac{2263}{1242}$的因子。经朔小余换成以终法为分母以后，再加前面得出的天正经朔夜半入转日及余，即得天正经朔所入日及余。

$\frac{1}{4}$朔望月为上弦，半为望，$\frac{3}{4}$为下弦。上弦 $7\frac{475.25}{1242}$，"经余变从转"，分母换成终法 2263，分子需乘因子$\frac{2263}{1242}$，于是上弦由$7\frac{475.25}{1242}$变分母后成 $7\frac{865\frac{1160.75}{1242}}{2263}$，这样有：

$$\text{上弦所入转日、余}=\text{经朔所入转日、余}+7\frac{865\frac{1160.75}{1242}}{2263}$$

同理可得：

$$\text{经望入转日及余}=\text{经朔所入日、余}+14\frac{1731\frac{1079.5}{1242}}{2263}$$

$$\text{下弦入转日及余}=\text{经朔所入日、余}+22\frac{334\frac{998.25}{1242}}{2263}$$

$$次朔入转日及余=经朔所入日、余+1\frac{2208\frac{917}{1242}}{2263}$$

因为

$$朔实-转终日=1\frac{2208\frac{917}{1242}}{2263}$$

而

$$1-\frac{2208\frac{917}{1242}}{2263}=\frac{54\frac{325}{1242}}{2263}$$

$$1-\frac{1731\frac{1079.5}{1242}}{2263}=\frac{531\frac{162.5}{1242}}{2263}$$

所以朔望入转也可如下得出：

$$经望入转日、余=经朔入转日、余+15-\frac{531\frac{162.5}{1242}}{2263}$$

$$次朔入转日、余=经朔入转日、余+2-\frac{54\frac{325}{1242}}{2263}$$

求入辰法度：

度法 46644

周数 17037076

周分 12016

周差 609.5(=周分 12016－岁分 11406.5)

为岁差分，以度法 46644 为分母。

$$周天度=\frac{周法}{度法}=365\frac{12016}{46644}=365.2576108$$

复月 5458

交月 2729

交率 465

交数 5923(=复月＋交率)

交法 7356366(=交数×朔日法)

会法 577530(=交率×朔日法)

交复日 27　余 263　秒 3435

交日 13　余 752　秒 4679



交限 12　余 555　秒 473.5

望差日 1　余 197　秒 4205.5

朔差日 2　余 395　秒 2488

食限 158　余 676　秒 50.5

会日 173　余 384　秒 283

交复日(交点月)＝复月×朔望月/交数

$$=\frac{\text{复月}\times\text{朔实}}{\text{交数}\times\text{朔日法}}$$

$$=27\,\frac{263\,\frac{3435}{5923}}{1242}$$

$$=27.21222217$$

$$\text{交日}=\frac{1}{2}\text{交复日}=13\,\frac{752\,\frac{4679}{5923}}{1242}=13.60611109$$

交复率＝复月×朔实＝200183066

$$\text{交食年}=\frac{\text{交复率}}{\text{会法}}=\frac{\text{复月}\times\text{朔实}}{\text{交率}\times\text{朔日法}}$$

$$=346\,\frac{769\,\frac{101}{465}}{1242}=346.6193375$$

交复日＝交复率/交法

朔差＝朔望月－交点月

$$=\frac{36677\times5923-200183066}{7356366}$$

$$=2\,\frac{395\,\frac{2488}{5923}}{1242}=2.318373637$$

$$\text{望差}=\frac{1}{2}\text{朔差}=1\,\frac{197\,\frac{4205.5}{5923}}{1242}=1.159186819$$

交限＝交日－望差

$$=13\,\frac{752\,\frac{4679}{5923}}{1242}-1\,\frac{197\,\frac{4205.5}{5923}}{1242}=12\,\frac{555\,\frac{473.5}{5923}}{1242}$$

$$\text{会日}=\frac{1}{2}\text{食年}=346\,\frac{769\,\frac{101}{465}}{1242}/2=173\,\frac{384\,\frac{283}{465}}{1242}$$



$$会限=会日-\frac{1}{2}朔望月$$

$$=173\frac{384\frac{283}{465}}{1242}-14\frac{950\frac{232.5}{465}}{1242}=158\frac{676\frac{50.5}{465}}{1242}$$

皇极历推天正经朔入交，第一步先推月行入交表里（黄道内外），第二步推月平入交日及余。其"推月行入交表里"的方法是：

置入元积月，复月去之，不尽，交率乘而复去。不如复月者，满交月去之，为在里数。不满，为在表数。即所求年天正经朔入交表里数。

求次月，以交率加之，满交月去之，前表者在里，前里者在表。

与推天正经朔入转方法类似，为避免大数字运算，将复月除上元积月与交率乘积求余，即将入交表里数=[上元积月×交率/复月]$_R$，化成了两次求余运算。先求：

$$[上元积月/复月]_R=r_1$$

次求：

$$入交表里数=[r_1\times 交率/复月]_R$$

入交表里数如大于交月(2729)，去之，为在里数；入交表里数不满交月，为在表数。此即所求年天正经朔入交、月在黄道内外数。

天正经朔入交表里数，加交率得次月入交表里数。如和满交月，则去之（内减交月），如此，则前月在表者，改为在里；前月在里者易为表。

推月入交日的方法是：以朔实乘表里数，为交实；满交法为日，不满者交数而一，为余，不成为秒。命日算外，即其经朔月平入交日、余。求望，以望差加之，满交日去之，则月在表里与朔同；不满者与朔反。

交实=朔实 36677×表里数

朔实×表里数/交法=交实/(交数×朔日法)

$$=经朔月平入交日+余\frac{秒数}{交数}/朔日法$$

望日平入交日、余=经朔入交日、余+望差

满交日去之，这只有经朔入交大于交限方可能。如设经朔入交月原在里，此时月定距降交点不远（小于望差）。则望日入交，月必刚过升交点，距其很近。故望月仍在里，即月在表里与朔同。望入交日余不满交日情况下，仍设经朔入交月原在里，但位于升至降交点之间，则望日入交月必过降交点而未达升交点，在黄道外，故表里与朔反。

次月平入交日、余=经朔入交日、余+朔差

满交日，去之，则表里与前月反；不满交日，表里与前月同。



"推日入会日术"为：

会法除交实为日，不满者，如交率为余，不成为秒，命日算外，即经朔日入平会日及余。

$$交实/会法 = 入交表里数 \times \frac{朔实}{朔日法 \times 交率}$$

$$= 经朔日入平会日 + 余\frac{秒}{交率}/朔日法$$

在得出月平入交、日平入会日辰后，皇极历首倡进行日月盈缩迟疾运动的修正，得入交、入会常日、定日。求经朔望入交常日、定朔望入交定日的方法是：

以月入气朔望平会日迟速定数，速加迟减其平入交日余，为经交常日及余。

以交率乘定朓朒，交数而一，所得以朓减朒加常日余，即定朔望所入定日及余。其去交如望差以下、交限以上者月食。月在里者日食。即：

入交常日余＝平入交日、余±迟速定数

入交定日、余＝入交常日、余±交率×朓朒定数/交数

速加、迟减，朓减、朒加。望差、交限为白道食限。定朔望所入定日及余，去交若在望差以下，交限以上者月食；朔时日月同度，在上述食限内，月在日道里者则有日食。

求入会常日方法为：

以交数乘月入气朔望所平会日迟速定数，交率而一，以速加、迟减其入平会日余，即所入常日余。亦以定朓朒，而朓减、朒加其常日余，即日定朔望所入会日及余，皆满会日去之。其朔望去会，如望以下、会限以上者，亦月食；月在日道里则日食。

$$入会常日、余 = 入平会日、余 \pm \frac{交数 \times 迟速定数}{交率}$$

入会定日、余＝入会常日、余±朓朒定数

速加、迟减，朓减、朒加。望（半朔望月）、会限为皇极历给出的黄道食限。当定朔望去会小于望数、大于会限时有月食；若月在日道里，日食。

步五星：

岁为木，木数 18605468

伏半平 836848

复日 398，余 41156

岁 1，残日 33，余 29749.5

见去日 14 度

荧惑为火，火数 36377595

伏半平 3379327.5

复日 779,余 41919

岁再,残日 49,余 19106

见去日 16 度

镇为土,太白为金,辰为水(略)

各星复日=星数/气日法

木星复日=18605468/46644

$$=398\frac{41156}{46644}=398.88234$$

火星复日=36377579/46644

$$=779\frac{41919}{46644}=779.8987$$

残日=复日−岁实

=(星数−岁数)/气日法

木星残日=(18605468−17036466.5)/46644

$$=33\frac{29749.5}{46644}=33.6378$$

$$火星残日=779\frac{41919}{46644}-2\times365\frac{11406.5}{46644}$$

$$=49\frac{19106}{46644}$$

火星,因会合周期(复数)较长,残日是复数内减两岁实的余数,故作"岁再"。

日星同经,是为合日。合日前后各有一段时间星光为日所掩,看不见,称合前伏和合后伏。合伏后五星始见时日星相距度数,为"见去日"。皇极历以上元时刻为日星相合。在推算星平见术时,需将起算点推至晨始见的时刻,为此需减去半伏日,这就是"伏半平"的数值。以度法(气日法)除"伏半平"即得各星伏半平的度数。对木、土、水星,它与"见去日"相差不大。对火星、金星有很大的差异。因为火星轨道偏心率较大,盈缩运行起伏很大。平见实见有较大差别,不易确定。

皇极历步五星术有平见、常见、定见的区别。经过行星盈缩改正的星见时刻为常见,定见为对常见日再进行太阳不均匀运动修正后的时刻。求常见日、定见日的方法是:

以转法除所得加减者(行星盈缩改正),为日,其不满,以余通乘之,为余;并日,皆加减平见日、余,即为常见日及余。

以其先后已通者(太阳改正),先减后加常见日,即得定见日、余。

常见日=星平见日±行星改正



定见日＝常见日±太阳改正

太阳改正先后数，先减、后加。

二、皇极历日躔表及日行盈缩的计算

刘焯皇极历中创立了二次差内插算法，并用它计算太阳位置、定气定朔时刻、日月交食、五星定见位置。开创了历法计算的新局面。

皇极历日躔表给出了十二个月二十四气每一气内太阳实行的四项基本数值：躔衰、衰总、陟降率和迟速数。表中为了不出现小数或分数，躔衰、陟降率等数值都各乘了一个常数因子。

躔衰：(太阳实行度－平行度)×日干元52。自冬至到春分，日实行速大于平行速，躔衰为增为正；春分到夏至，实行小于平行，为损为负；夏至到冬至正好相反，表中增为负，损为正。

衰总：其前各气躔衰数的累积值，是冬至到该气交节时太阳实行度与平行度之差的累加累减值与日干元的乘积。冬至、夏至平气即为定气，是日行盈缩的起点。先端、后端其值为0。如实行在平行前称先，实行慢于平行为后。

陟降率：本气内太阳实行度、平行度之差，乘朔日法，积与月日平行度之比。即：

$$\text{陟降率}=\frac{(\text{太阳实行度}-\text{平行度})}{\text{月日平行度}}\times\text{朔日法}$$

$$=\frac{\text{躔衰}/\text{日干元}}{(\text{岁率}+\text{月率})/\text{岁率}}\times\text{朔日法}$$

$$=\frac{\text{躔衰}\times\text{岁率}\times\text{朔日法}}{\text{日干元}\times(\text{岁率}+\text{月率})}$$



陟降与躔衰增损同义同号。

迟速数：其前各气陟降率的累积值。日行盈缩积累的结果，冬至到夏至半年，日实行总在平行之前，故为速；夏至到冬至半年，太阳的实际位置总在平行之后，故为迟。冬至夏至为速迟的起点，迟速为0，称迟本、速本。

日躔表给出二十四节气时太阳实际行度。要计算一年中任一时刻的太阳位置和盈缩改正，需用内插法。大业历使用线性内插法。刘焯皇极历创立了等间距二次差内插算法，提高了精度。

皇极历给出盈泛为16，亏总是17，日限11。“秋分后春分前为盈泛，春分后秋分前为亏总。须取其数，泛总为名，指用其时。春分为主，亏日分后，盈日分前”。即秋分后至春分，太阳走盈历，春分后秋分前，太阳走缩历。泛总是亏总、盈泛的合称。以 T 表示所求的迟速数，Δ_1、Δ_2 为所在的气、后一气陟降率，L 为气的长

度。则：

$$\text{秋分后春分前气长 } L=\frac{\text{盈泛}}{\text{日限}}=\frac{16\times 10}{11}=14.55$$

$$\text{春分后秋分前气长 } L=\frac{\text{亏总}}{\text{日限}}=\frac{17\times 10}{11}=15.45$$

皇极历定义：

$$\text{气末率}=\frac{\Delta_1\times\Delta_2}{2}\times\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}$$

$$\text{总差}=(\Delta_1-\Delta_2)\times\text{日限}/\text{泛总}=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

$$\text{别差}=\text{总差}\times\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}\cdot\frac{1}{L}=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L^2}$$

“前少”指朓朒率前小后大，即 $\Delta_1<\Delta_2$；“前多”为前大后小，即 $\Delta_1>\Delta_2$。

前少时初率＝末率－总差

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{\Delta_2-\Delta_L}{L}\qquad(\Delta_1<\Delta_2)$$

前多时初率＝末率＋总差

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}\qquad(\Delta_1>\Delta_2)$$

$$\text{初日朓朒数}=\text{初率}+\frac{1}{2}\text{别差}$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L}-\frac{1}{2}\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L^2}$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L}+\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2L^2}$$

（前少，$\Delta_1<\Delta_2$）

$$\text{初日朓朒数}=\text{初率}-\frac{1}{2}\text{别差}$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{1}{2}\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L^2}$$

（前多，$\Delta_1>\Delta_2$）

以别差前多者日减、前少者日加初数，得每日朓朒数 δ。以前多为例，有：

$$\delta_t=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{2t-1}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$(t=1,2,\cdots,L)$

迟速数为朓朒数的累积值，由术文得：



$$T_t = \delta_1 + \cdots + \delta_t$$

$$= t\,\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + t\,\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} - \frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

当 $t=L$ 时，$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_L=\Delta_1$。因此 t 日的迟速数 $T(nL+t)$ 为：

$$T(nL+t) = T(nL) + \frac{t}{2L}(\Delta_1 + \Delta_2)$$

$$+\frac{t}{L}(\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

其中 $n=0,1,\cdots,11$，为二分间的节气数；$t=1,2,\cdots,L$，气间的日数。此为刘焯二次差内插公式，与牛顿等间距二次插值公式形式相同。

在由前多转为前少，前少变为前多的过渡气段，计算要做另外处理。

求某气 t 日的朓降、迟速数方法概述如下：

$$气末率 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L}$$

$$总差 = \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L}$$

$$别差 = \frac{1}{L} \times \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} = \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L^2}$$

判断前多、前少：$\Delta_1 < \Delta_2$ 前少，$\Delta_1 > \Delta_2$ 前多。

（甲）前多 $\Delta_1 > \Delta_2$，$\Delta_1 - \Delta_2 > 0$ 情况下：

$$初率 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L}$$

$$初日朓降数 = 初率 - \frac{1}{2}别差$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} - \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{2L^2}$$

$$每日朓降数\ \delta_i = 初日朓降数 - (i-1) \times 别差$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} - \frac{2i-1}{2L^2}|\Delta_1 - \Delta_2|$$

（乙）前少 $\Delta_1 < \Delta_2$，$\Delta_1 - \Delta_2 < 0$ 情况下：

$$初率 = 气末率 - 总差 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L}$$

$$初日朓降数 = 初率 + \frac{1}{2}别差$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2L^2}$$

$$每日朓降数\ \delta_i = 初日朓降数 + (i-1) \times 别差$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{L}+\frac{(2i-1)|\Delta_1-\Delta_2|}{2L^2}$$

t 日朓降数 $=\sum_1^t\delta_t$

$$=\begin{cases} t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2) & (\Delta_1>\Delta_2) \\ t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-t\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L}+\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_2-\Delta_1) & (\Delta_2>\Delta_1) \end{cases}$$

t 日迟速数 $T(nL+t)=T(nL)+\sum_1^t\delta i$

朓加、降减。

为求合朔时的太阳盈缩改正，先将平朔小余化为辰，以气小余化辰减之，再以日限乘日数，得入限。即经朔（弦望同）与其前气之时距。

为求太阳改正，仍分前多（$\Delta_1>\Delta_2$）、前少（$\Delta_1<\Delta_2$）两种情况来分析。

（甲）前多时：

总率＝入限×其气前多之末率/日限

入差＝（泛总－入限）×总差/泛总

总数＝总率＋入限×（总差＋入差）/（2×日限）

（乙）前少时：

总率＝入限×其气前少之初率/日限

总数＝总率＋入限^2×别差/（2×日限^2）

末率、初率、总差、别差意义同前，泛总是盈泛、亏总合称，春分后的节气用亏总17，春分前用盈泛16。

令 t＝入限/日限，为气辰（经朔弦望）距。代入各值得：

（甲）前多时：

$$总率=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}$$

$$入差=\left(1-\frac{入限}{泛总}\right)\times 总差$$

$$=\left(1-\frac{入限/日限}{泛总/日限}\right)\times 总差$$

$$=\left(1-\frac{t}{L}\right)\times\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

$$总数=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{t(\Delta_1-\Delta_2)}{L}-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$



（乙）前少时：

$$总率=t\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{|\Delta_1-\Delta_2|}{L}\right)$$

$$总数=t\,\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{t(\Delta_2-\Delta_1)}{L}+\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_2-\Delta_1)$$

可以看出，前多、前少的总数值与前面推每日迟速术中得出的 t 日朓降数是完全一致的。即，对于计算太阳盈缩改正，t 是整日或非整数日方法、公式是同一的。

（甲）前多：

$$总数=\frac{t}{L}\Delta_1-\frac{t}{2L}\left(\frac{t}{L}-1\right)(\Delta_1-\Delta_2)$$

（乙）前少：

$$总数=\frac{t}{L}\Delta_1+\frac{t}{2L}\left(\frac{t}{L}-1\right)(\Delta_2-\Delta_1)$$

前多、前少总数公式可规范为同一形式：

$$总数=\frac{t}{L}\Delta_1+\frac{t}{2L}\left(\frac{t}{L}-1\right)(\Delta_2-\Delta_1)$$

朓加、降减其气迟速数 $T(nL)$ 即得计算定朔弦望、太阳迟速改正数：

$$T(nL+t)=T(nL)\pm\frac{t}{L}\Delta_1+\frac{t}{2L}\left(\frac{t}{L}-1\right)(\Delta_2-\Delta_1)$$

此即牛顿二次差内插公式。

皇极历首用定气。日躔表中朓降率、迟速数用以计算定弦朔望的太阳改正。计算定气主要考虑太阳的盈缩、太阳实行与平行的差度。日躔表“躔衰”，为本气内太阳实行度、平行度之差与日干元的乘积，“衰总”反映冬至到该气交节时太阳实行度与平行度之差的累计值。计算定气的方法，先“求每日所入先后”，即太阳的实行位置；次“求定气”日及余。定气、恒气是以日长及气日法(46644)分来表示的。要计算平气的改正，也要以日或日分入算。而日躔表的躔衰、衰总各为日实行的、平行度之差与日干元的乘积。日干元 52 与余通 897 的乘积等于气日法。所以先以余通 897 乘躔衰、衰总，使之各化为气日法的日分。而后将躔衰视如朓降率，衰总看作迟速数，如同求每日迟速数同样的方法，即得每日所入先后数及定数。

采用“推每日迟速数术”的方法和算式，取 Δ_1、Δ_2 为所在气及后气的躔衰，得：

每日所入先后数

$$=\frac{t}{2L}(\Delta_1+\Delta_2)\pm\frac{t}{L}|\Delta_1-\Delta_2|\mp\frac{t^2}{2L^2}|\Delta_1-\Delta_2|$$

前多($\Delta_1>\Delta_2$)取上号，前少($\Delta_1<\Delta_2$)取下号。即与前述 t 日朓降数或前多、前少总数具有同样的形式。但此处 Δ_1、Δ_2 为躔衰值。

t 日所入先后定数 $T(nL+t)=T(nL)\pm\sum_{1}^{t}\delta_i$

增加、损减。

将得出的每日所入先后数视作气余，将所计算历日的先后数化作日，后减、先加其日，所得满一恒气，即得二至后一定气之数。这需要反复调整所计算的历日，使所得适满一恒气，此历日即为定气之数。如法由此可算得次一定气。

皇极历岁实 $365\frac{11406\frac{1}{2}}{46644}$，每气长 $15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}$ 日，冬夏二至为日行盈缩始点，恒气即为定气。日躔表给出每气的躔衰和先后数，以先后数先减、后加其恒气，得次气交气定日及小余。如小寒定气日、余 $=15\frac{10192\frac{37}{48}}{46644}-\frac{28\times897}{52\times897}=14\frac{31720\frac{37}{48}}{46644}=14.68$。

以加天正冬至大小余，命以甲子算外，得小寒定气干支及小余。各气衰总为其前各气躔衰的累积值。求小寒定气用小寒条下，求立春定气用立春气下衰总（先后数）。

这是皇极历计算定气的又一方法。由此，可计算一年中任一天（入某气 t 日）太阳距冬至或夏至的实际位置：

$$F(t)=nL+t\pm T(nL+t)/\text{日干元}\ 52$$

先减，后加。n 入气数 $=0,1,\cdots,11$；t 入 n 气日数 $=(1,2,\cdots,L)$。

皇极历在日躔二十四气、七十二候表中给出了夜半漏和昏旦中星度分及刻数。是基于实测得出的。并给出求日出入辰刻的计算方法：

夜刻 $=2\times$ 夜半漏

昼刻 $=100-$ 夜刻

昼间日见刻 $=$ 昼刻 -5

夜日不见刻 $=$ 夜刻 $+5$

辰刻数 $=$ 百刻$/12$

日出实刻数 $=$ 半辰 $+$ 不见刻$/2$

日入实刻数 $=$ 日出实 $+$ 日出见刻

日出实、日入实皆以辰刻数除之，命子算外，即日出、日入所在辰。不满辰，为刻为分。

皇极历首倡用等差级数求和法求每日夜漏。

三、月离表及月行迟疾改正

皇极历称近点月为转终日。月离表给出从近地点开始转终内每入转日月实行



的四项基本数据。

速分：月日实行分＝转法 52×月日实行度

速差：本日月行分－次日月行分

本日行分大于次日，称“消”；小于次日，记作“息”。

$$\text{月日平行度}=\text{小周}/\text{岁率}=(\text{岁率}+\text{月率})/\text{岁率}=(676+8361)/676=9037/676=13\frac{249}{676}=13\frac{19\frac{2}{13}}{52}$$

用转法通为分，得

$$\text{月日平行分}=13\frac{19\frac{2}{13}}{52}\times52=695\frac{2}{13}=695.15385$$

加减数(限)：

$$\frac{\text{月每日实行分}-\text{平行分}}{\text{平行分}}\times\frac{\text{朔日法}}{\text{终法}}\times\text{朔日法}$$
$$=\frac{\text{速分}-\text{平行分}}{\text{平行分}}\times\frac{1242}{2263}\times1242$$
$$=\frac{13\times\text{速分}-9037}{9037}\times\frac{1242}{2263}\times1242$$

近地点到远地点半转周，实行大于平行，其数为加；小于平行，为减。远地点到近地点半周，反之，实行小于平行为加，大于平行为减。

求每日速分(实行分)与平行分之差，其值与加减数相近，相差一个近于 1 的因子。此栏实际与其前诸历损益率相当。有人误会为月实平行差。

朓朒值：月离表加减栏数值是以朔日法系统表示的。皇极历定朔计算中的月亮、太阳改正皆用终法系统。为此需先将加减分数值乘以终法/朔日法$\left(\text{即}\frac{2263}{1242}\right)$化为终法分。朓朒积即其前各日化为终法分的加减数的累积值。

$$t\,\text{日朓朒积}=\sum_{1}^{t-1}\text{加减数}\times\text{终法}/\text{朔日法}$$

$$\text{加减数}=[(\text{速分}-\text{平行分})/\text{平行分}]\times\frac{\text{朔日法}^2}{\text{终法}}$$

所以

$$t\,\text{日朓朒值}=\sum_{1}^{t-1}[(\text{实行分}-\text{平行分})/\text{平行分}]$$

$$\times\frac{朔日法}{终法}\times朔日法\times\frac{终法}{朔日法}$$

$$=\sum_{1}^{i-1}[(实行分-平行分)/平行分]\times朔日法$$

$$=\sum_{1}^{i-1}\left[\left(速分-695\frac{2}{13}\right)/695\frac{2}{13}\right]\times1242$$

$$=\sum_{1}^{i-1}[(13\times速分-9037)/9037]\times1242$$

近地点到远地点半转周，月亮实际位置在平行之前。月在近地点时运行最快，在 1/4 周时达到平行速度，以后变慢，但积盈之度直到远地点消耗殆尽。这半周称作朓。月在远地点速度最慢，实月开始落后于平月，在 3/4 周时月行又达到平行速度，后日益加快，但积缩之度直至近地点始得补齐。在这半周，称月为朒。

近点月中，近地点月速最快，远地点最慢，1/4、3/4 周时月速等于平行。这四点皆为速度转折之点。在月离表加减栏中，数值当由加变减，或由减变加处。皇极历对这 4 点所在之日采取了分段处理的办法，为其后历法效法。

知道了月亮每日的实行度以及实行与平行之差，就可以推求任一时刻的月亮实际位置以及定朔弦望的时日。

前面介绍了由平朔弦望与其前节气之间的时距，推求月朔弦望应平会日所入迟速，即太阳改正的方法。将所得迟速定数，加入朔弦望经辰时分，即得经太阳迟速改正后的朔弦望时刻。这一步皇极历称作"求月平应会日所入"。术中"变从转余"是将迟速定数，像朔弦望经辰小余一样，亦由朔日法改为终法系统。即将以朔日法 1242 为分母表示的余数，变成以终法(2263)为分母表示(分母由 1242 换成 2263 后，只需将分子乘$\frac{2263}{1242}$即可)。这样做了以后，得出：

平会所入日、余

=经辰所入余±月朔弦望会日所入迟速定数

（速加、迟减）

求朔望弦月亮改正的方法为"推朔弦望定日"术。以 Δ_1 表示平会所入日加减限(月离表中之加减数)，Δ_2 为次日加减限，即后限。入余是平会所入不足一日的分数。计算月亮改正根据入转日、分，以终法为日分，即 1 日 2263 分。令 t=入余/终法，不足 1 日的奇零表示成日的分数或小数。据术文：

$$通率=(\Delta_1+\Delta_2)/2$$

$$限衰=|\Delta_1-\Delta_2|$$

(甲)前多($\Delta_1>\Delta_2$)时：

$$限数=\left\{通率+\frac{1}{2}\left[\frac{终法-入余}{终法}\times限衰+限衰\right]\right\}\times\frac{入余}{终法}$$



$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{2}(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)+t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

(乙)前少($\Delta_1<\Delta_2$)时：

$$限数=\left[通率+\frac{1}{2}\frac{入余}{终法}\times限衰-限衰\right]\times\frac{入余}{终法}$$

$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{t}{2}(1-t)(\Delta_2-\Delta_1)-t\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}$$

前多限数、前少限数算式与前面介绍日躔改正得出的前多总数、前少总数算式相同。仅限数算式中相应的 $L=1$ 而已。同样，此二式也可合成一式。即：

$$平会加减限数=t\Delta_1+\frac{t}{2}(t-1)(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$=\frac{t}{2}(\Delta_1+\Delta_2)\pm t|\Delta_1-\Delta_2|\mp\frac{t^2}{2}|\Delta_1-\Delta_2|$$

前多($\Delta_1>\Delta_2$)取上号，前少($\Delta_1<\Delta_2$)取下号。

由几何图形可看出，平会加减限数算式是按直线梯形计算入余(不足 1 日的奇零部分)得出的。这可视作一级近似式。为提高精度，皇极历又给出进一步修正的方法，即求限数的改正量。这一步皇极历术文前两句含义不明，学者有不同理解。"其限数又别从转余为变余，朓减朒加本入余。"纪志刚先生解释为，"限数"，即第一层次求得相应于"入余"的改变量，要以此作为时间的自变量，故须化为以"统法"为分母，这一分母的转换称作"别从转余为变余"。即限数化作变余。

变余"朓减朒加本入余"，组成了新的自变量"入余±变余"(朓减、朒加)。精密的月亮改正应以"入余±变余"来求得。为此皇极历先求"变余"的改正量，积作限变值。



"限前多者，朓以减与未减，朒以加与未加，皆减终法"。因前文有"(变余)朓减朒加本入余"，故此处是指朓的情况下，减去变余的入余与未减变余的入余，皆减终法；朒的情况下，加上变余的入余及未加变余的入余，也皆减终法。

令 t_0＝变余/终法。这样，据术文，限前多($\Delta_1>\Delta_2$)者，限变值分朓朒两种情况，有：

$$朓限变值=\left\{通率+\frac{1}{2}\left[(终法-入余)+终法-(入余-变余)\right]\frac{限衰}{终法}\right\}\times\frac{变余}{终法}$$

$$=\left\{通率+\frac{1}{2}\left[\frac{终法-入余}{终法}+\frac{终法-入余}{终法}+\frac{变余}{终法}\right]限衰\right\}\times\frac{变余}{终法}$$

$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$+\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$\text{朒限变值}=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}[(\text{终法}-\text{入余})+\text{终法}\right.$$

$$\left.-(\text{入余}+\text{变余})]\frac{\text{限衰}}{\text{终法}}\right\}\times\frac{\text{变余}}{\text{终法}}$$

$$=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\frac{\text{终法}-\text{入余}}{\text{终法}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\text{终法}-\text{入余}}{\text{终法}}-\frac{\text{变余}}{\text{终法}}\right]\text{限衰}\right\}\times\frac{\text{变余}}{\text{终法}}$$

$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$-\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

得出限变值以后，“所得以朓减、朒加限数，加减朓朒积而定朓朒”，即月亮改正。

定朓朒(月亮改正)＝朓朒积±限数±限变值

朓减、朒加。朓时限数修正为“限数－限变值”，朒时修正为“限数＋限变值”。

朓朒限变值，可统一变形为：

$$\text{限变值}=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

$$+\frac{1}{2}(t_0-2tt_0\pm t_0^2)(\Delta_1-\Delta_2)$$

符号朓加、朒减。

$$\text{限数}=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+\frac{t}{2}(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)$$

朓时，

$$\text{限数}-\text{限变值}=(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+(t-t_0)\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

$$+\frac{1}{2}(t-t_0)[1-(t-t_0)](\Delta_1-\Delta_2)$$

朒时，

$$\text{限数}+\text{限变值}=(t+t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+(t+t_0)\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}$$

$$+\frac{1}{2}(t+t_0)[1-(t+t_0)](\Delta_1-\Delta_2)$$



同理，前少（$\Delta_1<\Delta_2$）时，

$$\text{朓限变值}=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t_0(\Delta_1-\Delta_2)+\left(t_0t-\frac{t_0^2}{2}\right)(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$\text{朒限变值}=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t_0(\Delta_1-\Delta_2)+\left(t_0t+\frac{t_0^2}{2}\right)(\Delta_1-\Delta_2)$$

朓时，

$$\begin{aligned}&\text{限数}-\text{限变值}\\&=(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-(t-t_0)(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{(t-t_0)^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)\end{aligned}$$

朒时，

$$\begin{aligned}&\text{限数}+\text{限变值}\\&=(t+t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-(t+t_0)(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{(t+t_0)^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)\end{aligned}$$

令 $T=t\pm t_0$（朓－，朒＋），则上列前多、前少时的限数±限变值（朓减、朒加）四式，可统一为：

$$\text{限数}\pm\text{限变值}=T\Delta_1+\frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)$$

由此看出，二次近似算式形式上与一次近似相同，仅自变量由 $t\left(\frac{\text{入余}}{\text{终数}}\right)$ 改变为 $T\left(\frac{\text{入余}\pm\text{变余}}{\text{终数}}=t\pm t_0\right)$ 而已。

月亮改正（定朓朒）＝朓朒积±限数±限变值

即

$$\text{月亮改正 } S(n+T)=S(n)\pm\left[T\Delta_1+\frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)\right]$$

朓减、朒加。这样，经日月改正，即可得出定朔弦望时刻。

朔弦望定日、余＝经辰所入余（平朔望弦时刻）

±太阳迟速改正±月亮朓朒改正

迟减，速加；朓减，朒加。

皇极历创立的定朔推步方法，首先为麟德历沿用。唐代诸历算法基本相同而有所发展。由上面讨论看出，推算方法是非常复杂的。实际上，唐初戊寅历以前，历书上只用平朔注历，定朔望的计算是为预报日月食使用的。戊寅历、麟德历开始，历书以定朔注记。但通常历书定朔的计算，太阳、月亮运动改正俱简化采用线性内插得出。在对太阳、月亮运动的认识还不充分的时候，日躔表、月离表反映的日月实际运动误差很大。基本数据不准确，仅从计算方法上来改进，往往是事倍功半的。



第四节　初唐戊寅元历及月食步法

一、戊寅元历的颁行及校订

隋大业十三年(617),太原留守李渊起兵西进,渡河入长安。大业十四年(618)戊寅三月,隋将宇文化及等杀炀帝。五月,李渊迫隋恭帝禅位,建立唐朝,改元武德。东都(洛阳)道士傅仁均言戊寅岁时正得上元之首,宜定新历,以符禅代。由是造戊寅历。所陈七事称:①唐以戊寅岁甲子日登极,历元戊寅,日起甲子,如汉太初;②冬至五十余年辄差1度,日短星昴,合于尧典;③周幽王六年十月辛卯朔,入食限,合于诗;④鲁僖公五年壬子冬至,合春秋命历序;⑤月有三大三小,则日食常在朔,月食常在望;⑥命辰起子半,命度起虚6度,符阴阳之始;⑦立迟疾定朔,则月行晦不东见,朔不西朓。

戊寅岁前冬至大业历适逢癸亥午时冬至,真实天象当癸亥日晚。傅仁均选戊寅岁作历元,日起天正冬至甲子,与天相近。但至朔并不相齐起于夜半。冬至月龄十五日许,当天正月半。并不似汉太初改历,甲子至朔同日起于夜半。所陈最主要的内容是傅仁均强调采用定朔,称如此则日食常在朔、月食总在望,月行晦不东见,朔不西朓。

高祖诏司历起二年(619)用之。戊寅历是中国第一部用定朔的历法。

三年(620),按戊寅历正月望及二月、八月朔当食,经校验不效。实际上正月望(2月23日)、二月朔(3月10日)、八月朔(9月2日)皆入食限。正月望为小食分半影月食,目视不可见。二月朔巳时日环食、八月朔未时日全食都发生在低纬度或赤道附近,中国见不到而已。说来也巧,预报的这三次交食发生在同一年,恰恰都不可见。因此造成了戊寅历预推日月食不能符合天文实际的印象。笔者认为,7世纪初傅仁均能推出这样的交食已属不易,是时尚无计算各地不同见食情况的方法。

由于交食不效,高祖诏吏部郎中祖孝孙考其得失。孝孙使算历博士王孝通诘难傅仁均。孝通不明岁差之理。诘问说,若是尧时仲冬星昴昏中,至月令已差至东壁,那么尧前七千余年,按此当冬至昏翼中,日应在东井了。井(夏至日所在)极北,去人最近,故暑。斗极南(斗,冬至日所在),去人最远,故寒。按这种说法,不是寒暑易位了吗?此外,他还反对用定朔。认为这样虽然朔日正当合会,但月长没有规律,失去了历法推步蔀元纪首三端齐同的条件。傅仁均答辩称,孝通未晓岁差,把南斗视作冬至常星,才会有寒暑易位的说法。古人用平朔,故秦汉以来,多非朔食。为纪其日数之元,三端不可死拘。冬至自有常数,朔名由于月起,月行有迟有速,三



端安得即合。只要日月相合，至朔同日即为合朔冬至。孝孙认为仁均有道理。

九年(626)，复诏大理卿崔善为与王孝通等校订。善为改动了几十条。其中最重要的改动复行上元积年。傅仁均本术以武德元年为历始，而气朔迟疾、交会及五星皆给出武德元年的测算数据，称为加减差。有些类似授时历的气闰转交周合历等七应。定朔和不用上元积年，是戊寅历的两大发展。

贞观初，直太史李淳风又上疏论历十八事。复诏崔善为考校二家得失。其七条改从淳风。十四年(640)太宗将亲祀南郊。历以十一月癸亥朔，甲子冬至。而淳风新术为甲子合朔冬至。乃上言，古历分日起于子半。十一月当甲子合朔冬至，傅仁均以减余稍多，子初为朔，遂差三刻。又以平朔推之，二历皆以朔日冬至。因平朔自古行之，虽癸亥日月相及，明日甲子，仍可为朔。司历南宫子明、太史令薛颐、国子祭酒孔颖达皆请从淳风，从之。十九年九月后四朔频大。于是下诏改用仁均平朔，迄麟德元年(664)。

戊寅历关于日行盈缩、月行迟疾及定朔的算法与大业历原则相同。而采用定朔基本参照刘孝孙、刘焯的主张。《新唐书·历志》和《旧唐书·历志》均有著录，内容详略不一，但大致相同，皆为武德九年崔善为所校改的历经。傅仁均本术无传。《旧唐书》为后晋刘昫领衔修撰，成书于开运二年(945)。《新唐书》为宋祁、欧阳修撰修。历志由欧阳修、刘羲叟撰写。成书于嘉祐五年(1060)。晚于《旧唐书》百余年。《旧唐书·历志》戊寅历记载有残缺，仅存五星、交会两部分，但较《新唐书·历志》详尽。错字较多，保留了一些崔善为等校改的痕迹。

旧志"推交分术"文中，有下列一段话：置入上元已来积月，以交会法去之，余以朔差乘之，满交会法，又去之(仁均本术，武德年加交差 7755164 分)。余为所求年天正朔入平交分。



这其中保存了傅仁均本术以武德元年为元，其交会的加减差是 7755164 分。我们来校算一下，看看崔善为的较定本除复用上元积年外，有没有改动傅仁均本术的数据。

《新唐书》给出戊寅历上元戊寅岁至武德九年丙戌，积 164348 算外(《旧唐书》"戊寅历经"前面部分缺失)。于是得上元至武德元年积 164340 算外。

由术文有：

武德元年积月＝Int[章月×积年/章岁]

＝2032613

朔差＝1085494.2，交会法＝12741205.8

武德元年天正朔入交数＝[积月×朔差/交会法]$_R$

积月×朔差＝2206389622345

$$积月\times朔差/交会法=173169\frac{7755164.8}{12741205.8}$$

得武德元年天正经朔入交数=7755164.8分。与术文保存的"仁均本术，武德年加交差7755164分"完全一致。可证崔善为等所改数十条，并未变动仁均本术的法数。7755164.8分相当于武德元年天正经朔距交16.56322日[=7755164.8/(36×13006)]。

二、戊寅历法数

戊寅历上元戊寅岁至武德九年(626)丙戌，积164348，算外。

章岁676

章闰249

章月8361

月法384075

日法13006

时法6503(=日法/2)

度法(气法)9464

气时法1183(=气法/8)

岁分3456675

岁余2315(岁实365日的余分)

周分3456845.5

斗分2485.5(周天365度的余分)

没分76815

没法1103

历日27

历余16064

历周798200

历法28968

余数49635(=岁分-360×气法)

$$岁实=岁分/气法=\frac{3456675}{9464}$$

$$=365\frac{2315}{9464}=365.24461116$$

$$朔实=月法/日法=\frac{384075}{13006}$$



$$=29\frac{6901}{13006}=29.53060126$$

$$周天=周分/度法=\frac{3456845.5}{9464}$$

$$=365\frac{2485.5}{9464}=365.2626268$$

$$岁差分=周分-岁分=170.5$$

$$没日距=\frac{没分}{没法}=\frac{岁分}{余数}=69\frac{708}{9464}$$

$$历周日=历周/历法=27\frac{16064}{28968}$$

$$=27.55454294$$

$$月每日平行分=月每日平行度\times 章岁$$

$$=章月+章岁$$

$$=8361+676=9037$$

$$月每日平行度=(章月+章岁)/章岁=\frac{9037}{676}$$

戊寅历日躔表的内容、形式与大业历相同，只列出二十四气下的损益率和盈缩数两组数据。戊寅历与大业历一样，历术中不算定气，损益率、盈缩数用来推算定朔的太阳改正。方法是：

$$定盈缩分=盈缩数\pm 入气日\times 损益率/15$$

所得即为太阳改正分。由此看出，损益率、盈缩数与皇极历日躔表中的陟降率和迟速数相当。其数值为：

$$损益率=\frac{本气太阳实行度-太阳平行度}{月每日平行度}\times 日法$$

盈缩数是其前各气损益率的累积值。

$$月每日平行度=(章岁+章月)/章岁$$

日每日平行1度。日法为日的分数。太阳实行度根据实测得出。皇极历、麟德历及以后各历日躔表皆直接给出由实测得出的太阳实行度与平行度之差及其累加累减值。供直接计算定气和太阳位置使用。

戊寅历月离表在一近点月内每日下给出行分、损益率、盈缩积分三个数据。行分为月亮在近点月内每日的实行分，即月日实行度×章岁676，是月离表的最基本数据。损益率为月实行与平行分之差与日法相乘，再被历法除所得之值舍入取整。盈缩积分为其前诸日月实行分、平行分之差与日法相乘的累积值，再加一改正量。即

$$行分=月实行分=月实行度\times 676$$

$$损益率=(行分-平行分)\times\frac{日法\ 13006}{历法\ 28968}$$

舍入取整，即：

$$损益率=\mathrm{Int}[(行分-平行分)\times 日法/历法]$$

$$盈缩积分=\sum_{1}^{n-1}[(行分-平行分)\times 日法]\pm\Delta$$

其中 $\Delta=5$ 或 6，随历日而不同。

月离表后注明，历行分与次日相减为行差，后多为进，后少为退。减去行分676，为差法。即：

$$行差=|历行分-次日历行分|$$

如 1 日行分 9909，2 日 9810，后少为退，故行差为退 99。

$$差法=历行分-日平行分\ 676$$

在大业历中行差称转法（大业历 10× 转分为月亮实行分），转法与差法数值俱列于月离表内。

由月离表可以计算月亮的实行位置和定朔弦望的月亮改正。得到太阳、月亮改正后，用来修正经辰时刻，即得定朔弦望时刻。方法是：

入历定盈缩积分

=（盈缩积分±入历日余×所入日损益率）/差法

定朔弦望大小余

=平辰小余±入气盈缩积分±入历盈缩积分

入气盈缩积分即前面得出的太阳改正，盈加、缩减；入历盈缩积分为月亮改正，盈减、缩加。要注意的是，入历日余是以历法 28968 分表示的，即入历日小数需乘 28968 化为分入算，入气积分、入历积分与平辰小余（亦化为日法分）加减时，大于日法 13006，需进 1 日；不足日法在其日；小余不足减，则加日法分减，这样定日在前 1 日。

戊寅历计算入气、入历盈缩，数学上使用的都是线性内插。实际上中国历法历书上所注的朔望，全是依线性内插得出的。

三、戊寅历步交会术

（一）法数

交会法 12741205.8

交分法 6370602.9（=交会法/2=望差+交限）

朔差 1085494.2（=36×月法-交会法）



望分 6913350[＝(交会法＋朔差)/2]

交限 5827855.8(＝交分法－望差)

望差 542747.1(＝朔差/2)

外限 6760782.9(＝交分法＋10 交时法)

中限 12351025.8(＝交会法－10 交时法)

内限 12198458.7(＝交会法－望差)

交时法 39018(＝36×日法/12)

因为交点月＋朔差＝朔望月，代人各值得出步交食日分为 36×日分 13006＝468216。于是可得：

$$交点月=\frac{交会法}{36\times 日法}=27\,\frac{99373.8}{36\times 13006}$$

$$=27.21223922$$

$$交分日=\frac{1}{2}交会日=13\,\frac{283794.9}{36\times 13006}$$

$$朔差日=\frac{朔差}{468216}=\frac{36\times 月法\ 384075-交会法}{36\times 13006}$$

$$=2\,\frac{149062.2}{36\times 13006}=2.318362038$$

$$望日=望分/468216=14\,\frac{358326}{36\times 13006}$$

$$=14.76530063$$

$$望差日=望差/468216=1\,\frac{74531.1}{36\times 13006}$$

$$=1.159181019$$

$$交限日=交限/468216=12\,\frac{209263.8}{36\times 13006}$$

$$=12.44693859$$

$$外限日=14\,\frac{205758.9}{36\times 13006}=14.43945294$$

$$中限日=26\,\frac{177409.8}{36\times 13006}=26.37890589$$

$$内限日=26\,\frac{24842.7}{36\times 13006}=26.05305820$$

外限日、中限日、内限日皆为以 36×13006 除外限、中限、内限分得出。

(二)推交分术

天正月朔人平交分＝[朔差×积月/交会法]$_R$



天正月望入平交分＝天正朔入交分＋望分

次月朔入平交分＝天正朔入平交分＋朔差

得出入交分后，戊寅历采用入气加减法对其修正，得定交分。依术文，气差改正如下：

时段	气差
大雪、冬至两气	0
交小寒至交惊蛰	$+1650\times n$ $(n=1,\cdots,3\times15.2)$
交惊蛰至交谷雨	$+76100$
交谷雨至交芒种	$+1650\times(3\times15.2-i)$ $(i=1,\cdots,3\times15.2)$
交芒种至交小暑	0
交小暑至交白露	$-1200\times n$ $(n=1,\cdots,4\times15.2)$
交白露至交立冬	-95825
交立冬	-63300
立冬次月至交大雪	$-2110\times(2\times15.2-i)$ $(i=1,\cdots,2\times15.2)$

若朔望入交在小寒至惊蛰及立夏到芒种间，值盈2时以下，则只加半气差，2时以上，皆不加。加差时，满交会法即去；如减差时，不够减，则加交会法再减。平入交分经入气加减后得定入交分。即

定入交分＝平入交分±气差

《旧唐书》的方法与此相仿，节气略有差异。得出的定交分，小于交分法时，为在外道；大于交分法时，则去之，余为在内道。其值如在望差以下，为去先交分。交限以上，以减交分，余为去后交分(＝交分－交限)。皆以3乘日法13006约之，为去交时数。望时，这时会发生月食；朔时，内道满足上述条件，则有日食。但虽在外道，去交近仍有食，在内道去交稍远亦不食。

“推月食加时术”给出推算食甚时刻的方法。有月食的望日小余，若入历1日，则减280分；入历15日，加280分；入历14日，加550分；而28日，减550分。所余值盈历皆加280，值缩皆减280。所得即为食望定余。将定余以12乘，时法6503除，所得为半辰之数。命子半算外，即月食所在辰。因所得为半辰数，日24个半辰12时辰。故皆以2算为1辰，即辰初辰正。不尽为时余。

前限、望数、后限、会限(＝半食年－前限、望数)为黄道食限。太阳日行1度。



由日变度为食限度。望差、交限为白道食限。由日化为度数需乘以月每日平行度，为食限度（黄道距交度）。

旧唐志“推月食食分”方法是：

令交时法 39018（=3×13006）。2 时=2×39018，半时=0.5×39018，于是有：

食分=15－不食分

其在冬先后交、春后交、秋先交：

食分=15－（去交分－2×39018）/36183

若春先交、秋后交：

食分=15－（去交分－39018/2）/36183

夏先后交：

食分=15－去交分/36183

去交分不足减时，为月全食。

根据“推月食所起术”所言，戊寅历认为，月在外道，即降交点至升交点黄道南的时候，初亏起东北，食甚西北。若在内道，即在升交点至降交点黄道北半圈时，初亏起东南，食甚西南。13 分以上大食分月食，初亏起正东。方位皆据正南方观看而言。

新旧唐书皆给出月食从初亏到复满全程时间的步法。做法是先求出刻率。《新唐书·历志》术文说：

置日月食分，四以下，因增二；五以下，因增三；六以上，因增五。各为刻率，副之。

而《旧唐书》“月食分用刻率”为，食 1 分用 3 刻，2 分用 4 刻，3 分用 5 刻，4 分 6 刻，5 分 8 刻，6 分 9 刻，7 分 10 刻，8 分 11 刻，9 分 13 刻，10 分 14 刻，11 分 15 刻，12 分 16 刻，13 分 18 刻，14 分用 19 刻，既用 22 刻。相当于，4 以下，增 2；8 以下，增 3；12 以下，增 4；14 以下，增 5；全食为 22 刻。与《新唐书》所述稍有不同。

依刻率，求得定用刻数。再得出初亏、复满辰刻。由术文有：

定用刻=刻率±刻率×入历损益率/4057

损益率盈减、缩加。

$$亏初辰刻=食甚辰刻-\frac{6}{10}\times定用刻$$

$$复满辰刻=食甚辰刻+\frac{4}{10}\times定用刻$$

月食全程时间即亏初至复满辰刻数。

由上看出，戊寅历计算定用刻，已加进了月行迟疾的改正，对月食亏初、复满时刻进行修正。这是交食计算方法的一项新的改革。

步日食法与此相仿，可参照月食步法解读术文得出。

第五节 平朔定朔及天文实朔的计算

唐以前中国古历，历书都以平朔注历。傅仁均戊寅历首用定朔，这是历法上一重大改革。

日月同经，谓之合朔。古代历法，认为日月五星皆以匀速运动。取朔望亏盈月相变化的平均周期作为朔望月的长度。这样得到的合朔，称作平朔。实际上，由于地球绕日、月球绕地公转，月相朔望亏满变化是地球上看到的这两种公转运动的综合结果。地绕日、月绕地的公转周期分别以 E、T 表示。若将地、月相对于恒星的平均运动速度称作 n、n'。则恒星年 E、恒星月 T、会合周期朔望月 S 的长度及其间的关系为：

$$E=\frac{360^\circ}{n},T=\frac{360^\circ}{n'},S=\frac{360^\circ}{n'-n}$$

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{T}-\frac{1}{E}$$

如果地绕日、月绕地公转速度不变，那么朔望月长度也就固定。但实际上由于地、月运行轨道并非正圆而是椭圆，轨道运动的角速度时有变化，而且 E、T 也都有摄动改变，所以朔望月周期是有变化的。笔者统计，实际朔望月长度变化于 29.25～29.90 日之间。由于古历历元的选取及章岁章闰的配合，长时期朔实误差的积累，往往平朔也有一定的失天。日食在朔、月食在望。因此文献常有日食发生在晦、先晦一日及月二日的记载。当历朔后天时，朔先于历，朔或在晦，食或晦见。此时朔日就可能在傍晚西方天空看到新月。这种情况，古书上称作月朓，朔而月走在日前称朓。反之如历先天，则朔后于历，食可能在初二日发生。如此，则可能在朔日清晨的东方见到残月。朔而月见东方，即朔时月缩在日后，称朒。盈者谓朓；亏缺、不足、缩者谓朒。一般这是由于历法失天所致。由于日行盈缩、月行迟疾引起的实朔平朔的差别，往往会使推算的日月食时刻不准，当食不食，或预报看不到的食而看到了。历法疏密，验在交食。验食不效，说明历法计算的日月食加时，率多不中。在汉以前这是由于不知日行、月行有盈缩、迟疾之故。东汉贾逵认识了月行有迟疾，刘洪乾象历首创月离表，并给出月亮改正的算法。张子信发现日行盈缩，张胄玄、刘焯的定朔算法同时加进了太阳盈缩、月行迟疾改进，并首先在历法中使用日躔表。此后历法验食不效，主要就是日躔表、月离表不够准确的原因了。当然平朔有差仍是关键问题。

设 L、L' 为月亮、太阳的平黄经，$D=L-L'$ 为月日平距角。平朔时刻 T_0 时，日月平黄经相等，$D_0=L_0-L'_0=0$。令 l、l' 为月、日平黄经与真黄经 λ、λ' 的改正量。即有：

$$\lambda=L+l,\lambda'=L'+l'$$



$$l=\lambda-L, l'=\lambda'-L'$$

称 D、l、l' 1 日的改变量为 ΔD、Δl、$\Delta l'$。由已知平朔时刻的这些量，求距离平朔 T_0 时刻 t 时的月、日真黄经差，有：

$$(L+l)-(L'+l')$$
$$=(L_0-L'_0)+t\Delta D_0+(l_0+t\Delta l_0)-(l'_0+t\Delta l'_0)$$

$(L-L')$ 的改正量为 $t\Delta D_0$，l_0 的改正量为 $t\Delta l_0$，l'_0 的改正量为 $t\Delta l'_0$。设 T 时，月日的真黄经相等，为定朔。此时有 $(L+l)-(L'+l')=0$，L_0、L'_0 为平朔时的月日平黄经，故 $L_0=L'_0$。于是有：

$$t\Delta D_0+l_0+t\Delta l_0-l'_0-t\Delta l'_0=0$$
$$l_0-l'_0+t(\Delta D_0+\Delta l_0-\Delta l'_0)=0$$

所以

$$t=\frac{l'_0-l_0}{\Delta D_0+\Delta l_0-\Delta l'_0}$$

而

$$T=T_0+t$$

这里

$$l_0=5^\circ.058\sin g+0^\circ.146\sin 2g$$
$$-0^\circ.238\sin g'-0^\circ.130\sin 2F+\cdots$$
$$l'_0=1^\circ.919\sin g'+0^\circ.020\sin 2g'+\cdots$$

1 日的变化量

$$\Delta D_0=12^\circ.191=\text{月每日平行度}-\text{日每日平行度}$$
$$\Delta l_0=0^\circ.273+1^\circ.727\cos g+0^\circ.101\cos 2g-0^\circ.053\cos 2F$$
$$\Delta l'_0=0^\circ.033\cos g'+0^\circ.001\cos 2g'$$

其中，g、g' 为月、日的平近点角。F 为月的升交距角，称月平纬度引数。

$$g=296^\circ.1046+477198^\circ.84911I$$
$$g'=358^\circ.4758+35999^\circ I$$
$$+179''.1I-0''.54I^2$$
$$F=11^\circ.2509+483202^\circ.02515I$$
$$I=(JD\text{儒略日}-2415020.0)/36525$$

I 历书时表示的距 1900.0 的儒略世纪数。

由上式计算得出 t，由 $T=T_0+t$，可以得出比较准确的实朔时刻。

Δl_0、$\Delta l'_0$ 相对于 ΔD_0 是小量，可以略去。于是：

$$t=\frac{l'_0-l_0}{\Delta D_0}=\frac{l'_0}{\Delta D_0}-\frac{l_0}{\Delta D_0}$$

此式右边第一项，是日行盈缩改正，第二项是月行迟疾改正。l'_0 是平朔时太阳真黄经与平黄经之差，即实行度与平行度之差。l_0 为平朔时刻月亮真黄经与平黄经之差，亦即实行度与平行度差。ΔD_0 是月亮太阳每日平行度之差。所以

$$定朔时刻=平朔时刻+\frac{日实行-日平行}{月行-日行}-\frac{月实行-月平行}{月行-日行}$$

由此可清楚看出，太阳实行大于平行、速度快于平行时，太阳改正为正；反之，日实行速小于平行速，实太阳在平太阳后，太阳改正为负。月亮改正的情况正好相反。月亮实行速大于平行速，实月在平月前，月亮改正为负；月实行速低于平行速，实月在平月后，则月亮改正为正。

在大业历、戊寅历日躔表中，仅给出每气的损益率和盈缩数两项数值。损益率为日实行与平行之差被月平速除；盈缩数给出其前各气损益率的累积值。这是现存最早的两份日躔表。皇极历、麟德历及以后的日躔表，基本上每气都给出四项数值：日实行分与平行分之差，它的累积值，以月平行除日实行与平行之差及它的累积值。日躔表是供推步太阳实际位置、定气和定朔望用的。各历栏目名称稍有差异，内容大致相同。大业历、戊寅历日躔表的损益率、盈缩数，与其他日躔表的后两项数值相当。是用来计算定朔时作太阳改正使用的。与上面得出的定朔改正算式

$$t=\frac{l'_0}{\Delta D_0}-\frac{l_0}{\Delta D_0}$$

$$=\frac{日实行-日平行}{月行-日行}-\frac{月实行-月平行}{月行-日行}$$

比较可看出，日躔表中的计算定朔太阳改正数值中，全用月平行代替了月行—日行，而忽略了分母中的日行项。日行虽比月行数值小，但还没有小到可以略去不计。月每日平行速约当 13.37 度，日平行 1 度，月减日平行速为 12.37 度。若以月平速代月平速减日平速作分母，则相对误差约为 7.5%。

历代月离表形式大致相仿，在一个历周（近点月）内，给出每日三项主要数值：月实行分，损益率（增减率）为（月实行—月平行）/月平行，及其累加累减值。月实行分为月离表最主要数值。其他几项皆可由它导出。后两项是用来计算定朔望时作月亮改正使用的。与上面得出的定朔改正算式比较可知，和太阳改正类似，月离表中计算月亮改正的数值中，也以月平行代替了分母中的月行减日行。因此也将引入较大误差。大业历、戊寅历月离表中的损益率、盈缩积分，只包含了月实行与月平行之差，即只有上述算式中月亮改正的分子部分。而在计算中，以差分（月实行分—日平行分）除算式的分子。因此，大业历、戊寅历计算定朔的月亮改正理论上是比较严谨的。有学者认为，直到宣明历，才改变了以"月行分"代替"月速—日速"这种错误做法，而恢复以"月行—日行"为分母的正确方法。我们考查认为宣明



历似仍沿袭仅用“月行分”作分母计算定朔的太阳月亮改正。

与上面分析的定朔计算中的太阳改正、月亮改正的符号正好相反有联系的一个问题是，日躔表、月离表中的盈缩、迟疾、增减、损益、陟降、朓朒等等的符号问题。趋前、早出为盈，亏缺、不足、晚出为缩。但不能按正义、反义字把日躔表、月离表中的盈、疾、增、益、陟、朓直接释读为加；将缩、迟、减、损、降、朒完全理解成减。

日躔表比较好办，诸历皆以冬至为起点。冬至太阳在近地点附近运行速度最快。以冬至小寒为例试将隋唐诸历的同类值用法比较如下：

历法	(损)益	盈(缩)	大衍	(损)益	(朓)朒
大业	益(损)	(盈)缩	五纪	(损)益	(朓)朒
皇极	陟(降)	(迟)速	正元	(损)益	(朓)朒
戊寅	(损)益	盈(缩)	宣明	(损)益	(朓)朒
麟德	先(后)	盈(朒)	崇玄	(损)益	(朓)朒

月离表分近地点、远地点为起点两种情况，比较其入历1日的损益(增减)率、盈缩(朓朒)积：

近地点始历			远地点始历		
大业	(损)益	盈(缩)	大衍	(损)益	(朓)朒
皇极	加(减)	朓(朒)	宣明	(损)益	(朓)朒
戊寅	(损)益	盈(缩)	崇玄	(损)益	(朓)朒
麟德	增(减)	(迟)速			
五纪	(损)益	朓(朒)			
正元	(损)益	朓(朒)			

月离表这些字的用法是一致的。以麟德历为例。月每日平行分为895.7。入历8日至21日，实行小于平行，增减率＝(离程实行分－月日平行)/月日平行，在这阶段全为负值。月离表8～14日的增减率为减，15～21日为加。22～28日实行大于平行(离程大于895.7)，增减值应为正值，但月离表中所注却全为减。而作为增减率累积值的迟速积1～14日为速，15～28日为迟。从表中可看出，增减是对应于迟速值的绝对值而言的。就正负符号而言，当盈缩、迟速、朓朒积，确与字面含义同时，则值正时(盈、速、朓等)，损益、增减亦按字义理解；当处负值时(迟、朒、缩等)，损益率、增减率的符号与其字义相反，即增、益为负，损、减等为正。以远地点为入转起点的大衍、宣明等历，与此相同。损益率的损益，是指其下朓朒积的绝对值的增减损益而言的。月离表的盈缩、朓朒值的含义与字面是一致的。损益率的正负号在近地点到远地点半周与字面一致；在远地点到近地点，月亮实行后于平行的半周，与字面含义相反。

在所列九历日躔表中，仅有皇极、戊寅、麟德三历的盈缩、迟速积在冬至到夏至半周为盈（速）积，大业及大衍后的唐历皆作朒（缩），冬至太阳在近地点附近，行速最快，其后半岁，实行总在平行之前，盈缩、朓朒积理应在盈（朓）。为何大业、大衍等历偏要作为朒（缩）呢？这就涉及前面导出的定朔计算中的太阳和月亮改正公式了。公式中太阳、月亮改正的符号相反。太阳改正，实行大于平行者为加；实行小于平行者为减。月亮改正恰好相反。对于戊寅等三历来说，太阳改正需注明盈加、缩减，月亮改正又要加注盈减、缩加。大业、大衍等六历日躔表盈缩、朓朒反义使用，就可把太阳、月亮改正的符号注语统一起来。如大衍历定朔术所说，各置朔弦望大小余，以入气、入转朓朒定数，朓减、朒加之，为定朔弦望大小余。非常简单明了。这六种历法的日躔表、月离表用于太阳、月亮改正的数值用语都予以统一，如皆用损益、盈缩，或全用损益、朓朒。这样使用，并不改变日躔表数据的正负性质。

对于戊寅、皇极、麟德三历日躔的盈缩、迟速含义与字面一致。因此它们的损益、陟降、先后的正负号，与月离表相同。即对于盈（速）为正的半年，损益率、陟降率的益、陟为正，损、降为负；对于夏至到冬至盈缩（迟速）数为缩（迟）、负值的半年，则益陟为负、损降为正。而大业、大衍等六历，冬至到夏至半年，缩朒为正，则益为正、损为负；夏至到冬至半年，盈朓为负，则益为负、损为正。各种情况下，损益率中的损益、陟降、先后都是对其下盈缩（迟速、朓朒）数的绝对值的增减、损益、陟降而言的。

第六节　麟德历与定气定朔

一、麟德历的修撰与颁行

麟德历的撰制者李淳风是唐代杰出的天文历算家。他给后人留下了不少著作。《晋书》、《隋书》两书的“天文志”、“律历志”皆出自他的手笔。因其取材完整、适当、合理，叙述准确得体，为后人留下科学可靠的文献依据。是天文志、律历志的典范。“论者谓天文志首推晋隋。”隋书历志对北朝历法并有详论，后世赖以质证。他还是著名的星占学家，与袁天罡齐名，史称李袁，因此也留下了几种星占学著作。但袁天罡（列新旧唐书方技传）科学成就远不如他。

太宗十九年(645)，因戊寅历四月连大，又改回重用平朔，历法验食不效就更为突出了。高宗时，太史奏旧历加时浸差，宜有改动。乃诏李淳风造麟德历。历成，诏太史起麟德二年颁用，谓之麟德历。重用定朔。自此以后历法皆用定朔，平定之争，遂告结束。贞观十八年(644)淳风上言，批评戊寅历十九年九月后四朔频大。采用定朔，朔望由天而定，难免会出现这种情况。李淳风创进朔之法予以调整。即将合朔加时在晚间的日子改称晦日，而以次日为历书朔日。如弘道元年(683)，依



历推十二月甲寅朔，壬午晦，月小。次年正月癸未朔。八月，诏次年元日（正月初一）用甲申。以进朔法改癸未为晦日。是后诸历多采用之，仅各历进朔方法略有进退而已。一行虽已指出四月频大没有关系，进朔无此必要，但仍沿循其法。宋周琮明天历议说，日月相会为朔乃自然规律，人为进朔法未尽善，但亦仅限于议论并未改革。直至元授时历才彻底废除。李淳风详尽研究了刘焯皇极历，并著录在《隋书·律历志》中。使这部优秀历法得以完整保存。未行之历有这样好命运的，仅此而已。麟德历基本承袭皇极历数法，而有所增损变动及改革。

《新唐书·历志》说，古历有章蔀，有元纪，有日分、度分参差不齐，淳风为总法1340以一之。仅以戊寅历为例，中朔有日法、度法、气法，入转用历日法，五星有行分法，交会又有自己的日法分。各术皆用不同的日分。麟德历破古章蔀纪元之法，废章岁、合众日法为一称总法1340。岁实、朔实、入交、入转、五星布算，统以总法为日分。朱文鑫说，“立法巧捷，胜于前人，后之历家，莫不从之”。

麟德历损益中晷术以考日至，李淳风说，“后汉及魏宋历冬至日中影一丈三尺，夏至一尺五寸，于今并短。须随时影，校其陟降及气日中影，应二至率。他皆仿此。前求每日中影术，古历并无，臣等创立此法也。”经过多年实测，麟德历给出了新的二十四气日中晷影表，并创制用二次差内插法推求每日日中晷影的算法。

《新唐书·历志》说，淳风又“为木浑图，以测黄道”。他完善了每日刻差的数表算法并发展了用每日刻差推求各日黄道去极度及昏旦去中度的方法。并首次在颁行历法中，用刘焯二次差内插算法推求月去黄道度。在历法发展史上都有重要意义。

中宗神龙反政（705），太史丞南宫说奏：麟德历加时浸疏，又上元甲子之首，五星有人气加时，非合璧连珠之正也。乃诏说等更治乙巳（705）元历。至景龙中历成。诏令施行。俄而睿宗即位，景龙历浸废不行。开元九年（721），麟德历署日食比不效，诏一行作新历。十五年（727），草成而一行卒。次年，张说表上大衍历议历术，十七年（729）颁行大衍历。自麟德二年（665）始用，迄开元十六年（728），麟德历行用共64年。东传日本于文武元年（697）始行，日称仪凤历，共行67年，迄于天平宝字七年（763）。中日共行99年。

麟德历是一部重要历法。多位学者对它有精湛研究。晚清李善兰著《麟德历解》为精心之作，时人刘金沂、纪志刚诸君对定朔、交食、晷漏诸术更有深入独到之研究。他们的成果都在，可以参看。为篇幅计，本书对这部重要历法就仅对几个问题简单做些说明，而不做全面介绍了。

二、法数和定气定朔

麟德甲子元历：

上元甲子距麟德元年甲子(664)积 269880，算外。

总法 1340

期实 489428

常朔实 39571

辰率 335

$$朔实=39571/1340=29+711/1340$$
$$=29.53059701\ 日$$
$$岁实=489428/1340=365+328/1340$$
$$=365.2447761194\ 日$$

小余均以总法为分母，欲化为辰需乘 12，即

$$12\times 小余/1340=\frac{3\times 小余}{335}$$

称 335 为辰率，为 1/4 总法。一日 12 辰，24 个半辰。辰率就是 3 辰或 6 个半辰的日分。

麟德历称积年(积算)乘期实为期总，以总法 1340 除之为日。即上元至所求年岁前冬至日的日数，期总为分数。期总化为日数后，以 60(干支周期)去除，余数，命甲子算外，即得冬至大小余。大余为干支，小余为日的分数。即有：

$$天正冬至大小余=[(积年\times 期实/1340)/60]_R$$

具体计算时尽量避免大数字计算，因期实/1340 为岁实，一回归年的日数，为 365.24477612 日。其中 360 可为 60 除尽，故上式可简化为：

$$天正冬至大小余=[(积年\times 5.24477612)/60]_R$$

冬至平月龄，又称闰余，为所求年前冬至距天正十一月平朔的时间间隔。由下式计算：

$$闰余=[(积年\times 期实)/常朔实]_R$$

式中积年、期实、常朔实皆为整数，可简化为：

$$r_1=[期实/常朔实]_R$$
$$闰余=[(r_1\times 积年)/常朔实]_R$$

冬至干支大小余和闰余已知，则可求天正常朔：

$$天正常朔大小余=冬至大小余-闰余$$

冬至大小余，累加气策 $15\frac{292\frac{5}{6}}{1340}$ 日，得各气。由常朔加朔策 $29\frac{711}{1340}$，得次朔。朔加 $\frac{1}{4}$ 朔策($7\frac{512\frac{3}{4}}{1340}$)，得上弦，再加得望及下弦。



麟德历描述日行盈缩的日躔表给出反映每气内太阳实行与平行差的四组数据。

躔差率:本气内太阳实行分－平行分。

消息总:其前各气躔差率的累积值。

先后率:本气内太阳实行、平行差与月平行之比,乘月程法 67。

盈朒积:其前各气先后率的累计值。

即有:

$$躔差率=(太阳实行度-平行度)\times 总法\ 1340$$

$$消息总=\sum_{1}^{n-1}躔差率$$

冬至为息初、夏至为消初。冬至到夏至 12 气中太阳实行大于平行,实太阳位于平太阳前,为盈、息段。冬至日行最速,冬至到春分日实速大于平速,躔差率为益,是正;春分到夏至,日实速小于平速,躔差率为负,称损。夏至日行最缓,夏至到冬至半年中,实太阳总在平太阳后,为缩、消段,消息总其值是负。夏至到秋分,实速小于平速,躔差率为负,但对其下消息总而言,绝对数值在增加,故表中称益,其值实为负值;秋分到冬至,日实速大于平速,但为了弥补夏至到秋分段实太阳落后于平太阳之差距,实日仍在平日之后,直到冬至始才追及,使实平太阳之差为 0。故这一段实太阳仍在平太阳后,但由于距离不断缩短,所以秋分到冬至段消息总的绝对数值在减少,故表中躔差率称损,但其值实为正值。

$$先后率=\left(\frac{太阳实行率-平行度}{月平行度}\right)\times 月程法\ 67$$

$$盈缩积=\sum_{1}^{n-1}先后率$$

与消息总、躔差率的分析类似。冬至到夏至半年,盈为正,先后率中先为正后为负。夏至到冬至半年,朒为负,先后率中先为负、后为正。

术文说:“各以气下消息积,息减、消加常气,为定气。”

常气即平气、恒气,为等分回归年为 24 份,每份的长度。麟德历常气长 $365\frac{328}{1340}/24=15\frac{292\frac{5}{6}}{1340}=15.21853234$ 日。平气各气长度皆相等。由术文,有:

$$冬至定气=常气\ 15.21853234\pm\frac{消息积}{1340}$$

$$=常气-\frac{722}{1340}=14.680$$

冬至定气长度,即自交冬至时刻至交小寒之间的时距。定气指太阳沿黄道运动等分为 24 份,每份度数相等。太阳走到每一分点即交一节气。因日行有盈缩,

太阳走完相等路程所需的时间不同。冬至太阳最速，故冬至定气最短。由上得出麟德历冬至定气只需 14.680 日。同样

$$冬至到大寒定气时距=2\times15\frac{292\frac{5}{6}}{1340}-\frac{1340}{1340}$$

$$=29\frac{585\frac{2}{3}}{1340}=29.437$$

$$冬至到立春定气时距=3\times15\frac{292\frac{5}{6}}{1340}-\frac{1854}{1340}=44.272\ 日$$

$$冬至到春分定气时距=6\times15\frac{292\frac{5}{6}}{1340}-\frac{3708}{1340}=88.544\ 日$$

相邻两气之差就是每气定气长度，也可由躔差率直接得出：

$$每气定气长度=平气长度\pm\frac{躔差率}{1340}$$

加减号由前面所述方法决定，即冬至到夏至，益减损加；夏至到冬至，益加损减。如春分定气（交春分至交清明）和立秋定气分别为：

$$春分定气=15.2185+\frac{722}{1340}=15.757\ 日 \qquad （损）$$

$$立秋定气=15.2185+\frac{514}{1340}=15.602\ 日 \qquad （益）$$

由麟德历日躔表计算二十四气各定气长度，结果如表 7—2。

表 7—2 麟德历各定气长度表

气名	定气	气名	定气	气名	定气
冬至	14.680	谷雨	15.602	处暑	15.680
小寒	14.757	立夏	15.602	白露	15.757
大寒	14.835	小满	15.680	秋分	14.680
立春	14.835	芒种	15.757	寒露	14.757
启蛰	14.757	夏至	15.757	霜降	14.835
雨水	14.680	小暑	15.680	立冬	14.835
春分	15.757	大暑	15.602	小雪	14.757
清明	15.680	立秋	15.602	大雪	14.680

由此看出，春分至秋分半年 12 气，每气皆大于 15 日；秋分至春分半年，每气悉不足 15 天。春分后 12 气共长 188.156 日，秋分后 12 气共长 177.088 天。前者平均每气 15.680，后者平均每气为 14.757 日。其间有下列近似关系：



秋分后 12 气：春分后 12 气＝16：17

15.680×16≈14.757×17

严格的科学计算，春分后半年实长 186.43 日，秋分后半年为 178.82 日。长度比约当 100：96 或 25：24。

因 16＋17＝33，为简化计算，麟德历取 $365\frac{328}{1340}/33=11.068\approx 11$。把春分后 12 气视作平均，每气长为$\frac{365.24477612}{33}\times\frac{17}{12}=\frac{11\times 17}{12}=15\frac{7}{12}=15.5833$ 日；把秋分后 12 气看成平均，每气长$\frac{11\times 16}{12}=14\frac{8}{12}=14.6667$。

麟德历将一年分作两段。每段半年中，以平均长度为气长，采用等间距二次差内插算法计算太阳改正。称以上讨论中的数据，17 为进纲，16 为退纪，11 为泛差，12 为总辰。术文中，称纲纪时都包含与泛差 11 相乘这个因子。因此，纲纪/12 即为气长。秋分后半年，气长 L＝进纲(11×16)/12；春分后半年，气长 L＝退纪(11×17)/12。

日躔表中的躔差率、消息总两栏数据，用以计算定气及任何时刻的太阳实位置。先后率、盈朒积用以推求定朔弦望时的太阳改正。推算气中每日数值的方法是：

令 Δ_1、Δ_2 为本气与后气躔差率或先后率。前已述，纲纪/12 即气长 L，$\frac{12}{纲纪}=\frac{1}{L}$。由术文：

$$末率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}，总差=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

$$别差=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L^2}$$

前多($\Delta_1>\Delta_2$)时：

$$初日损益率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{1}{L}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$t\ 日损益率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{1}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t}{L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

相邻两日的损益率之差$\frac{1}{L}(\Delta_1-\Delta_2)$是常数，组成一阶算术级数（等差级数）。求初日到 t 日损益率之和$\sum\limits_{1}^{t+1}$损益率，共 $t+1$ 项。有：

$$S(t)=\frac{t}{2}(初日损益率+t\ 日损益率)$$

$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

前少（$\Delta_1<\Delta_2$）时：

$$初日损益率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{1}{L}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$t\ 日损益率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{1}{L}(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{t}{L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$S(t)=\sum_{1}^{t+1}损益率$$

$$=\frac{t}{2}(初日损益率+t\ 日损益率)$$

$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}+\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

再据新、旧唐书术文，有：

t 日消息总（朒盈积）$T(nL+t)=T(nL)\pm S(t)$

麟德历分冬至到夏至、夏至到冬至两半年，在半年中，取 L 是相等的。上式中先加、后减。

与皇极历相同，八节（分至启闭）前的大寒、雨水、谷雨、芒种、大暑、白露、霜降、大雪八气，因与后气 Δ 数值相同，总差、别差悉为 0，需做另外处理。取：

$$本气初率=前气末率=(\Delta_{前}+\Delta_{本})/2L$$

$$总差=|\Delta_{本}-\Delta_{前}|/L$$

$$别差=|\Delta_{本}-\Delta_{前}|/L^2$$

前少（$\Delta_{前}<\Delta_{本}$）时：

$$本气末率=初率+总差$$

$$=\frac{\Delta_{前}+\Delta_{本}}{2L}+\frac{(\Delta_{本}-\Delta_{前})}{L}$$

前多（$\Delta_{前}>\Delta_{本}$）时：

$$本气末率=初率-总差$$

$$=\frac{\Delta_{前}+\Delta_{本}}{2L}-\frac{\Delta_{前}-\Delta_{本}}{L}$$

初率、末率、总率、别差已知，再依上述方法计算即可。

麟德历以平朔望距定气的时日为气朔距，来计算太阳改正。平朔望距定气不会正好为整数日。为此先将气朔距化为以辰为单位的“辰总”。小余均以总法 1340 为分母。欲化为辰需乘 12，即

$$12\times\frac{小余}{1340}=\frac{3\times小余}{335}=\frac{3\times小余}{辰率}$$



$$气朔距=平朔大小余-其前定气大小余$$
$$=大余+小余/1340$$
$$辰总=12\times大余+\frac{3\times小余}{辰率}$$
$$=12\times大余+\frac{12\times小余}{4\times335}$$
$$=12\left(大余+\frac{小余}{1340}\right)=12\times气朔距$$

故

$$气朔距\ t=辰总/12$$

前多($\Delta_1>\Delta_2$)时：

$$总率=辰总\times末率/12$$
$$S(t)=\frac{末率\times辰总}{12}+\left[\left(纲纪-\frac{辰总}{12}\right)\times\frac{总差}{纲纪}+总差\right]\times\frac{辰总}{2\times12}$$
$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

前少($\Delta_1<\Delta_2$)时：

$$总率=初率\times辰总/12$$
$$S(t)=\frac{初率\times辰总}{12}+\frac{辰总^2}{2\times12^2}\times别差$$
$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$定盈朒积\ T(nL+t)=T(nL)\pm S(t)$$

先加、后减。

$$盈朒大小余=常朔弦望\pm定盈朒积$$

盈加、朒减。盈朒大小余即经太阳改正得出的定朔弦望时日。前面曾指出，太阳实行大于平行，实太阳在平太阳前，即麟德历盈朒积为盈时，定朔计算中的太阳改正为正；反之，日实行小于平行，实太阳在平太阳后，麟德历盈朒积为朒时，太阳改正为负。

由上看出，气朔距 t 是整数日或带有小数、分数的日数，计算的算式是一样的。

麟德历描述月亮运行的法数为：

变周 443077

变日 27

余 743

变奇 1

变奇法 12

月程法 67(＝总法/20)

$$变周日＝变周/(变奇法×总法)$$

$$=\frac{443077}{12\times1340}=27\frac{743\frac{1}{12}}{1340}=27.5545398\text{ 日}$$

变周为近点月的分数，近点月长为 $27\frac{743\frac{1}{12}}{1340}$，月程法 67，用作月离表实行度化为实行分所乘的因子。

麟德历月离表给出一近点月内，从近地点开始，每日的离程、增减率和迟速积三项数值。离程为月每日的实行度与月程法的乘积；增减率为以月平速除实行与平行之差，再与日法的乘积；迟速积为其前变日增减率的累积值。即

离程＝每日实行度×月程法 67

增减率＝(离程－月平行分)×日法/月平行分

$$迟速积=\sum_{1}^{n-1}增减率$$

$$=\sum\frac{(离程－月平行分)\times日法}{月平行分}$$

近地点到远地点的半周，月实速由最大变到最小，远地点到近地点的半周，正好相反。7 日、21 日月实行速接近平行速。前半周月实行在前，迟速积为速，是正；增减率增为正、减为负。后半周月实行在平行之后，迟速积为迟，是负；增减率增为负，减为正。

离程用于推求月亮的轨道位置。增减率、迟速积用来推求定朔弦望所需的月亮改正数值。

先计算平朔弦望入近点月的日和小数，称入变历日、余。做法如下：

期总＝积算×期实

总实＝期总－(天正经朔小余＋闰余)

天正冬至、经朔大小余、闰余求法前面已述。

$$变分=\frac{[(奇法\ 12\times总实)/变周\ 443077]_R}{奇法}$$

天正常朔夜半入变＝变分/总法

经朔入变日、余＝天正常朔夜半入变＋常朔小余

经辰所入＝[积年×岁实(日)/近点月]$_R$



两式结果是一样的。求上弦、望、下弦入变，累加 $7\frac{512\frac{9}{12}}{1340}$ 日，即得。加满变日及余（近点月长度），去之，入变常非整数日。

推求月亮改正的方法：

由月离表增减率栏看出，增者总是前多，减者皆为前少。令 Δ_1、Δ_2 为入变日、次日增减率。前多（增）即 $\Delta_1>\Delta_2$；减者为前少即 $\Delta_1<\Delta_2$。入余为入变日的小余，即入变日的小数部分。由术文：

$$t=\frac{\text{入余}}{\text{总法}},\text{通率}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$$

$$\text{率差}=|\Delta_1-\Delta_2|$$

增、前多（$\Delta_1>\Delta_2$）时：

经辰变率

$$=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\text{率差}+(\text{总法}-\text{入余})\times\frac{\text{率差}}{\text{总法}}\right]\right\}\times\frac{\text{入余}}{\text{总法}}$$

$$=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\text{率差}+\left(1-\frac{\text{入余}}{\text{总法}}\right)\times\text{率差}\right]\right\}\times\frac{\text{入余}}{\text{总法}}$$

$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{2}(\Delta_1-\Delta_2)+(1-t)\frac{t(\Delta_1-\Delta_2)}{2}$$

$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

减、前少（$\Delta_1<\Delta_2$）时：

经辰变率

$$=\left(\text{通率}+\frac{1}{2}\text{入余}\times\frac{\text{率差}}{\text{总法}}-\text{率差}\right)\times\frac{\text{入余}}{\text{总法}}$$

$$=t\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{2}|\Delta_1-\Delta_2|-|\Delta_1-\Delta_2|\right)$$

$$=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{t^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)$$

经辰变率为月亮改正的一级近似，与皇极历相似，麟德历月亮改正还要求经辰变率的修正，称作变率增减值。令 $t_0=\frac{\text{经辰变率}}{\text{总法}}$。而

月亮改正定数＝迟速积±经辰变率±变率增减值

＝迟速积±经辰定变率（速减、迟加）

速时，转余＝入余$-\frac{1}{2}$变率；

迟时，转余＝入余＋$\frac{1}{2}$变率。

远地点至近地点半周，为迟时。

增、前多($\Delta_1>\Delta_2$)时：

迟变率增减值

$$=\left\{通率+\left[总法-\left(入余+\frac{1}{2}变率\right)\right]\times\frac{率差}{总法}\right\}\times\frac{变率}{总法}$$

$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

速变率增减值

$$=\left\{通率+\left[总法-\left(入余-\frac{1}{2}变率\right)\right]\times\frac{率差}{总法}\right\}\times\frac{变率}{总法}$$

$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)+\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

减、前少($\Delta_1<\Delta_2$)时：

迟变率增减值

$$=\left[通率-率差+\left(入余+\frac{1}{2}变率\right)\times\frac{率差}{总法}\right]\times\frac{变率}{总法}$$

$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t_0(\Delta_2-\Delta_1)+\left(tt_0+\frac{t_0^2}{2}\right)(\Delta_2-\Delta_1)$$

速变率增减值

$$=\left[通率-率差+\left(入余-\frac{1}{2}变率\right)\times\frac{率差}{总法}\right]\times\frac{变率}{总法}$$

$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t_0(\Delta_2-\Delta_1)+(tt_0-\frac{t_0^2}{2})(\Delta_2-\Delta_1)$$

经辰定变率＝经辰变率±变率增减值

速减、迟加。

前多、增($\Delta_1>\Delta_2$)时：

$$迟经辰定变率=(t+t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t+t_0}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$+\frac{t+t_0}{2}[1-(t+t_0)](\Delta_1-\Delta_2)$$

$$速经辰定变率=(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t-t_0}{2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$+\frac{t-t_0}{2}[1-(t-t_0)](\Delta_1-\Delta_2)$$

前少、减($\Delta_1<\Delta_2$)时：



$$迟经辰定变率=(t+t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-(t+t_0)$$

$$\times(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{1}{2}(t+t_0)^2(\Delta_2-\Delta_1)$$

$$速经辰定变率=(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-(t-t_0)$$

$$\times(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2(\Delta_2-\Delta_1)$$

若令

$$T=t\pm t_0$$

（速减、迟加）

则上列经辰定变率四式可统一为：

$$经辰定变率=T\Delta_1+\frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)$$

这样，月亮改正的最后形式为：

$$S(n+T)$$

$$=S(n)\pm\left[T\Delta_1+\frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)\right]$$

$$=S(n)\pm\left[T\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+T(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{T^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)\right]$$

其中 $T=t\pm t_0$（迟加，速减）。当 $T=t=\frac{入余}{总法}$时，方括号内数值为经辰变率，为改正的一级近似。$t_0=\frac{变率}{总法}$，$T=t\pm t_0=\frac{入余\pm变率}{总法}$时，方括号内所得经辰变率为二级近似。

定朔弦望＝经辰日余±太阳改正±月亮改正

太阳改正与月亮改正符号，前文已做分析。太阳改正盈加、朒减；月亮改正速减、迟加。《旧唐书·麟德历术》曰：此法微密至当，以示算理通涂。若非朔望有交及欲考校速要者，但以入余乘增减率，总法而一，增减迟速为要耳。实际上唐以后历代历书定朔计算，太阳、月亮改正仅采用简单的线性内插算法得出。

麟德历有个很特别之处，它的基本法数中，给出了常朔实、盈朔实和朒朔实三种朔望月长度。常朔实，《旧唐书》麟德历术称恒朔实，是朔望月的平均长度。盈朔实、朒朔实为麟德历给出的最长和最短的实朔长度。数值如下：

盈朔实 39933，最长朔望月长度 29.80074624 日；

朒朔实 39220，最短朔望月长度 29.26865672 日；

常朔实 39571，平均朔望月长度 29.53059701 日。

盈、朒朔实并不能直接由日躔表、月离表数值得出。如春分前后的朔日，若月球适处在远地点和近地点中间，即入变日为 20.67 日附近时，按麟德历这时太阳、月亮改正俱当较大的正值，极大可达$\frac{801}{1340}$日(0.5977612 日)。平朔、实朔相距可达 $14^h.346$。这是需加在平朔时刻上的改正量。但并不表示这个月的实朔比平朔长这么多。因为其前月朔当启蛰后一二日，入变 18～19 日，是月的太阳、月亮改正值其和亦约当 0.49925 日($11^h.982$)。所以其前月实朔仅比平朔长 0.1 日、$2^h.4$ 左右。其下一朔日约近谷雨，入变 23～24 日。太阳、月亮改正俱为正值，其和约当 0.475日($11^h.41$)。近春分的朔日，又适值入变 20.67 日左右，则是月约比平朔实约长 0.12 天，不足 3^h。

麟德历的盈、朒朔实数据是靠长期观测得出的。笔者考查了几千年的实朔长度。长很少有超过 29 日 20 时即 29.83333 日的；短也很少有 29 日 $6^h.5$ 以下者(29.27083 日)。平均朔望月长度 29.5306 日相当于 29 日 $12^h.7344$。由此看出，李淳风给出的盈、朒朔实这两个数据是相当准确的。并且他已发现盈分较大(362/1340＝0.27015 日)，朒分(351/1340＝0.26194 日)稍小。这也是与观测事实一致的。统计说来，实朔长度为朒者数量稍多，故得到平朔实约为 29.53059 日。

第七节　会合运动和月平行速

中国历法中，回归年、朔望月是一切推步的基础，是最常用到的基本数值。为计算定朔弦望、月行迟疾，在步月离中要用到近点月。日食在朔、月食在望，但为判别朔望时是否有食，交食发生时食分的深浅，就需要推求朔望时日月距交点的远近，所以步交会中离不开交点月。刘洪的乾象历首先将月行迟疾引入历法，并创制月离表。随着步月离、步交会术的发展，以后各历从此又将近点月、交点月作为基本法数列出。计算月行迟疾、定朔望的太阳、月亮改正，都要用到月行分。月行分是指月球对于恒星的位移。月球在恒星背景上行天一周的时间称作恒星月。它实际是月球绕地公转一周所需的时间。恒星月古历未作为基本法数给出。月离表、日躔表中用到的月平行速数值常使初学者感到迷惑。有的历术或历法书中给出求月平行速的算式、方法，但往往学历者也不甚了了。

地球绕日公转一周称作恒星年(T)。与恒星月(S)相似，它们都是以宇宙空间的恒星作为方向标志的。月亮的盈亏圆缺的位相变化是月绕地、地绕日运动的综合结果。月相变化的周期，如从新月到新月、满月至满月的时间，为会合运动周期，称作朔望月(M)。会合即日月地三者处于经度相同的状态。从地球上看，即日月同经或相差 180°的情况。连续两次会合的时间间隔为会合周期，即朔望月。

设从望时（月日黄经相差 180°）开始考查月地的运转。一个恒星月后，月绕地一周（360°），又回到起始的恒星位置。此时地球也运行了 α°角。有：

$$\angle\alpha=\frac{360^\circ}{T}\times S(\text{恒星月})$$

所以这时月日地相对位置并未恢复到起始状态。月要继续追赶，才能又回到起始月日在地球两边、黄经相差 180°的位置。月绕地公转的角速度 $\omega=\frac{360^\circ}{S}$，要追赶的角度应为：

$$\angle\alpha_1=\frac{360^\circ}{T}\times M(\text{朔望月})$$

因月追赶的这段时间内地球仍在走，从而太阳黄经还在增加。追赶所需要的时间为：

$$t=\frac{\alpha_1}{\omega}=\frac{360^\circ}{T}\times M/\frac{360^\circ}{S}=\frac{360^\circ M}{T}/\frac{360^\circ}{S}=\frac{MS}{T}$$

而 S（恒星月）$+t=M$（朔望月）。所以

$$M=S+\frac{MS}{T},M-S=\frac{MS}{T}$$

于是

$$\frac{1}{T}=\frac{M-S}{MS}=\frac{M}{MS}-\frac{S}{MS}=\frac{1}{S}-\frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{S}-\frac{1}{T}$$

称作会合运动方程式。从此式看出，由朔望月、恒星年可求出恒星月，也可相互推求。以 360°乘会合方程两端，得：

$$\frac{360^\circ}{M}=\frac{360^\circ}{S}-\frac{360^\circ}{T}$$

知道朔望月、恒星年长度，即可得出月亮每日平行度$\left(\frac{360^\circ}{S}\right)$，而$\frac{360^\circ}{T}$即为太阳每日平行度。

地球自转轴与公转轨道平面轴线有约 23°.5 的交角。与地球自转轴垂直的大圆称赤道面，地球公转的平面叫黄道面。黄赤道在天球上相交的两点，一称春分点，一为秋分点。由于地球不是正球而呈扁球体状，赤道有所隆起，太阳、月亮对地球赤道多余物质的吸引，使得地球自转轴在天球的指向点北天极围绕黄道北极，以约 23°.5 为半径，在天空做反时针向（从地面往北黄极星空看）旋转，周期约 25800 年。由于天轴方向改变，所以天赤道的位置也在变化。因此黄道赤道的交点（二分点）就在恒星间慢慢向西移动。二分点的这种运动叫作岁差，春分点西移的速度每

年50″.2(360°/25800),称黄道岁差常数。

从地球上看,太阳在黄道上由西向东运行。太阳接连两次通过春分点的时间间隔的平均值,称回归年。因二分点运动方向是自东向西,与太阳的周年视运动正好相反,好像二分点是在迎着太阳走,故回归年要比恒星年时间短。恒星年是视太阳由一个恒星再回到这一点的时间间隔。两者之间差约20分钟。这是视太阳移动岁差常数值(二分点每年西移角度)所需要的时间。

每年夏至那天中午,北半球太阳距天顶(地心通过观测者头顶指向天球之点)夹角最小,地面受到的热量最多,为夏天;冬至日正午,太阳与天顶距角最大,地面受到的热量最少,为冬季。四季寒暑变化是由回归年决定的。

由寒暑物候变化、观测日影得到的岁长是回归年。东晋虞喜发现岁差,5世纪祖冲之大明历始将岁差引入历法计算。以后历法始有周分和岁分之别。其前天周即为岁周。太阳日行1度,一岁而周,即只知回归年,而不晓恒星年。

大衍历前,共有8部历法引入岁差,但多未行用。颁行历法中,除大明历外,他如大业、戊寅诸历未用周天度分,仍用岁周计算月平行度。

周分(周天分)与岁分之差,为岁差分或称差分、周差,是恒星年与回归年相差的日分。

会合运动方程$\frac{1}{S}=\frac{1}{M}+\frac{1}{T}$,两端各用$T$乘,得:

$$\frac{T}{S}=\frac{T}{M}+1$$

中国历法中,T即周天分,以度表示为周天度,以日表示即恒星年。此式左端即为月每日平行度。M为朔实,以日表示即朔望月。所以有:

$$\text{月每日平行度}=\frac{\text{恒星年}}{\text{朔望月}}+1$$

现代天文历书采用的平回归年、恒星年、朔望月、恒星月长度为:

回归年$=365^d.24218968-0^d.0000000616(t-2000)$

恒星年$=365^d.25636306+0^d.0000000010(t-2000)$

朔望月$=29^d.53058885+0^d.0000000022(t-2000)$

恒星月$=27^d.32166155+0^d.0000000019(t-2000)$

回归年、恒星年相近,只相差0.0142日(1226^s.88),回归年比恒星年仅短20^m27^s。在发现岁差以前,或隋唐历法中仍有多种,以回归年E代恒星年T,来推算月平行速。由于$E\approx T$,所以上列会合周期算式仍基本成立,即有:

$$\frac{E}{S}=\frac{E}{M}+1$$



$$月每日平行度=\frac{回归年}{朔望月}+1$$

对于采用章岁的历法，由闰周可知：

岁实（回归年）/朔策（朔望月）＝章月/章岁

故

$$月每日平行度=\frac{章月}{章岁}+1=\frac{章月+章岁}{章岁}$$

月每日平行分＝月日平行度×章岁＝章月＋章岁

对于不用章岁的历法：

$$月每日平行度=\frac{岁实+朔实}{朔实}$$

由此可知，根据历法常数周天分（度）、岁实、朔实，就可得出各历的月平行速。

麟德历不用岁差，由上式得出：

$$月每日平行度=\frac{期实+常朔实}{常朔实}=13.36835056\ 度$$

月每日平行分＝月日平行度×月程法 67＝895.68

月平速－日平速＝12.36835056 度＝828.68 分

第五节曾导出由平朔 T_0 求定朔 T 的算式：

$$T=T_0+t,t=\frac{l'_0-l_0}{\Delta D_0+\Delta l_0-\Delta l'_0}$$

l'_0、l_0 为日月在平朔时间真黄经与实黄经之差；D 是月日平距角；ΔD_0、Δl_0、$\Delta l'_0$ 为 D、l、l' 在平朔时 1 日的变化值。式中 Δl_0、$\Delta l'_0$ 与 ΔD_0 比较是小量，近似计算时可以略去。l'_0、l_0 分别为平朔时太阳实行减太阳平行与月实行减月平行，其值可由日躔表、月离表中查出。ΔD 为月平速－日平速。故

$$T=T_0+t=T_0+\frac{l'_0}{\Delta D_0}-\frac{l_0}{\Delta D_0}$$

$$=T_0+\frac{日实行-日平行}{月平速-日平速}-\frac{月实行-月平行}{月平速-日平速}$$

麟德历日躔表中的先后率、盈朒积是为计算定朔太阳改正项用的，月离表中的增减率、迟速积供计算月亮改正项使用。其日躔表以二至点呈镜面对称，而太阳实行度与平行度之差（l'_0）在二分点达极大。各气及气内各日太阳实行按等差数列变化。二十四气日躔数值由于对称，只需考查一半；12 气中 6 个等加速、6 个等减速运动，绝对数值相同，又只需考查 6 气即可。日躔表中最基本的数值是躔差率，其值为：

躔差率＝（日实行度－日平行度）×总法 1340

其余三栏数值，皆可由它导出。消息总是躔差率的累加累减值。先后率、盈朒积直接用于太阳改正。下面考查它们与"日实行－日平行"之间有着怎样的关系。由定朔算式、日躔表有：

$$\text{太阳改正}=\frac{\text{盈朒积}}{1340}=\frac{\text{日实行}-\text{日平行}}{\Delta D_0}=\frac{\frac{\text{消息总}}{1340}}{\Delta D_0}$$

$$\Delta D_0=\frac{\text{消息总}}{1340}\Big/\frac{\text{盈朒积}}{1340}$$

$$\Delta D_0(\text{分})=\Delta D_0(\text{度})\times 67=\frac{\text{消息总}}{\text{盈朒积}}\times 67$$

据此考查麟德历日躔表太阳改正，如表 7－3。

表 7－3　麟德历日躔表太阳改正考查

	消息总	盈朒积	ΔD_0 度	ΔD_0 分
冬至终	722	54	13.37	895.81
小寒终	1340	100	13.40	897.80
大寒终	1854	138	13.43	900.13
立春终	2368	176	13.45	901.45
启蛰终	2986	222	13.45	901.18
雨水终	3706	276	13.43	899.64
			13.42	899.34

考查得知日躔表太阳改正项的 ΔD_0 的平均值为 13.42 度或 899.34 分。而由定朔算式知 $\Delta D_0=\Delta(L-L')$。当 12.37 度(828.68 分)，为月每日平行度减太阳每日平行度。麟德历月每日平行度为 13.37 度(895.68 分)。显然在计算定朔太阳改正项时，以"月平行"代替"月每日平行－日每日平行"，作为改正项的分母。麟德历月离表月亮改正情况也是如此。即悉以 ΔL_0 代替 ΔD_0，作为计算定朔太阳、月亮改正项的分母。在定朔计算中而引进了一定的误差。



第八章　大　衍　历

大衍历，唐代高僧一行（俗名张遂，683—727）作。据《旧唐书·天文志》和《新唐书·历志》的记载，开元九年（721），太史频奏麟德历日食不效，唐玄宗因诏僧一行制作新历。一行先与梁令瓒等人造黄道游仪，以验星度。开元十二年（724），黄道游仪成。同年，为制历所作观测已在进行。十五年（727）历草成而一行卒。诏特进张说与历官陈玄景等次为"历术"（即《大衍历》）七篇，"略例"一篇，"历议"十篇[①]。该历于开元十七年（729）颁行。目前可见的《大衍历》（也称《大衍历经》）有两部，一部收于五代所编之《旧唐书》，一部保存在宋代所编之《新唐书》，后者较前者简略，但同时收有一行所作《大衍历议》和《略例》之大要，可以作为注解大衍历之参考。

本章将按大衍历所分"步气朔"、"步发敛"、"步日躔"、"步月离"、"步晷漏"、"步交食"和"步五星"七个部分对其内容进行介绍。

第一节　步中朔术

步中朔术是推算一年中节气、朔日的方法。本节基本数据有：

通法：3040 分。一日所包含的日分数，以下各周期多以此为分母。

策实：1110343 分。一回归年所含日分，1110343/3040＝365.2444 日。

揲法：89773 分。一朔望月日分，89773/3040＝29.53059 日。

灭法：91200 分（＝3040×30）。30 日整日数月所含日分。

策余：15943 分（＝12×中盈分）。见下。

用差：17124 分（＝12×朔虚分）。见下。

挂限：87018 分。置闰的界限。

三元之策：$15\frac{664\frac{7}{24}}{3040}$ 日（＝策实/24）。一平中气所含日数。

① 据张说"大衍历序"，与大衍历相关的著述共包括："《开元大衍历经》七章一卷，《长历》三卷，《历议》十卷，《立成法》十二卷，《天竺九执历》一卷，《古今历书》二十四卷，《略例奏章》一卷，凡五十二卷"。见《张燕公集》卷十二。本章讨论的是《大衍历经》，主要参考著作为王应伟：《中国古历通解》。

四象之策：$29\frac{1613}{3040}$日。一朔望月日数。

中盈分：$1328\frac{14}{24}$分。因为策实/12＝$30\frac{1328\frac{14}{24}}{3040}$日，所以中盈分即一平中气30

整数日之外的盈余日分。

朔虚分：1427分（＝灭法－揲法）。一朔望月与30天整日数月之差。

爻数：60。干支数。

象统：24。秒母，亦为二十四节气数。

以上述数据为基础，步中朔术作了如下三项推算。

一、安排节气

大衍历所给上元距开元十二年（724）甲子岁共积96961740年。该历称所求年到上元年数为积算，并有：

中积分＝策实×积算

积日＝中积分/3040　　　　(8－1)

其中中积分为上元到所求年冬至的总日分，积日为总日数。积日满爻数去之，余下小于60的整日数称为大余，日分称为小余。大余从甲子起算，即可得出所求年天正冬至的干支及小余。加三元之策，以同样方法，可求出次气干支日及小余。其他各中气，依此类推。

二、安排朔日和闰月

（一）推朔日

见图8－1。图中，B为所求年冬至前朔日，称为天正经朔。AC为中积分，AB称为朔积分，BC（＜揲法）称为归余之挂。

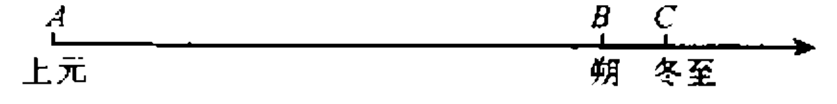


图8－1　推朔日示意图

$AB＝AC－BC$

$＝n×$揲法　　　　（n为正整数）(8－2)

因为BC＜揲法，所以式(8－2)中，如AC已知，可以求出n，进而求出AB或BC。AB/通法，满爻数去之，即得天正经朔大、小余。再以$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、1朔望月日数

相加，用同样方法可得该月上弦、望、下弦及后月朔之大、小余。余类推。

(二)推闰月

如上文求出的归余之挂(BC)＞56706 分[①]，则其岁有闰。否则下一年归余之挂将＞56706＋(策实－12×揲法)＞揲法。而闰在几月需考查各月闰衰。按术文：

$$闰衰＝归余之挂＋n(中盈分＋朔虚分) \quad (n=1,2,\cdots,12)\quad(8-3)$$

式中闰衰为各月平朔至平中气的时间间隔。当某月闰衰＞挂限时，下一月闰衰将＞挂限＋中盈分＋朔虚分＞揲法，为无中气之月，当置闰。如以上计算与定朔计算的结果有出入，则以定朔为准。

需要指出的是，大衍历与大多数古代历法一样，规定冬至排在前一年的 11 月中，因此以上月与闰月的安排也应循此顺序。

三、推没、灭日

关于没与灭，《大衍历议・没灭略例》中说："中分所盈为没，朔分所虚为灭。"[②]即两中气相隔 30 日之外的余数为求没之数，一个朔望月不到 30 整数日的差为求灭之数。大衍历推没、灭术的全文为：

> 凡常气小余不满通法、如中盈分之半以下者，以象统乘之，内秒分，叁而伍之，以减策实。不尽，如策余为日，命常气初日算外，得没日。凡经朔小余不满朔虚分者，以小余减通法，余倍叁伍乘之，用减灭法。不尽，如朔虚分为日，命经朔初日算外，得灭日。[③]

这段术文分别给出了判断没日在哪一节气及求没日的方法和灭日在哪一月及求灭日的方法。先分析没日。没的产生源于一节气长度不为整数，每隔一个节气为 15 日盈 664 $\frac{7}{24}$分或每隔两个节气为 30 日盈余 1328 $\frac{14}{24}$分(中盈分)，每隔一年为 360 日盈 15943 分(策余)。换言之，就是每年含有 15943/3040＝5.2444 个没日。没也可以平均到每一日，即每一日可盈没数为(策余/360)/3040＝0.01457 日。按这一思路，从上元(子夜)开始，每过一日就有 0.01457 日的盈分。盈分累加达到一日的点可称为没日点，该点所在日即设为没日。求没日需先判定它在哪一节气。大衍历的判定规则为节气小余＜$\frac{1}{2}$中盈分。而大衍历之前的麟德历和之后的宋元

---

① 钱宝琮：《新唐书历志校勘记》，见《钱宝琮科学史论文选集》，科学出版社，1988 年。

② 《新唐书・历志三上》。

③ 《旧唐书・历志四上》。

历法采用的规则均为节气小余>$\left(\text{通法}-\frac{1}{2}\text{中盈分}\right)$[①]，依此规则，有没之气大余应为 16 日，其后一节气的小余应<$\frac{1}{2}$中盈分。显然，按照没日产生的原理[②]和各历的前后继承关系，大衍历的相关术文是有问题的。

判定了没日在哪一节气，即可求出没日点距该节气前子夜的时间(见图 8—2)。

图 8—2　求没示意图

图 8—2 中，AD＝策实/策余；360∶策余＝AB∶BC。[③]

$$BD=AD-AB=\frac{\text{策实}}{\text{策余}}-\frac{360\times BC}{\text{策余}}$$

$$=\frac{\text{策实}-24\times3\times5\times\text{节气小余}}{\text{策余}}(\text{日})^{④} \qquad (8-4)$$

这就是大衍历求没日点的公式。

推灭术与推没术类似。灭产生于一朔望月长度不为整数，每一朔望月比 30 日少 1427 日分(朔虚分)。即从上元开始，每过一日就产生 1437/30 的虚分，虚分累积达到一日的时间减去一日，可称为灭日点，灭日点所在日称为灭日。判定灭日在哪一朔望月的条件是经朔小余<朔虚分[⑤]，此时经朔小余＋朔望月<30 日，该月只有 29 日。

求灭日点距该月朔前子夜时间的方法见图 8—3。

图 8—3　求灭示意图

图 8—3 中，$AD=\frac{30}{1427/\text{通法}}-1$，为两灭日点间的时间间隔，($AB+1$)∶(通法

---

① 见王荣彬：《中国古代历法推没灭术意义探秘》，《自然科学史研究》，1995，14(3)。

② 关于没日所在节气的证明参见下面注④。

③ 这是一个近似公式。

④ 此式推导参见景氷：《授时历中日、月运动及交食的研究》，硕士论文。另外据该文的证明，当节气小余(BC)>(通法 $-\frac{1}{2}$中盈分)时，有 $CD=BD-BC/\text{通法}=\frac{\text{策实}(1-BC/\text{通法})}{\text{策余}}=\frac{\text{三元之策}(\text{通法}-BC)}{\frac{1}{2}\text{中盈分}}<$ $\frac{\text{三元之策}\left[\text{通法}-\left(\text{通法}-\frac{1}{2}\text{中盈分}\right)\right]}{\frac{1}{2}\text{中盈分}}$＝三元之策，即没日应在该节气内。

⑤ 可仿照求没日的方法证明灭日应在此朔望月。



$-BC)=30:1427$[1]，由此可求得：

$$AB=\frac{30\times 通法-30\times BC}{1427}-1$$

$$BD=AD-AB=30\times\frac{经朔小余}{1427}(日) \qquad (8-5)$$

BD 即为大衍历所求时间。

关于没与灭的天文意义，目前有两种意见。一种认为它们分别与推算节气干支和朔日干支相关[2]。另一种猜测它们与印度历法有联系，并具有占卜吉凶或宗教方面的作用，这一问题仍需进一步的探讨。

本节算例：

(1)求开元十二年天正冬至大、小余。

按式(8－1)：

中积分＝96961740×1110343

积日＝中积分/3040

＝35414733314.743421(日)

因为，积日/60 的整数部分为 590245555，所以

冬至大、小余＝积日－590245555×60

＝14.743421(日)

查干支表，为第 15 日戊寅，小余＝0.743421×3040＝2259.99984 日分。

(2)求开元十二年天正经朔大、小余。

按式(8－2)：

朔积分＝96961740×1110343－归余之挂

＝n×89773

从中可得出：

n＝1199255781

朔积日＝朔积分/3040

$$=\frac{1199255781\times 89773}{3040}$$

＝35414733298.589803(日)

因为，朔积日/60 的整数部分为 590245554，所以：

天正经朔大、小余＝朔积日－590245554×60



---

① 这是一个近似的公式。

② 王荣彬：《中国古代历法推没灭术意义探秘》。

$$=58.589803(\text{日})$$

查干支表，为第 59 日壬戌，小余 $=0.589803\times3040=1793.00112$ 日分。

(3)求开元十二年冬至后第一个没日。

设冬至后第一个节气小余为 e：

因为，$e=$ 冬至小余 $+\frac{1}{2}$ 中盈分 $=2924.291507>$ 通法 $-\frac{1}{2}$ 中盈分 $=2375.708333$

所以，该节气为有没之气。按式(8－4)：

没日点到该节气子夜时间

$$=\frac{1110343-360\times2924.291507}{15943}$$

$$=3.612749(\text{日})$$

没日点到冬至子夜时间：

$$15+3.612749=18.612749(\text{日})$$

验算：

上元在子夜，又是节气的起点，所以也应是没的起点。设开元十二年冬至积日除以一没日数(1110343/15943)的整数部分为 f，则所求为 $(f+1)$ 次没，该没距冬至子夜的时间为 $(f+1)\times1110343/15943$ 减去积日之整数部分，依此可求得 $f=508506914$。

所以：

没日点距冬至子夜的时间

$$=508506915\times\frac{1110343}{15943}-35414733314$$

$$=18.612745(\text{日})$$

(4)求开元十二年天正冬至后第一个灭日。

设冬至后第一个朔日小余为 g：

因为，$g=$ 天正经朔小余 $+$ 朔望月余数 $-3040=366.00112<$ 朔虚分。所以，该月为有灭之月。按式(8－5)：

$$\text{灭日点到该月朔日子夜时间}=\frac{30\times366.00112}{1427}$$

$$=7.694487(\text{日})$$

从本节算例 a、b 可知冬至子夜到该月朔日子夜为 14 日，所以，

$$\text{灭日点到冬至子夜时间}=14+7.694487$$

$$=21.694487(\text{日})$$

验算：



上元是朔望月的起点，也是灭的起点。因为开元十二年天正冬至积日除以一灭日数$\left(\frac{30\times3040}{1427}-1\right)$的整数部分为562940131，所以本题所求为第562940132次灭。

灭日点距冬至子夜时间

$=562940132\times\left(\frac{30\times3040}{1427}-1\right)$一积日的整数部分

$=35414733335.694464-35414733314$

$=21.694464$(日)

第二节　步发敛术

发敛指一年中阳气的发生和收敛。大衍历步发敛术包括二十四节气、七十二候、六十四卦及五行用事时间的推算。其中各项内容均包含了阳历因素。

本节数据有：

天中之策：$5\frac{221\frac{31}{72}}{3040}$日。一候之日数。

地中之策：$6\frac{265\frac{86}{120}}{3040}$日$\left(=\frac{\text{策实}}{60\times3040}\right)$。一卦之日数。

贞悔之策：$3\frac{132\frac{103}{120}}{3040}$日$\left(=\frac{1}{2}\text{地中之策}\right)$。

辰法：760分(＝通法/4)。

刻法：304分(＝通法/10)。

表8－1是步发敛术中给出的二十四节气、七十二候、六十四卦对应表。七十二候是将一年二十四节气中每一气平分为三份，节气之初为初候；各节气大、小余累加天中之策，为该节气之次、末候。每一候均有相应的植物、动物等物候。据研究，大衍历引入的七十二候来自《逸周书·时则解》，与前此正光历(520)所用七十二候分属不同的系统。[①]

将易经中六十四卦与二十四节气相对应源于西汉的卦气说。这是一种以一年中阴、阳二气的升降、四季二十四节气的推移来解释易经六十四卦变化的道理、为

① 陈美东：《月令、阴阳家与天文历法》，《中国文化》，1995年，第12期。

表 8—1　卦候表

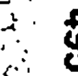
常气 四正卦 月中节	初候	次候	末候
冬至 坎初六 十一月中	蚯蚓结	麋角解	水泉动
小寒 坎九二 十二月节	雁北乡	鹊始巢	野鸡始鸲
大寒 坎六三 十二月中	鸡始乳	鸷鸟厉疾	水泽腹坚
立春 坎六四 正月节	东风解冻	蛰虫始振	鱼上冰
雨水 坎九五 正月中	獭祭鱼	鸿雁来	草木萌动
惊蛰 坎上六 二月节	桃始华	仓庚鸣	鹰化为鸠
春分 震初九 二月中	玄鸟至	雷乃发声	始电
清明 震六二 三月节	桐始华	田鼠化为鴽	虹始见
谷雨 震六三 三月中	萍始生	鸣鸠拂其羽	戴胜降于桑
立夏 震九四 四月节	蝼蝈鸣	丘蚓出	王瓜生
小满 震六五 四月中	苦菜秀	靡草死	小暑至
芒种 震上六 五月节	螳螂生	䴗始鸣	反舌无声
夏至 离初九 五月中	鹿角解	蜩始鸣	半夏生
小暑 离六二 六月节	温风至	蟋蟀居壁	鹰乃学习
大暑 离九三 六月中	腐草为萤	土润溽暑	大雨时行
立秋 离九四 七月节	凉风至	白露降	寒蝉鸣
处暑 离六五 七月中	鹰祭鸟	天地始肃	禾乃登
白露 离上九 八月节	鸿雁来	玄鸟归	群鸟群羞
秋分 兑初九 八月中	雷乃收声	蛰虫培户	水始涸
寒露 兑九二 九月节	鸿雁来宾	雀入大水为蛤	菊有黄华
霜降 兑六三 九月中	豺乃祭兽	草木黄落	蛰虫咸俯
立冬 兑九四 十月节	水始冰	地始冻	野鸡入水为蜃
小雪 兑九五 十月中	虹藏不见	天气上胜地气下降	闭塞而成冬
大雪 兑上六 十一月节	鹖鸟不鸣	虎始交	荔挺生



续表

常气 四正卦 月中节	始卦	中卦	终卦
冬至 坎初六 十一月中	公中孚	辟复	侯屯内
小寒 坎九二 十二月节	侯屯外	大夫谦	卿睽
大寒 坎六三 十二月中	公升	辟临	侯小过内
立春 坎六四 正月节	侯小过外	大夫蒙	卿益
雨水 坎九五 正月中	公渐	辟泰	侯需内
惊蛰 坎上六 二月节	侯需外	大夫随	卿晋
春分 震初九 二月中	公解	辟大壮	侯豫内
清明 震六二 三月节	侯豫外	大夫讼	卿蛊
谷雨 震六三 三月中	公革	辟夬	侯旅内
立夏 震九四 四月节	侯旅外	大夫师	卿比
小满 震六五 四月中	公小畜	辟乾	侯大有内
芒种 震上六 五月节	侯大有外	大夫家人	卿井
夏至 离初九 五月中	公咸	辟姤	侯鼎内
小暑 离六二 六月节	侯鼎外	大夫丰	卿涣
大暑 离九三 六月中	公履	辟遁	侯恒内
立秋 离九四 七月节	侯恒外	大夫节	卿同人
处暑 离六五 七月中	公损	辟否	侯巽内
白露 离上九 八月节	侯巽外	大夫萃	卿大畜
秋分 兑初九 八月中	公贲	辟观	侯归妹内
寒露 兑九二 九月节	侯归妹外	大夫无妄	卿明夷
霜降 兑六三 九月中	公困	辟剥	侯艮内
立冬 兑九四 十月节	侯艮外	大夫既济	卿噬嗑
小雪 兑九五 十月中	公大过	辟坤	侯未济内
大雪 兑上六 十一月节	侯未济外	大夫蹇	卿颐

注：据《新唐书·历志四上》。



其建立一个合理卦序的理论，东汉末年被引入历法。在大衍历中，一行采用了西汉易学家孟喜的卦气配置方法，把六十四卦分成两部分，其中坎、震、离、兑 4 卦 24 爻分主二十四节气，另外 60 卦分为公、辟、侯、大夫、卿 5 类，每类 12 卦，每卦主 $365\frac{743}{3040}/60=6\frac{265\frac{86}{120}}{3040}$ 日（地中之策）。侯卦又分为内、外两小卦，每卦主 $3\frac{132\frac{103}{120}}{3040}$ 日（贞悔之策）。这样 60 卦就被拆成了七十二卦，以与七十二候相呼应。推算上述六十卦的方法是，以冬至、大寒等十二中气之初为公卦用事日之始，累加地中之策为辟、侯卦内卦用事日之始，再加贞悔之策为侯卦外卦用事日之始，余类推。这里的某卦用事日，意为在该段时间内阴、阳二气的升降与其卦相应，同时该时间段也将按相应卦所预言的吉凶度过。[①]

步发敛术所推算的另一项内容五行用事日当与月令相关。在战国末到西汉早期的月令著作中，一岁被分为春、夏、秋、冬四时，每一时又分为孟、仲、季 3 个月。对这 12 个月，月令均有星象、物候及与之相应的政事、民事的记述。它还用阴阳五行的理论说明四时的降临，阐述春生、夏长、秋收、冬藏之理，并以此作为设定诸多政令宜忌的依据。[②] 五行用事中木、火、金、水四用事之首用事日即分别始自立春、立夏、立秋、立冬时刻，这四个节气日也是四时之首。木、火、金、水每一用事所占全部时间为 $365\frac{743}{3040}/5=73\frac{147\frac{2}{5}}{3040}$ 日，土用事日分为 4 段，每段为 $73\frac{147\frac{2}{5}}{3040}/4$ 日，接在木、火、金、水四用事日之后[③]，也即分别始自四季月中气大、小余减去贞悔之策[④]。

除了上述内容，步发敛术还有两项计算，一是求各中气、卦候距经朔时间，称为发敛去朔。一是求中气、卦候距子夜的辰刻。称为发敛加时。其中：

任一月中气去经朔日算及余秒＝当月闰衰/3040

以天中之策（或地中之策）累加减上式所得值（中气前减，中气后加），得各候（或卦）去经朔日算及余秒。

求发敛加时，即将发敛之小余[⑤]变为辰刻，大衍历在此所用辰实际为“半辰”，即现在的小时，其公式为：

---

① 本段内容参见薄树人：《古人历法中的卦气说》，见刘钝主编，《科史薪传》，辽宁教育出版社，1996 年。

② 见陈美东：《月令、阴阳家与天文历法》。

③ 参见王应伟：《中国古历通解》，辽宁教育出版社，1998 年。

④ 土首用事至季月中气距离＝5 个节气长－木（或火、金、水）用事所占时间＝$5\times\left(365\frac{743}{3040}/24\right)-365\frac{743}{3040}/5$＝贞悔之策。

⑤ 指从子夜起算的余数。



$$\text{发敛加时}=\frac{6\times\text{小余}}{\text{辰法}}=\text{半辰数}+\frac{\text{不尽数}}{\text{辰法}}$$

$$=\text{半辰数}+\frac{\text{不尽数}\times 5}{3\times\text{刻法}}(\text{刻}) \qquad (8-6)$$

上式用到如下两个比例关系：

$$\frac{\text{半辰数及余}}{24\text{ 半辰}}=\frac{\text{小余}}{3040}$$

即

$$\text{半辰数及余(发敛加时)}=\frac{6\times\text{小余}}{\text{辰法}}$$

设半辰之余所相当之刻数为 a，则：

$$\frac{a}{\text{不尽数}/\text{辰法}}=\frac{100}{24}$$

$$a=\frac{\text{不尽数}\times 5}{3\times\text{刻法}}$$

所得发敛加时从子半起算。

第三节 步日躔术

本节主要有三项内容：求太阳不均匀性改正值；黄赤道经度换算；求每日太阳位置。本节给出的三个数据为：

乾实：$1110379\frac{3}{4}$。恒星年之日分，也是周天度分。

周天度：$365\frac{779\frac{3}{4}}{3040}$度(＝乾实/3040)。

岁差：$36\frac{3}{4}$(＝乾实－策实)。

一、求太阳不均匀性改正值

(一)日躔表

与大多数历法不同，大衍历是以定气为表列间隔给出的二十四节气太阳不均匀性改正表，也称日躔表。由于各定气所含时间不同，《旧唐书·历志》在表中列出了每气辰数，《新唐书·历志》则给出了求定气长的公式，现以《旧唐书》为例(见表 8－2)。

表 8—2 日躔表①

定气	辰数	盈缩分	先后数*	损益率	朓朒积
冬至	173.3	盈 2353	先端	益 176*	朒初
小寒	175.3	盈 1845	先 2353	益 138	朒 176
大寒	177.1	盈 1390	先 4198	益 104	朒 314
立春	178.8	盈 976	先 5588	益 73	朒 418
雨水	180.3	盈 588	先 6564	益 44	朒 491
惊蛰	181.8	盈 214	先 7152	益 16	朒 535
春分	183.5	缩 214	先 7366	损 16	朒 551
清明	184.9	缩 588	先 7152	损 44	朒 545
谷雨	186.5	缩 976	先 6564	损 73	朒 491
立夏	188.1	缩 1390	先 5588	损 104	朒 418
小满	189.9	缩 1845	先 4198	损 138	朒 314
芒种	191.9	缩 2353*	先 2353	损 176	朒 176
夏至	191.9	缩 2353	后端	益 176	朓初
小暑	189.9	缩 1845	后 2353	益 138	朓 176
大暑	188.1	缩 1390	后 4198	益 104	朓 314
立秋	186.5	缩 976	后 5588	益 73	朓 418
处暑	184.9	缩 588	后 6564	益 44	朓 491
白露	183.5	缩 214	后 7152	益 16	朓 535
秋分	181.8	盈 214	后 7366	损 16	朓 551
寒露	180.3	盈 588	后 7152	损 44	朓 545
霜降	178.8	盈 976	后 6564	损 73	朓 491
立冬	177.1	盈 1390	后 5588	损 104	朓 418
小雪	175.3	盈 1845	后 4198	损 138	朓 314
大雪	173.3	盈 2353*	后 2353	损 176	朓 176

表 8—2 中，盈缩分是一节气内太阳实行度分与平行度分的差；先后数是盈缩

① 《旧唐书·历志三》。如果考虑到整张表及后面公式表述的一致性，第 5 栏夏至到白露的“益”应换为“损”，秋分到大雪的“损”应换为“益”，第 6 栏中朓意为多余，朒意为不足，均为太阳的平均运动减去实际运动的差。此外表中带 * 号的栏目已按《新唐书》等做了校正。

分之和，即从冬至到该节气时刻太阳实行度分和平行度分之差；损益率和朓朒积是以月亮平均速度分别除盈缩分和先后数所得商。此表中，冬至、夏至先后数为零，而且太阳在冬至附近运动最快，说明大衍历以冬至为太阳近地点，夏至为远地点。这个值在开元十二年的误差为 8°.87。[1]

《新唐书·历志》有公式：

$$\text{各定气时间长度}=\text{三元之策}\pm\frac{\text{该气盈缩分}}{3040}\text{(日)}$$

（盈减，缩加）(8－7)

此长度乘 12，即得《旧唐书·历志》中的辰数值。

以日躔表为基础，可以求出各定气的每日盈缩分、每日先后数、每日朓朒积及平朔时的太阳改正，也即任一时刻的朓朒积。

(二)求各定气每日盈缩分、每日先后数和每日朓朒积

该术术文为：

> 以所入气并后气盈缩分，倍六爻乘之，综两气辰数除之，为末率。又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，以少减多，余为气差。加减末率（至后以差加，分后以差减），为初率。倍气差，亦倍六爻乘之，复综两气辰数以除之，为日差。半之，以加减初末，各为定率。以日差累加减气初定率（至后以差减，分后以差加），为每日盈缩分。乃驯积之，随所入气日加减气下先后数，各其日定（冬至后为阳复，在盈加之，在缩减之。夏至后为阴复，在缩加之，在盈减之。距四正[2]前一气，在阴阳变革之际，不可相并，皆因前末为初率。以气差至前加之，分前减之，为末率。余依前率，各得所求。其朓朒亦仿此求之，各得每日定数……)[3]



设 Δf_1、Δf_2 为所入气及后气盈缩分的绝对值，L_1、L_2 为上述两气所含辰数，$t_1=L_1/12$，$t_2=L_2/12$ 为其所含日数，则据术文：

$$\text{末率}=\frac{(\Delta f_1+\Delta f_2)\times 12}{L_1+L_2}=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{t_1+t_2}$$

$$\text{气差}=\left|\frac{12\Delta f_1}{L_1}-\frac{12\Delta f_2}{L_2}\right|=\left|\frac{\Delta f_1}{t_1}-\frac{\Delta f_2}{t_2}\right|$$

---

① 陈美东：《古历新探》，辽宁教育出版社，1995 年，第 322、314 页。

② 即二分二至。

③ 《旧唐书·历志三》。

$$初率=末率\pm气差=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{t_1+t_2}\pm\left|\frac{\Delta f_1}{t_1}-\frac{\Delta f_2}{t_2}\right|$$

（至后加，分后减）

$$日差=\frac{2\times气差\times12}{L_1+L_2}=\frac{2\left|\frac{\Delta f_1}{t_1}-\frac{\Delta f_2}{t_2}\right|}{t_1+t_2} \quad (8-8)$$

$$气初定率=初率\pm\frac{1}{2}日差$$ （分后加，至后减）

因分后 $\Delta f_2>\Delta f_1$，至后 $\Delta f_2<\Delta f_1$，上式又可表达为：

$$气初定率=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{t_1+t_2}+\frac{\Delta f_1}{t_1}-\frac{\Delta f_2}{t_2}-\frac{\frac{\Delta f_1}{t_1}-\frac{\Delta f_2}{t_2}}{t_1+t_2} \quad (8-9)$$

这是一个不等间距的二次差内插公式，最近的研究表明，一行构造这一公式的思路与刘焯构造皇极历中的等间距二次差内插公式的思路是相同的。[①] 当 $t_1=t_2=t$ 时，式(8－9)可变为：

$$气初定率=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}\cdot\frac{1}{t}+(\Delta f_1-\Delta f_2)\frac{1}{t}-\frac{1}{2}(\Delta f_1-\Delta f_2)\frac{1}{t^2} \quad (8-10)$$

同刘焯皇极历推太阳每日迟速数术中导出的“气初日陟降数”公式一致。[②]

设 $\frac{1}{t}=t'$，式(8－10)即为隋唐历法中常用的等间距二次差内插公式的一般形式。

气初定率是所求节气初日的盈缩分，大衍历据此给出：

$$第\ n\ 日盈缩分=气初定率\pm(n-1)日差$$

（至后减，分后加）(8－11)

$$\begin{aligned}第\ n\ 日先后定数&=该节气初先后定数\pm\sum_{i=1}^{n}第\ i\ 日盈缩分\\&=该节气初先后定数\\&\quad\pm\left[n\times气初定率\pm\frac{n(n-1)}{2}日差\right]\end{aligned} \quad (8-12)$$

式(8－12)括号内是至后减，分后加；括号外是冬至后盈加缩减，夏至后盈减缩

① 王荣彬：《中国古代历法中的插值法构建原理》，《中国古代数理天文学探析》，西北大学出版社，第281页。

② 参见王荣彬：《刘焯皇极历插值法的构建原理》，《自然科学史研究》，1994，3(4)；刘钝：《皇极历中等间距二次差插值方法术文释义及其物理意义》(同上刊)。



加。也可一并归纳为前多减，前少加（括号内据盈缩分判断，括号外据先后数判断）。

只需将式（8－8）、式（8－9）、式（8－12）中的 Δf 换成损益率，先后定数换成朓朒积，就可以求得第 n 日朓朒定数。

（三）求平朔、望时太阳改正

太阳不均匀性改正在历法中的一个重要应用就是求平朔、望时的太阳改正（见本章第四节小节一），也即求太阳在二十四节气中任一点时的朓朒定数，其方法是：

（1）推所求年二十四定气大、小余

各定气大、小余＝该节气恒气大、小余±气下先后数

（先减，后加）（8－13）

（2）推所求平朔（望）到定气的时间间隔

平朔（望）入定气日算及余秒

＝平朔（望）大、小余－所入定气大、小余[1]　　（8－14）

（3）求平朔（望）时太阳改正（朓朒定数）

设平朔（望）入定气日算及余秒为 n，则：

平朔（望）时太阳改正

$$=\text{所入气朓朒积}\pm\left[n\times\text{气初定率}\pm\frac{n(n-1)}{2}\text{日差}\right] \qquad (8-15)$$

式中气初定率和日差中的 Δf 均为损益率，符号是前多减，前少加（括号内据损益率判断，括号外据朓朒积判断）。

二、黄赤道宿度换算

中国古代测量天体位置以二十八宿赤、黄道距度为基本坐标。大衍历中首先给出了观测所得二十八宿各宿赤道距度值（见第一章第三节），然后又列出了经黄赤道宿度变换后算得的二十八宿各宿黄道距度值（见第一章第三节）。关于黄赤道差换算，大衍历和大衍历议均有有关术文，据术文可列出本书第一章第八节的表1－18，若为计算简便，还可列出如表8－3的表格。

表8－3中 a 为从二分、二至起算的赤道度，l 为相应黄道度，$(l-a)$ 栏在二分前后取正号，二至前后取负号，45度至46.31度处值与45度处相同。利用此表，可以在冬至赤道位置已知时从赤道度推出黄道度。大衍历采用的开元十二年冬至赤

[1] 若平朔（望）大余不足减，则加爻数再减。

经，据其所给岁差推算，为10.52度，当为该历计算二十八宿黄道距度的标准。[①]

表8—3　黄赤道差换算表[②]

a	$l-a$	$\Delta(l-a)$
0	0	0
5	$\pm\frac{12}{24}$	$\pm\frac{12}{24}$
10	$\pm\frac{23}{24}$	$\pm\frac{11}{24}$
15	$\pm1\frac{9}{24}$	$\pm\frac{10}{24}$
20	$\pm1\frac{18}{24}$	$\pm\frac{9}{24}$
25	$\pm2\frac{2}{24}$	$\pm\frac{8}{24}$
30	$\pm2\frac{9}{24}$	$\pm\frac{7}{24}$
35	$\pm2\frac{15}{24}$	$\pm\frac{6}{24}$
40	$\pm2\frac{20}{24}$	$\pm\frac{5}{24}$
45	±3	$\pm\frac{4}{24}$

三、求每日太阳经度

(一)求冬至时刻太阳赤经 a

中积分满乾实去之，余下小于乾实之数除以通法，为度。从赤道虚九(上元时冬至位置)起算，得 a。a 实际就是因岁差引起的所求冬至点到上元冬至点的赤经差。

(二)求冬至时刻太阳黄经 b

大衍历将冬至太阳赤经转换成黄经时，把整度数与度余分开计算，其术文为：

以度余减大衍通法，余以冬至日躔之宿距度所入限乘之，为距前分。置距度下黄赤道差，以大衍通法乘之，减去距前分，余满百二十除，为定

① 陈美东：《古历新探》，第85页。

② 原术文中给出的 $\Delta(l-a)$ 为12，11，…，4，该数乘以限度5，为以120为分母的分值，除以120为度。此表直接列出了度数。



差。不满者，以象统乘之，复除，为秒分。乃以定差及秒减赤道宿度，余依前命之，即天正冬至加时所在黄道宿度及余也。[1]

设冬至时太阳赤经为 a，其中整度数为 a_1，度余为 a_2（度分），则 a 处的黄赤道差（定差）等于 (a_1+1) 度处黄赤道差减去与（通法 $-a_2$）相应的黄赤道差，而求太阳黄经 b 的公式为：

$$
\begin{aligned}
b &= a - \text{定差} \\
&= a - \left[\frac{\text{距度下黄赤道差}\times\text{通法}}{120} - \frac{(\text{通法}-\text{度余})\times\text{冬至日躔距度所入限数}}{120}\right] \\
&= a - \left\{\frac{(a_1+1)\text{度处黄赤道差}\times\text{通法}}{120} - \frac{(\text{通法}-a_2)\times\left[12-\left(\frac{a_1+1}{5}-1\right)\right]}{120}\right\} \qquad (8-16)
\end{aligned}
$$

上式中，(a_1+1) 度处黄赤道差取的是以 120 为分母的分值，除以 120 为度。$\frac{\text{通法}-a_2}{120}\left[12-\left(\frac{a_1+1}{5}-1\right)\right]$ 即为与（通法 $-a_2$）相当的黄赤道差，它是由：

$$
\frac{(\text{通法}-a_2)\text{所相当的黄赤道差}}{\text{通法}-a_2} = \frac{\left[12-\left(\frac{a_1+1}{5}-1\right)\right]/24}{5}
$$ [2]

推导而来。

大衍历的上述公式十分繁琐。实际上不论是否有度余，均可直接利用表格求算黄赤道差，因此该式很少被后世历法采纳。

（三）求各定气时刻太阳黄经 c

$$
c = b + n\times\left(\text{三元之策}+\frac{\text{岁差}}{24}\right) \qquad (n=1,2,\cdots,23)\ (8-17)
$$

① 《旧唐书·历志三》。

② 参见王应伟：《中国古历通解》。

(四)求各定气初日夜半太阳黄经 d[①]

$$d=c-定气小余\left(1\pm\frac{其日盈缩分}{通法}\right)$$

(盈加,缩减)(8－18)

(五)求每日夜半太阳黄经 e

$$e=d+\sum_{i=1}^{n}(i\pm第\ i\ 日盈缩分)^{②}$$

(盈加,缩减)($n=1,2,\cdots,15$)(8－19)

本节算例:

(1)求开元十二年七月合朔太阳改正

据本章第一节(1)、(2)两算例,七月朔应在节气大暑中。

因为,

开元十二年大暑恒气大、小余

＝该年冬至大、小余＋14×三元之策－n×60[③]

＝227.802659－n×60

所以,按式(8－13):

大暑定气大、小余

＝恒气大、小余＋气下先后数

＝227.802659－n×60＋4198/3040

＝229.18358－3×60

＝49.18358(日)

(即癸丑日,小余＝558.0832 日分)

又因为

七月平朔大、小余

＝天正经朔大小余＋8×四象之策－n×60

＝294.834539－n×60

＝54.834539(日)

(即戊午日,小余＝2536.99856 日分)

---

① 此夜半应为定气晨前夜半。

② 此式有近似。因每日盈缩分是从定气时刻而不是子夜起算。

③ 冬至大、小余及下文天正经朔大、小余值分别见本章第一节算例(1)、算例(2)。n×60 意为满 60 去之,下同。



所以，按式(8－14)：

七月平朔到大暑时间

＝七月平朔大、小余－大暑定气大、小余

＝5.650959(日)

下面是上述计算之示意图(图 8－4)：

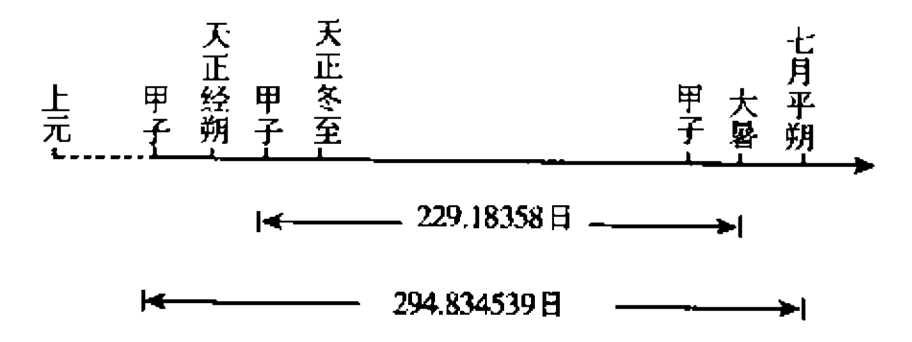


图 8－4 求七月平朔到大暑时间示意图

对于大暑这一节气，损益率 $\Delta f_1=104$ 分，$\Delta f_2=73$ 分，$t_1=188.1/12=15.675$ 日，$t_2=186.5/12=15.5417$ 日，$n=5.650959$ 日，将前面四值代入式(8－8)和式(8－9)，得日差＝0.124147 分，气初定率＝7.545697 分。又据式(8－15)：

七月平朔太阳改正(朓)

$$=\text{大暑朓朒积}+\left[n\times\text{气初定率}-\frac{n(n-1)}{2}\text{日差}\right]$$

$$=314+\left(5.650959\times7.545697-\frac{5.650959\times4.650959}{2}\times0.124147\right)$$

＝355.008985(日分)＝0.116779(日)

(2)求开元十二年七月望太阳改正

从本节算例(1)得：

七月平望到大暑时间

$$=\text{七月平朔到大暑时间}+\frac{1}{2}\text{四象之策}$$

$$=5.650959+\frac{1}{2}\times29\frac{1613}{3040}$$

＝20.416255(日)

以此数减去大暑定气日数(188.1/12)，得 4.741255 日，为七月平望到立秋时间。

对于立秋这一节气，损益率 $\Delta f_1=73$ 分，$\Delta f_2=44$ 分，$t_1=186.5/12=15.5417$ 日，$t_2=184.9/12=15.4083$ 日，$n=4.741255$ 日，将前面四值代入式(8－8)和式



(8－9),得日差＝0.118994分,气初定率＝5.562231分。又据式(8－15):

七月平望太阳改正(朓)

$$=\text{立秋朓朒积}+\left[n\times\text{气初定率}-\frac{n(n-1)}{2}\text{日差}\right]$$

$$=418+\left(4.741255\times5.562231-\frac{4.741255\times3.741255}{2}\times0.118994\right)$$

$$=443.316583(\text{分})=0.145828(\text{日})$$

(3)黄赤道换算两例

①将大衍历二十八宿赤道距度表中牛宿距度换算为黄道距度。

大衍历给出斗宿赤道距度26度,牛宿距度8度。因冬至点在斗10.52度,所以牛宿起、末点距冬至赤道经度分别为15.48度(a_1)和23.48度(a_2)。设前者对应黄道度l_1,后者对应黄道度l_2,则据表8－3:

$$l_1=a_1-\left(1\frac{9}{24}+\frac{9}{24}\times\frac{0.48}{5}\right)=14.069(\text{度})$$

$$l_2=a_2-\left(1\frac{18}{24}+\frac{8}{24}\times\frac{3.48}{5}\right)=21.498(\text{度})$$

牛宿黄道距度$=l_2-l_1=7.429$(度)

大衍历所给为7.5度。

②将大衍历奎宿赤道距度换算成黄道距度。

奎宿在春分点一带。所以先以冬至点赤经＋周天度/4得出春分点在奎3.5776度,则奎的起始点(到春分)赤道经度为3.5776度(a_1)。末点(到春分)赤道经度为奎宿赤道距度16度减去3.5776度,等于12.4224度(a_2)。设其相应黄道度分别为l_1、l_2,则据表8－3:

$$l_1=a_1+\frac{12}{24}\times\frac{3.5776}{5}=3.9354(\text{度})$$

$$l_2=a_2+\left(\frac{23}{24}+\frac{10}{24}\times\frac{2.4224}{5}\right)=13.5826(\text{度})$$

奎宿黄道距度$=l_1+l_2=17.518$度。

大衍历所给为17.5度。

第四节　步月离术

类似于步日躔术。这一节主要内容也有三项:月亮不均匀性改正和定朔改正;黄白道经度换算;月亮每日白道经度。其所用基本数据为:



转终:6701279(=转终日×3040×80)。近点月秒数。

转终日:$27\frac{1685\frac{79}{80}}{3040}$。近日月日数。

转法:76。月离表中转分之分母。转分/转法为每日行度。

转秒法:80。转终日秒数之分母。每日 3040 分,每分 80 秒。

一、月亮不均匀性改正和定朔改正

(一)月离表

大衍历给出的月亮不均匀运动表即月离表,见表 8—4。

表 8—4 中,转日是月亮到远地点的平均日数;转分是月亮每日实行分数,该值除以转法为每日实行度数;列衰是后一日转分与前一日转分之差值;转积度是逐日转分(化为度数)之和;损益率等于[(月每日平行分一月每日实行分)/月每日平行分]×通法,单位为日分。其中月每日平行分约在 1016 分(13.37 度)上下,各日略有不同[①];朓朒积是从远地点起算的损益率之和。

从表 8—4 知,作月亮不均匀性改正需先求月亮到远地点的平均日数(入转日),大衍历推算经朔、弦、望及其夜半时刻月亮入转的方法如下:

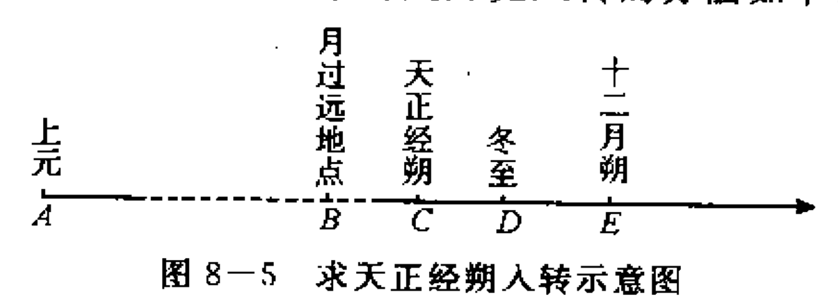


图 8—5 求天正经朔入转示意图

$$\begin{aligned}&\text{天正经朔入转日}(BC)\\&=\frac{(\text{朔积分}-m\times\text{转终})\times\text{秒法}-m'\times\text{转终}}{\text{秒法}\times3040}\text{②}\\&=\frac{\text{朔积分}\times\text{秒法}-n\times\text{转终}}{\text{秒法}\times3040}\text{③}\\&=\frac{\text{朔积分}-n\times\text{转终}(\text{分})}{3040}\end{aligned}\tag{8-20}$$

① 陈美东:《古历新探》,第 300 页。

② 这是《旧唐书》中的公式。转终=80×转终分,m 为正整数,括号内容表示满 80 倍的转终分去之。m' 及下文中 n 均为正整数,乘以转终,意为满转终去之。

③ 这是《新唐书》中的公式。

表 8—4 月 离 表[①]

转日	转分	列衰	转积度	损益率	朓朒积
1	917	进 13	0	益 297	0
2	930	进 13	12.5	益 259	朒 297
3	943	进 13	24.23	益 220	朒 556
4	956	进 14	36.54	益 180	朒 776
5	970	进 14	49.22	益 139	朒 956
6	984	进 16	62.4	益 97	朒 1095
7	1000	进 18	75	初益 48　末损 6	朒 1192
8	1018	进 19	88.12	损 64	朒 1234
9	1037	进 14	101.42	损 106	朒 1170
10	1051	进 14	115.15	损 148	朒 1064
11	1065	进 14	129.2	损 189	朒 916
12	1079	进 13	143.3	损 229	朒 727
13	1092	进 13	157.18	损 267	朒 498
14	1105	进 10　退 3	171.46	初损 231　末益 66	朒 231
15	1112	退 13	186.11	益 289	朓 66
16	1099	退 13	200.59	益 250	朓 355
17	1086	退 13	215.18	益 211	朓 605
18	1073	退 14	229.4	益 171	朓 816
19	1059	退 14	243.49	益 130	朓 987
20	1045	退 17	257.44	益 87	朓 1117
21	1028	退 18	271.25	初益 36　末损 18	朓 1204
22	1010	退 18	284.65	损 73	朓 1222
23	992	退 14	298.11	损 116	朓 1149
24	978	退 14	311.15	损 157	朓 1033
25	964	退 14	324.05	损 198	朓 876
26	950	退 13	336.57	损 237	朓 678
27	937	退 13	349.19	损 276	朓 441
28	924	退 7 进 6	361.44	初损 165　末益入后	朓 165

天正经朔入转日＋转差日（转差日＝四象之策－转终日＝$1\frac{2967\frac{1}{80}}{3040}$日），满转终日去之，即为次朔入转日。其余各朔依此类推。以$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$四象之策加于平朔入转，得弦、望入转。各入转日减去该朔（弦、望）小余，为其夜半入转日。

① 《新唐书·历志四上》。



(二)求月亮改正

利用月离表求任一时刻月亮朓朒定数,即月亮改正的术文为:

各置朔、弦、望所入转日损益率,并后率而半之,为通率。又二率相减,为率差。前多者,以入余减通法,余乘率差,盈通法而一,并率差而半之。前少者,半入余,乘率差,亦以通法除之。(皆加通率,入余乘之,通法而一),[①]为加时转率。乃半之,以损益加时所入,余为转余。其转余,应益者,减法。应损者,因余。皆以乘率差,盈通法而一,加于通率,转率乘之,通法约之,以朓减、朒加转率,为定率。乃以定率损益朓朒积,为定数。(其后无同率者,亦因前率。应益者以通率为初数,半率差而减之。应损者,即为通率。其损益入余进退日,分为二日,随余初末,如法求之。所得并以损益转率。此术本出皇极历,以究算术之微变,若非朔望有交者,直以入余乘损益率,如通法而一,以损益朓朒,为定数。)[②]

以上术文中,转定率是与入转余(入余)相应的损益率,这里先考虑前多(应益)时的情形。设所入转日损益率和后日损益率的绝对值分别为Δf_1、Δf_2,入余/通法$=t$,则按术文:

$$\text{通率}=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2},\text{率差}=\Delta f_1-\Delta f_2\text{③}$$

$$\begin{aligned}\text{转率}&=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\frac{(\text{通法}-\text{入余})\times\text{率差}}{\text{通法}}+\text{率差}\right]\right\}\frac{\text{入余}}{\text{通法}}\\&=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}t+\frac{t}{2}[(1-t)(\Delta f_1-\Delta f_2)\\&\quad+(\Delta f_1-\Delta f_2)]\\&=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}t+(\Delta f_1-\Delta f_2)t-\frac{t^2}{2}(\Delta f_1-\Delta f_2)\end{aligned}\qquad(8-21)$$

这是中国古代历法等间距二次差内插的一般形式(见本章第三节小节一)。所得转率在朓朒积二次差相等时应为与入余相应的损益率,但由于月离表朓朒积的二次差不相等,大衍历仿照皇极历和麟德历,以此为基础又做了第二次改正[④]。设

---

① 括号内术文据皇极历、麟德历补。

② 《新唐书·历志四上》。

③ 率差应为正值,所以以大减小。下文同此。

④ 参见李俨:《中算家的内插法研究》,科学出版社,1957年,第31～32页,第39～40页;王荣彬:《中国古代历法中的插值法构建原理》,《中国古代数理天文学探析》,第271页;纪志刚:《隋唐历法的创造性转变》,同上,第37～40页。

第二次改正值为 A，转余＝人余－$\frac{转率}{2}$，t_0＝转率/通法，则有：

$$A=\frac{转率}{通法}\left[通率+(通法-转余)\times\frac{率差}{通法}\right]$$

$$=t_0\left[\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}+\left(1-t+\frac{t_0}{2}\right)(\Delta f_1-\Delta f_2)\right]$$

$$=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}t_0+t_0(1-t)(\Delta f_1-\Delta f_2)+\frac{t_0^2}{2}(\Delta f_1-\Delta f_2) \quad (8-22)$$

$$转定率=转率-A$$

$$=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}(t-t_0)+(\Delta f_1-\Delta f_2)(t-t_0)$$

$$-\frac{(t-t_0)^2}{2}(\Delta f_1-\Delta f_2) \quad (8-23)$$

关于前少(应损)者的讨论，涉及对“后率”的理解。目前被较多接受的一个观点是，后率为比所入日 Δf 更小之日的损益率[①]。按这一理解，前少时，后率即指所入日前一日的损益率，设此损益率为 Δf_0，则：

$$通率=\frac{\Delta f_1+\Delta f_0}{2}，率差=\Delta f_1-\Delta f_0$$

$$转率=\left(通率+\frac{人余\times率差}{2\times通法}\right)\frac{人余}{通法}$$

$$=\frac{\Delta f_1+\Delta f_0}{2}t+\frac{t^2}{2}(\Delta f_1-\Delta f_0) \quad (8-24)$$

设第二次改正为 A'，转余＝人余＋$\frac{转率}{2}$，t_0＝转率/通法，则有：



$$A'=\frac{转率}{通法}\left(通率+转余\times\frac{率差}{通法}\right)$$

$$=\frac{\Delta f_1+\Delta f_0}{2}t_0+t_0\left(t+\frac{t_0}{2}\right)(\Delta f_1-\Delta f_0) \quad (8-25)$$

$$转定率=转率+A'$$

$$=\frac{\Delta f_1+\Delta f_0}{2}(t+t_0)+\frac{(t+t_0)^2}{2}(\Delta f_1-\Delta f_0) \quad (8-26)$$

如果设 $\Delta f_2-\Delta f_1=\Delta f_1-\Delta f_0$(实际差很小)，则有 $\Delta f_0=2\Delta f_1-\Delta f_2$，将此二式代入式(8－26)，可得：

$$转定率=\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}(t+t_0)-(\Delta f_2-\Delta f_1)(t+t_0)$$

① 这一观点是清代学者李善兰首先提出的。参见王荣彬：《中国古代历法中的插值法构建原理》，《中国古代数理天文学探析》。第 270 页注②



$$+\frac{(t+t_0)^2}{2}(\Delta f_2-\Delta f_1) \tag{8-27}$$

求得转定率后，即可得：

任一时刻月亮朓朒定数（月亮改正）

＝所入转日朓朒积±转定率

（损减，益加）（8－28）

（三）求定朔（望）时刻

求任一时刻太阳改正和月亮改正的目的之一是为了计算定朔（望）时刻。图8－6显示了定朔计算的原理：[①]

图8－6 定朔改正示意图

在图8－6中，S、M为平朔时日、月平均位置，S'、M'为其时日、月真位置。S''、M''为定朔时日、月位置，如设平朔到定朔的时间间隔为ΔT，而且此时间段内太阳实行速为s，月亮实行速为m，则：

$$\Delta T=\frac{M'M''}{m}=\frac{S'S''}{s}$$

因为，从 $M'M''=M'M+SS'+S'S''$

$$=M'M+SS'+\frac{M'M''}{m}s$$

可以推出

$$M'M''=\frac{M'M+SS'}{m-s}m \tag{8-29}$$

所以

$$\Delta T=\frac{M'M''}{m}=\frac{M'M}{m-s}+\frac{SS'}{m-s} \tag{8-30}$$

式中第一项为月亮平朔时的朓朒定数（月亮改正），第二项为太阳平朔时朓朒定数（太阳改正）。如前所述，在大衍历的日躔表和月离表中，上式的$m-s$均近似地取为月亮平均速度。求得ΔT，即有：

定朔大、小余＝平朔大、小余＋ΔT

① 刘金沂：《隋唐历法中入交定日术的几何解释》，《自然科学史研究》，1983，2（4）。

$$=\text{平朔大、小余}\pm\text{太阳改正}\pm\text{月亮改正}$$

（朓减，朒加）(8－31)

此式也适用于定弦、定望计算。

确定定朔(弦、望)大、小余之后，可以求出其在定气的位置，并以第三节步日躔术三中的方法求得其晨前夜半太阳黄道度，然后有：

定朔(弦、望)时刻太阳黄道度

＝定朔(弦、望)晨前夜半太阳黄道度

$$+\text{定朔(弦、望)小余}\left(1\pm\frac{\text{其日盈缩分}}{3040}\right) \quad (8-32)$$

式中符号为盈加缩减。

二、黄白道经度换算

类似于黄赤道经度换算，根据大衍历黄白道经度换算的术文，可以列出如表8－5的简化表。

表8－5中，a为从黄白正交或半交(黄白大距处)起算的黄道度，l为相应的白道度，$(l-a)$栏在正交前后取正号，半交前后取负号。45度至46.31度处值与45度处相同。

表8－5 黄白道差换算表[1]

a	$l-a$	$\Delta(l-a)$
0	0	0
5	$\pm\frac{12}{48}$	$\pm\frac{12}{48}$
10	$\pm\frac{23}{48}$	$\pm\frac{11}{48}$
15	$\pm\frac{33}{48}$	$\pm\frac{10}{48}$
20	$\pm\frac{42}{48}$	$\pm\frac{9}{48}$
25	$\pm1\frac{2}{48}$	$\pm\frac{8}{48}$

[1] 原术文中给出的$\Delta(l-a)$为12，11，…，4，该数乘以5(限度)为以240为分母的分值，除以240为度。此表直接列出了度数。

续表

a	$l-a$	$\Delta(l-a)$
30	$\pm 1\frac{9}{48}$	$\pm\frac{7}{48}$
35	$\pm 1\frac{15}{48}$	$\pm\frac{6}{48}$
40	$\pm 1\frac{20}{48}$	$\pm\frac{5}{48}$
45	$\pm 1\frac{24}{48}$	$\pm\frac{4}{48}$

表 8－5 给出的是黄白升交点与黄赤升交点重合时黄白道经度间的关系，由于黄白交点具有沿黄道退行的运动，所以大衍历以黄白交点距冬至、夏至候数乘以表中黄白道差($l-a$)，再除以 18，得出黄白交点在任意位置时的黄白道差，称为“月行与赤道差数”。[①]

三、求月亮每日白道经度

求月亮白道经度的步骤是：先求出定朔、弦、望时刻月亮白道经度，再求其夜半和每日夜半及晨昏白道经度。

(一)求定朔、弦、望月亮白道经度

1. 求正交时刻月亮黄道宿度

由于交点月是一平均值，所以以其算得的月过交点时刻称为“平交”，而计人不均匀运动后求得的月过交点时刻称为“正交”。求月亮白道经度，需用到黄白道换算，后者又需先知黄白正交点的黄道宿度，也即正交时刻月亮的黄道宿度。大衍历相关的计算可以列成如下各式：

平交到平中气时间(a)

＝交终日－(入交泛日[②]＋其月平中气到平朔时间)　　(8－33)

平交到定中气时间(b)＝a±其气初先后数

(先加，后减)(8－34)

平交入(定)气朓朒定数(c)

$$=所在气朓朒积\pm\left(\frac{b之整数\times12+3\times b之小余/760}{所在气辰数}\right)$$

① 薮内清：《隋唐历法史之研究》，昭和十九年三省堂版，第 90 页；及陈遵妫：《中国天文学史》第三册，上海人民出版社，1984 年，第 718～719 页。

② 入交泛日是平朔到月过交点时间。参见本章第六节小节一。

$\times$其气损益率

$=$所在气朓朒积$\pm b\times$其气损益率/所在定气日数

(8－35)

平交入转朓朒定数(d)

$=$[其日(入转)朓朒积$\pm$(平交入定气余$+$其日夜半入转余)/通法$\times$其日损益率]$\frac{交率}{交数}$ (8－36)

正交到定气时间(e)$=b\pm c\pm d$ (朓减,朒加)

(8－37)

正交加时黄道宿度(f)$=$正交日夜半太阳黄道宿度$\pm e$之余数$\times$(1$\pm$其日盈缩分)

(盈加,缩减)(8－38)

上述各式中,式(8－33)至式(8－37)的推算是为了求出正交到定气时间。以此为基础,式(8－38)求出的是正交时太阳(而不是月亮)的黄道宿度。但在下面2的计算中,此值经黄白道换算后却成了正交时月亮白道宿度。这似乎是有问题的。五代及宋以后,大多数历法将此计算的思路改为先求正交到平朔月亮行度和平朔时太阳黄道度,由于平朔时日、月平黄经相同,所以以上两值相加减,即可得正交时月亮黄道度。前述推算中存在的另外一个比较主要的问题是,式(8－35)至式(8－37)所用方法与本章第六节的入交定日术类同,但前者天文意义不明确。唐宣明历时,式(8－35)和式(8－36)中的交率/交数均被取消,这一做法后为大多数历法采纳。

2. 求正交时刻月亮白道宿度

正交加时月离九道宿度(g)

$$=f\pm\frac{正交点距冬至、夏至候数\times定差}{18} \quad (8-39)$$

式中,

定差$=$[距度下黄白道差$\times$通法$-$(通法$-$正交加时度余)$\times$正交之宿距度所入限数]$\div$240

$$=\left\{距度下黄白道差\times通法-(通法-正交加时度余)\times\left[12-\left(\frac{正交加时整度数+1}{5}-1\right)\right]\right\}\div 240 \quad (8-40)$$

以上两式中各项意义及推导过程可参见本章第三节小节三。

3. 求定朔、弦、望时刻月亮白道度

该段术文为:



各置其日加时日躔所在，变从九道，循次相加。凡合朔加时月行潜在日下，与太阳同度，是为离象(凡置朔、弦、望加时黄道日度，以正交加时所在黄道宿度减之，余以加其正交九道宿度，命起正交宿度算外，即朔、弦、望加时所当九道宿度也。其合朔加时若非正交，则日在黄道，月在九道，各入宿度，虽多少不同，考其去极。若应准绳，故云月行潜在日下，与太阳同度)。以一象之度九十一、余九百五十四、秒二十二半为上弦，兑象。倍之而与日冲，得望，坎象。叁之，得下弦，震象。各以加其所当九道宿度，秒盈象统从余，余满大衍通法从度。命如前，各其日加时月所在度及余秒也。[1]

图 8－7 为求定朔月亮白道经度之示意图。图中 AC 为黄白正交点的黄道宿度，前文已提到，大衍历的相关计算是有问题的。BC 为正交点的白道宿度，应由式(8－39)求出。S、M 分别为定朔时太阳和月亮位置。

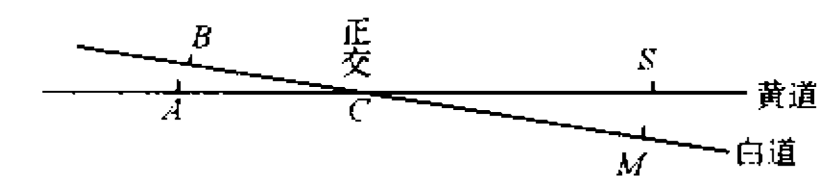


图 8－7　求定朔月亮白道经度

大衍历小注[2]中的方法以公式表示即为：

$$BM=BC+(AS-AC) \quad (8-41)$$

这一计算显然有些粗略，因为从 CS 到 CM 应当同从 AC 到 BC 一样，进行黄白道经度的换算。

(二)求每日夜半及晨昏月亮白道经度

1. 求每日月转定度(从子夜到子夜月亮实行度)

月离表中每日转分是从月过远地点时刻起算的，这一时刻并不一定在子夜，为下面计算的需要，大衍历以下式求出：

$$\text{月转定度}=\text{当日夜半入转日之转分}/\text{转法}\pm\frac{\text{当日夜半入转余}\times\text{列衰}}{\text{通法}\times\text{转法}}$$

(进加，退减)(8－42)

式中每日夜半入转余的求法是，先求定朔夜半入转，此值多与本节求得的经朔夜半入转相同，只是在定朔大余有变化时，才加(或减)一日。以一日之数累加，即

[1] 《旧唐书·历志三》。

[2] 即括号中文字。

得定朔后各日夜半入转日及余。

2. 求定朔(弦、望)晨前夜半月亮白道经度

该术文为:

视定朔、弦、望夜半入转,各半列衰以减转分。退者,定余[减通法,余][1]乘衰,以通法除,并衰而半之。进者,半余乘衰,亦以通法除,皆加所减,乃以定余乘之,盈通法而一,以减加时月度,为夜半月度。[2]

按术文列出公式:

$$\text{定朔夜半月亮白道度}=\text{定朔时刻月亮白道度}-\text{定朔小余内月亮实行分} \quad (8-43)$$

求弦、望同此。

上式中,定朔时刻月亮白道度已由式(8—41)求出。如设定朔小余内月亮实行分为 B,定朔(弦、望)夜半入转日之转分为 f_1,当 $f_1>f_2$(即退)时,列衰 $=f_1-f_2$,当 $f_1<f_2$(即进)时,列衰 $=f_2-f_1$,定余[3]/通法 $=t$,则按术文:

$$\begin{aligned}B_{退}&=\left\{\left(\text{转分}-\frac{\text{列衰}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{(\text{通法}-\text{定余})\times\text{列衰}}{\text{通法}}+\text{列衰}\right]\right\}\frac{\text{定余}}{\text{通法}}\\&=\frac{f_1+f_2}{2}t+(f_1-f_2)t-\frac{t^2}{2}(f_1-f_2)\end{aligned} \quad (8-44)$$

$$\begin{aligned}B_{进}&=\left[\left(\text{转分}-\frac{\text{列衰}}{2}\right)+\frac{\text{定余}\times\text{列衰}}{2\times\text{通法}}\right]\times\frac{\text{定余}}{\text{通法}}\\&=\frac{f_1+f_2}{2}t-(f_2-f_1)t+\frac{t^2}{2}(f_2-f_1)\end{aligned} \quad (8-45)$$

二式实际上是相同的。

3. 求每日夜半及晨昏[4]月亮白道经度

$$\begin{aligned}&\text{定朔(弦、望)次日夜半月亮白道经度}\\&=\text{定朔(弦、望)夜半月亮白道度}+\text{其日转定度}\end{aligned} \quad (8-46)$$

余类推。

$$\begin{aligned}&\text{(望前)每日昏时月亮白道度}\\&=\text{月亮当日夜半白道度}+\frac{\text{当日月转定分}}{\text{转法}}\times\left(1-\frac{\text{其日夜漏}}{2\times 100\text{刻}}\right)\end{aligned} \quad (8-47)$$

---

① 括号内为佚文,参照本节求月亮朓朒定数之术文补。

② 《新唐书·历志四上》。

③ 即定朔小余。由于定朔小余不是始自入转日之起点,下面的公式是有近似的。

④ 晨、昏分别为日出前、日入后两刻半。



（望后）每日晨时月亮白道度

$$=月亮当日夜半白道度+\frac{当日月转定分}{转法}\times\frac{其日夜漏}{2\times100\ 刻}$$

（8－48）

本节算例：

（1）求开元十二年七月朔月亮改正和定朔大、小余

①求开元十二年天正经朔人转日（BC）。

按本节式（8－20）：

$$BC=\frac{朔积分-n\times转终（分）}{3040}$$

$$=\frac{1199255781\times89773^{①}-n\times83765.9875}{3040}$$

其中朔积分－n×转终分＜转终分，由此求得 n＝1285256611。

所以，$BC=\frac{16394.6375}{3040}=5.392973$（日）。

②求开元十二年七月朔入转日。

七月朔人转日＝BC＋8×转差日

$$=5.392973+8\times1\ \frac{2967\ \frac{1}{80}}{3040}$$

$$=21.200901（日）。$$

③求七月朔月亮改正和定朔大、小余。

从②可知七月朔入转在第22日，属于“其后无同率”中“应损者”之特例。对此特例，大衍历相关术文过于简略，可能有若干脱误。在没有取得令人满意的研究结果之前，本算例拟暂用一次差内插计算其月亮改正。对采用此改正值求入交定日的第六节算例（1）来说，这一近似造成的误差是十分微小的。

按式（8－28）：

七月朔月亮改正（朓）

＝月离表第22日朓朒积－第22日损益率×入转余/通法

＝1222－73×0.200901

＝1207.334227（分）＝0.397149（日）

按式（8－31）：

七月定朔大、小余

① 见本章第一节算例（2）。

$=$七月平朔大、小余[①]－太阳改正[②]－月亮改正

$=54.834539-0.116779-0.397149$

$=54.320611$(日)

即戊午日，小余

$=0.320611\times3040=974.65744$(分)

(2)求开元十二年七月望月亮改正和定望大、小余

①求七月望入转日。

七月望入转日

$=$七月朔入转日[③]$+\frac{1}{2}$四象之策－转终日

$$=21.200901+\frac{1}{2}\times29\frac{1613}{3040}-27\frac{1685\frac{79}{80}}{3040}$$

$=8.411596$

②求七月望月亮改正。

从①可知，七月望入转在第9日，损益率为前少，将$\Delta f_1=106$、$\Delta f_0=64$、$t=0.411596$代入式(8－24)，得转率$=38.543297$(分)。设$t_0=$转率/通法$=0.012679$，与上述各量一同代入式(8－25)，得$A'=1.300273$(分)。

又按式(8－26)：

转定率$=$转率$+A'=39.84357$(分)

最后按式(8－28)：

七月望月亮改正(朒)



$=$第9日朓朒积－转定率

$=1170-39.84357$

$=1130.15643$(分)$=0.371762$(日)

③求七月定望大、小余。

七月平望大、小余

$=$七月平朔大、小余[④]$+\frac{1}{2}$四象之策-60

$$=54.834539+\frac{1}{2}\times29\frac{1613}{3040}-60$$

---

① 见本章第三节算例(1)。

② 同上

③ 见本节算例(1)。

④ 同①



$=9.599835$(日)

按式(8－31)：

七月定望大、小余

＝七月平望大、小余＋月亮改正－太阳改正[1]

$=9.599835+0.371762-0.145828$

$=9.825769$(日)

即癸酉日，

小余$=0.825769\times3040=2510.33776$(日分)

第五节　步晷漏术

交统：1520分$\left(=\frac{1}{2}\text{通法}\right)$。

象积：480分$\left(=\frac{3}{19}\times\text{通法}\right)$[2]。一刻所含刻分。

辰刻：8刻160分$\left(\text{一辰}=100/12;\text{刻}=8\frac{160}{480}\text{刻}\right)$。

昏明刻：2刻240分$\left(\text{日没后二刻半为昏，日出前二刻半为明，二刻半即}2\frac{240}{480}\text{刻}\right)$。

步晷漏术主要包括了与太阳位置变化相关的四项内容，即阳城日晷、漏刻、黄道去极度和距中星度。大衍历首先按定气日列出了这些项目的数值，见表8－6。

表8－6中的后四项分别是阳城地区每一定气气初的中晷长度、$\frac{1}{2}$夜漏刻、黄道去极度(太阳去极度)和距中星度(昏明时刻太阳至子午线的赤经差)。消息衰是一与上述项目当日变化量相关的值，下文将表明，此值可以通过不同的比例关系与表中各项目相联系。陟降率是该节气各日消息衰的一次差。任一日的消息衰又称消息定衰，它是以下各项计算的基础，其求法为：

某节气第n日消息定衰

＝该节气初日消息衰$\pm(n-1)\times$陟降率/100[3]

(陟减，降加)(8－49)

这是一个等差级数，如求前n日消息定衰之和，可用等差级数的求和公式。

---

① 见本章第三节算例(2)。

② 见王应伟：《中国古历通解》。

③ 雨水、清明、处暑、寒露消息定衰求法见本书第一章第五节。

表 8—6 晷漏中星表[1]

定气	朓降率	消息衰	阳城日晷(尺)	漏刻	黄道去极度	距中星度
冬至	降 78	息 0.64	12.7150	27 刻 230 分	115.20	82.26
小寒	降 72	息 11.91	12.2277	27 刻 145 分	114.35	82.91
大寒	降 53	息 22.42	11.2182	26 刻 380 分	111.90	84.77
立春	降 34	息 30.25	9.7351	25 刻 475 分	108.05	87.70
雨水	降初限 78	息 35.78	8.2106	24 刻 470 分	103.20	91.39
惊蛰	降 1	息 39.50	6.7384	23 刻 360 分	97.30	95.88
春分	朓 5	息 39.65	5.4319	22 刻 240 分	91.30	100.445
清明	朓初限 1	息 38.89	4.3211	21 刻 120 分	85.30	105.01
谷雨	朓 32	息 33.56	3.3047	20 刻 10 分	79.40	109.50
立夏	朓 52	息 28.38	2.5331	19 刻 5 分	74.55	113.19
小满	朓 63	息 22.12	1.9576	18 刻 100 分	70.70	116.12
芒种	朓 64	息 10.12	1.6003	17 刻 335 分	68.25	117.98
夏至	降 64	消 0.52	1.4779	17 刻 250 分	67.40	118.63
小暑	降 63	消 10.76	1.6003	17 刻 335 分	68.25	117.98
大暑	降 52	消 20.75	1.9576	18 刻 100 分	70.70	116.12
立秋	降 32	消 28.90	2.5331	19 刻 5 分	74.55	113.19
处暑	降初限 99	消 34.55	3.3047	20 刻 10 分	79.30	109.50
白露	降 5	消 38.90	4.3211	21 刻 120 分	85.30	105.01
秋分	朓 1	消 39.66	5.4319	22 刻 240 分	91.30	100.445
寒露	朓初限 1	消 39.50	6.7384	23 刻 360 分	97.30	95.88
霜降	朓 34	消 34.98	8.2106	24 刻 470 分	103.20	91.39
立冬	朓 53	消 29.72	9.7351	25 刻 475 分	108.05	87.70
小雪	朓 72	消 21.70	11.2182	26 刻 380	111.90	84.77
大雪	朓 78	消 11.13	12.2277	27 刻 145 分	114.35	82.91

① 《新唐书·历志四上》。此表据《历代天文律历等志汇编·七》(中华书局 1976 年版)和陈美东《古历新探》第 191～192 页校正。



一、求阳城地区八尺表每日午中晷长

(一)求太阳天顶距与晷长对应表[①]

八尺表午中晷长与太阳天顶距有固定的关系。大衍历首次给出了据观测定出的太阳天顶距从0度到80度所对应的晷影长表格，称为“戴日之北每度晷数”(见本书第一章表1－30)，其中戴日之北度即指太阳天顶距。[②]

(二)求每日晷差

每日晷差即每日晷长变化量，先求得：

各节气气初戴日之北度数

＝该气气初黄道去极度－极去戴日下度　　(8－50)

式中极去戴日下度为阳城一地北天极的天顶距，等于56.825度。

其后求每日晷差，大衍历此处只有一句术文：“各以其消息定衰戴日北所直度分之晷差，满百为分，分满十为寸，各为每日晷差。”[③]按算理，此方法应为，已知节气气初戴日北度数及第一日戴日北度的变化量(第一日消息衰/100)，从太阳天顶距与晷长对应表中查得相应晷差，为第一日晷差。同理可依次求出第二日、第三日……晷差。如欲直接求第n日到气初的晷差，则可以气初到第n日戴日北度之变化量($\sum_{i=1}^{n}$第i日消息定衰/100)代替上述一日戴日北度的变化量，查表得出结果(见本节算例①)。

(三)求某气第n日中晷常数

第n日中晷常数

＝该节气气初晷长$\pm\sum_{i=1}^{n}$第i日晷差

(息减，消加)(8－51)

中晷常数的日数是相对定气起点的，不是正午时刻，正午时晷长称为中晷定数。

---

① 见刘金沂，赵澄秋：《唐代一行编成世界上最早的正切函数表》，《自然科学史研究》1986，5(4)。

② 大衍历在相关术文中有：“南方戴日之下，正中无晷”之句，指的是北回归线处夏至午正太阳在天顶，此时晷影为0。从北回归线每向北一度(戴日之北)，太阳就偏南一度，所以此处戴日之北度即等同于太阳天顶距。

③ 《旧唐书·历志三》。

(四)求第 n 日中晷定数

第 n 日中晷定数

$$=\text{中晷常数}\pm\frac{\text{当日晷差}\times\text{中前(后)分}}{\text{通法}} \qquad (8-52)$$

式中

中后分＝其日所在气定小余－交统　　　　（定小余＞交统）

中前分＝交统－其日所在气定小余　　　　（定小余＜交统）

对于式中加减号，大衍历规定："冬至后，中前以差减，中后以差加，夏至后，中前以差加，中后以差减。冬至一日有减无加，夏至一日有加无减。"[1]

二、求每日漏刻

某气第 n 日夜半漏刻

$$=\text{该气初日夜半漏}\pm\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{第 }i\text{ 日消息定衰}}{480}$$

（息减，消加）(8－53)

第 n 日夜刻＝第 n 日夜半漏×2

第 n 日昼刻＝100 刻－第 n 日夜刻

根据日出前二刻半为昼始，日没后二刻半为夜始，还可以做日出入辰刻等项计算。

三、求每日黄道去极定数

某气第 n 日黄道去极定数

$$=\text{该气气初黄道去极度}\pm\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{第 }i\text{ 日消息定衰}}{100}$$

（息减，消加）(8－54)

四、求每日距中度定数

某气第 n 日距中度定数

$$=\text{该气气初距中度}\pm\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{第 }i\text{ 日消息定衰}\times 12386^{②}}{100\times 16277}$$

（息加，消减）(8－55)

---

① 《旧唐书·历志三》。

② 由上述各公式可知，1 单位消息衰＝$\frac{1}{480}$刻＝$\frac{1}{100}$太阳赤纬度＝$\frac{12386}{100\times 16277}$太阳赤经度。



将太阳该日宿度与距中度定数相加，可得昏中星宿度，同理可得晓中星宿度。

五、求九服所在每气气初中晷常数[1]

这是利用太阳天顶距和晷长关系表、阳城各节气气初黄道去极度及任一纬度地区所测冬至或夏至日中影长，求该地区每气气初中晷常数的方法。现设所测为夏至影长，则算法步骤为：

(1)以夏至影长在太阳天顶距和晷长关系表中查出相应戴日北度数，即为该地夏至太阳天顶距。

(2)将夏至、小暑、大暑……诸气阳城黄道去极度依次两两相减，得每相邻两气太阳去极度差，称为每气消息定数，这些值在任一纬度地区都是相同的。

(3)将(1)中求出的夏至太阳天顶距逐次加上(2)中求出的太阳去极度差(每气消息定数)，得每气太阳天顶距，也即戴日北度。查表可得该纬度地各气气初中晷常数。

大衍历在这里还首次提到了戴日南，即北回归线以南晷影的求算方法。

六、九服所在昼夜漏刻

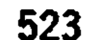
(1)用漏刻测出任一纬度地区冬至、夏至夜刻，二者相减，为冬至、夏至差刻。

$$\text{春分、秋分初日夜刻}=\text{冬至夜刻}-\frac{\text{冬至、夏至差刻}}{2}$$

$$=\text{夏至夜刻}+\frac{\text{冬至、夏至差刻}}{2}$$

(8－56)

(2)设所求节气距春分、秋分节气数为 m，则：



所求节气初日夜刻数

$$=\text{春分、秋分初日夜刻数}\pm\frac{\text{所求节气到二分太阳去极度差}\times\text{冬至、夏至差刻}}{\text{冬至、夏至太阳去极度差}}$$

$$=\text{春分、秋分初日夜刻数}\pm\frac{\sum_{i=1}^{m}\text{第}\,i\,\text{气消息定数}\times\text{冬至、夏至差刻}}{47.80}$$

(春分前秋分后加，春分后秋分前减)(8－57)

次日夜刻数＝初日夜刻数

$$\pm\frac{\text{当日消息定衰}^{②}\times\text{冬至、夏至差刻}}{47.80}$$

---

① 参见刘金沂，赵澄秋：《唐代一行编成世界上最早的正切函数表》。

② 此处应为消息定衰/480，大衍历术文疑有脱误。

(息减，消加)(8－58)

余类推。

本节算例：

求阳城冬至后 $t=173.3/12=14.4417$ 日的中晷常数、$\frac{1}{2}$夜半漏、黄道去极度和距中星度。

先求得：

$$\sum_{i=1}^{m}\text{第}\ i\ \text{日消息定衰(息)}$$

$$=t\times\text{冬至初日消息衰}+\frac{t(t-1)}{2}\times\frac{\text{陟降率}}{100}$$

$$=14.4417\times0.64+\frac{14.4417\times13.4417}{2}\times\frac{78}{100}$$

$$\approx85$$

①求中晷常数。

按式(8－50)：

冬至初戴日北度

＝冬至初黄道去极度－极去戴日下度

＝115.20－56.825＝58.375(度)

冬至初到 t 日戴日北度的变化量为 85/100＝0.85 度，从太阳天顶距和晷长关系表中可以查出 58.375－0.85＝57.525 度到 58.375 度相应的晷差为：

$$0.3874\times0.475+0.4045\times0.375=0.3357(\text{尺})$$

按式(8－51)：

t 日中晷常数＝12.7150－0.3357＝12.3775(尺)

②求 t 日夜半漏。

按式(8－53)：

$$t\ \text{日夜半漏}=\text{冬至初日夜半漏}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{第}\ i\ \text{日消息定衰}}{480}$$

$$=27\frac{230}{480}-\frac{85}{480}=27\frac{145}{480}(\text{刻})$$

③求 t 日黄道去极度。

按式(8－54)：

t 日黄道去极定数

$$=\text{冬至初黄道去极度}-\sum_{i=1}^{n}\text{第}\ i\ \text{日消息定衰}/100$$

＝115.2－85/100＝114.35(度)



④求 t 日距中星度。

按式(8—55)：

$$t\text{日距中度}=\text{冬至初距中度}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\text{第}i\text{日消息定衰}\times 12386}{100\times 16277}$$

$$=82.27+\frac{85\times 12386}{100\times 16277}=82.91(\text{度})$$

距冬至14.4417日是小寒时刻。本算例求出的夜半漏、黄道去极度和距中星度均与表8—6所列小寒相应值一致，但中晷常数值与表中值不符，其差距主要应由太阳天顶距与晷长关系表的误差造成。据刘金沂等"唐代一行编成世界上最早的正切函数"一文的分析，该表系据若干点的观测编排而成，其误差随戴日北度的增大而增大。实际上，用晷漏中星表中各节气初黄道去极度求得其戴日北度，再以太阳天顶距与晷长关系表求出的中晷常数大多与表列值不符，越近冬至误差越大，这反映了大衍历上述两表的矛盾之处。

第六节 步交会术

本节数据有：

终数：827251322秒，一交点月秒数。

交终日：$27\dfrac{645\frac{1322}{10000}}{3040}$日，一交点月日数。

中日：$13\dfrac{1842\frac{5661}{10000}}{3040}$日，$\frac{1}{2}$交点月日数。

朔差日：$2\dfrac{967\frac{8678}{10000}}{3040}$日，为朔望月日数与交点月日数之差。

望差日：$1\dfrac{483\frac{9339}{10000}}{3040}$日，$\frac{1}{2}$朔差日。

望数日：$14\dfrac{2326\frac{5000}{10000}}{3040}$日，$\frac{1}{2}$朔望月。

交限日：$12\dfrac{1358\frac{6322}{10000}}{3040}$日，中日与望差日之差。

交率：343，见下。

交数：4369，交率/交数＝交点月日数/交点年日数。

交秒法：10000。

日食和月食是朔与望发生在交点附近时产生的。所以朔、望时月亮至交点的时距（入交定日）是交食计算的基本量。同入交定日一样，月亮黄纬曾被当作判断交食发生的参照量之一，因此也被列入步交食一节。这两项内容之后，即为日食、月食的推算。

一、求入交定日

大衍历的入交定日术出自皇极历，其公式为：

$$\text{入交定日}=\text{入交泛日}\pm\text{太阳改正}\pm\frac{\text{交率}}{\text{交数}}\times\text{月亮改正}$$

（朓减，朒加）（8－59）

式中太阳改正和月亮改正分别见于本章第三节小节一和第四节小节一。入交泛日是平朔、望时月亮到交点的时距，也即平朔、望到月过交点的时间。其求法见图8－8。

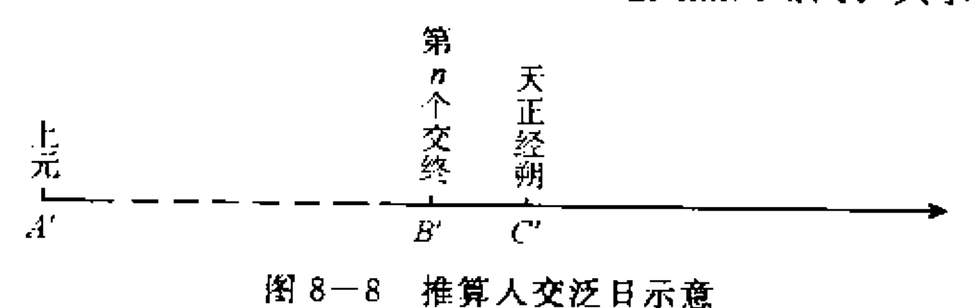


图8－8　推算入交泛日示意

$$\begin{aligned}&\text{天正经朔入交泛日}(B'C')\\&=\frac{(\text{朔积分}-m\times\text{终数})\times\text{交秒法}-m'\times\text{终数}^{①}}{3040\times\text{交秒法}}\\&=\frac{\text{朔积分}\times\text{交秒法}-n\times\text{终数}^{②}}{3040\times\text{交秒法}}\\&=\frac{\text{朔积分}-n\times\text{交终分}}{3040}\end{aligned}\qquad(8-60)$$

式中，

$$\text{朔积分}-n\times\text{交终分}<\text{交终分}$$

$$\text{次朔入交泛日}=\text{天正经朔入交泛日}+\text{朔差日}\qquad(8-61)$$

$$\text{望入交泛日}=\text{朔入交泛日}+\text{望差日}\qquad(8-62)$$

上两式满交终日时，均需减去交终日，其余朔、望入交泛日依此类推。

---

① 这是《旧唐书》所用公式，m为正整数，括号内容表示满10000倍的交终分去之，m'及下文的n也为正整数，乘以终数，意为满终数去之。

② 这是《新唐书》所用公式。



入交定日公式的几何解释见图 8－9。[1]

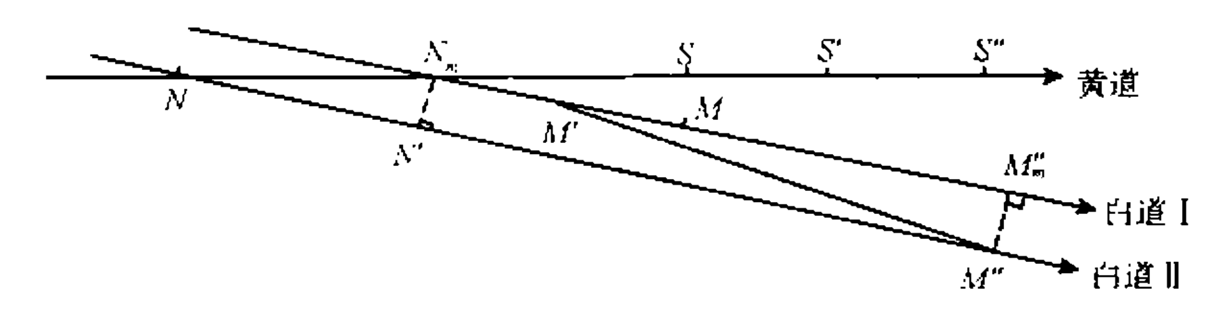


图 8－9 求入交定日示意图

图 8－9 中，白道 Ⅰ、Ⅱ 分别是平朔、定朔时的白道，它们之间的变化是黄白交点退行的反映；S、M 为平朔时日、月平位置；S'、M' 为此时日、月真位置；S''、M'' 为定朔时日、月真位置。现设 n 为交点退行速度，m 为月亮运行速度，S 为太阳运行速度，则：

$$NM''=NN'+N_mM'+M'M_m$$

其中

$$NN'\approx NN_m=-n\times\frac{M'M''}{m}$$

$$N_mM'=N_mM-M'M$$

$$M'M_m\approx M'M''$$

将上面第二、三、四式和 $M'M''=(M'M+SS')\times\frac{m}{m-s}$[2]代入第一式，得：

$$NM''=N_mM+\frac{m-n}{m-s}\times SS'+\frac{s-n}{m-s}\times M'M$$

两边同除月亮相对交点速度$(m-n)$，得：

$$\frac{NM''}{m-n}=\frac{N_mM}{m-n}+\frac{SS'}{m-s}+\frac{s-n}{m-n}\times\frac{M'M}{m-s}$$

即

$$\text{入交定日}=\text{入交泛日}+\text{太阳改正}+\frac{\text{交率}}{\text{交数}}\times\text{月亮改正}\qquad(8-63)$$

其中$(s-n)/(m-n)=\dfrac{\text{周天度}/(m-n)}{\text{周天度}/(s-n)}=$交率/交数。

式(8－63)太阳改正和月亮改正取正号，表明它们符号的取法与定朔时相同，为朓减朒加。

由于平朔和定朔时间差不大，其间交点退行值很小，可以忽略不计，因此图

① 有关研究参见刘金沂："隋唐历法中入交定日术的几何解释"。

② 见本章第四节小节一，式(8－29)。

8－9中的白道可被归并为一条，经过近似处理后，所得公式与(8－63)一致。

二、求月亮黄道纬度

表8－7是大衍历为求月亮黄道纬度给出的阴阳历表。该表将黄道从黄白降交点起平分为少阳、老阳、少阴、老阴四象，每象又平分为六爻，每爻15度。分别称为少阳初、少阳二……其后依爻列出了每爻爻初月亮黄纬分值(阴阳积)，此值除以120为每爻爻初月亮黄纬度值(月去黄道度)，及相邻两爻月亮黄纬分值的一次差(加减率)。

表8－7　阴阳历表①

老老阴阳上	老老阴阳五	老老阴阳四	老老阴阳三	老老阴阳二	老老阴阳初	少少阴阳上	少少阴阳五	少少阴阳四	少少阴阳三	少少阴阳二	少少阴阳初	爻目
减百八十七	减百七十一	减百四十七	减百一十五	减七十五	减二十七	加二十七	加七十五	加百一十五	加百四十七	加百七十一	加百八十七	加减率
阴阳百八十七	阴阳三百五十八	阴阳五百五	阴阳六百二十	阴阳六百九十五	阴阳七百二十二	阴阳六百九十五	阴阳六百二十	阴阳五百五	阴阳三百五十八	阴阳百八十七	阴阳初	阴阳积
一度六十七分	二度百一十八分	四度二十五分	五度二十分	五度九十五分	六度二分	五度九十五分	五度二十分	四度二十五分	二度百一十八分	一度六十七分	空	月去黄道度

以表8－7求每度月亮黄纬的术文为：

以其爻加减率与后爻加减率相减，为前差。又以后爻率与次后爻率相减为后差，二差相减，为中差。置所在爻并后爻加减率，半中差以加而半之，十五而一，为爻末率，因为后爻初率。每以本爻初、末率相减，为爻差，十五而一，为度差。半之，以加减初率(少象减之，老象加之)为定初率。每以度差累加减之(少象以差减，老象以差加)，各得每度加减定分。

① 《新唐书·历志四下》。



乃循积其分，满百二十为度，各为月去黄道度数及分。（其四象初爻无初率，上爻无末率，皆倍本爻加减率，十五而一，所得，各以初、末率减之，皆互得其率）[①]

设文中阴阳积为 f，加减率的绝对值为 Δf，则：

$$前差=|\Delta f_1-\Delta f_2|=\Delta^2 f_1$$

$$后差=|\Delta f_2-\Delta f_3|=\Delta^2 f_2$$

$$中差=|\Delta^2 f_1-\Delta^2 f_2|=\Delta^3 f$$

$$所在爻爻末率=后爻初率=\frac{1}{15\times 2}\left(\Delta f_1+\Delta f_2+\frac{\Delta^3 f}{2}\right)$$

$$所在爻爻初率=前爻末率=\frac{1}{15\times 2}\left(\Delta f_0+\Delta f_1+\frac{\Delta^3 f}{2}\right)$$

$$度差=\frac{爻差}{15}=\frac{|所在爻爻初率-所在爻爻末率|}{15}=\frac{|\Delta f_0-\Delta f_2|}{15^2\times 2} \tag{8-64}$$

$$定初率=所在爻爻初率\pm\frac{1}{2}度差$$

（少象减，老象加）(8－65)

上述推导定初率的思路与刘焯皇极历求每日迟速数术一致，所不同的是爻末率和爻初率的求法。产生这一不同的原因在于皇极历日躔表是二次差相等，三次差为0。而大衍历月亮纬度表是三次差相等，四次差为0。后者完全按皇极历的方法计算不能使前爻末率等于后爻初率，调整之后，加减率的连续性才能得到保证。[②]

定初率是每爻第一度的加减定分，其后有：

每爻第 n 度的加减定分(C_n)

$$=定初率\pm(n-1)度差$$

（少象减，老象加）(8－66)

每爻第 n 度的月亮纬度

$$=(所在爻爻初阴阳积\pm\sum_{i=1}^{n}C_i)/120 \tag{8-67}$$

① 《新唐书·历志四下》。

② 参见王荣彬：《中国古代历法中的插值法构建原理》，《中国古代数理天文学探析》，第284页。

以上法求月亮黄纬首先需知所给时刻月亮人交度数，大衍历因此列出了计算朔望夜半月亮人交度的公式，其式为：

$$\begin{aligned}&\text{定交初日夜半入转日及余}\\&=\text{朔望夜半入转日及余}-\text{朔望夜半入交定日及余}\end{aligned} \quad (8-68)$$

$$\begin{aligned}&\text{朔望夜半入阴阳历度数}\\&=\left(\frac{\text{朔望夜半入转余}\times\text{其日转定分}}{\text{通法}\times\text{转法}}\right.\\&\quad\left.+\text{朔望夜半入转日之转积度}\right)\\&\quad-\left(\frac{\text{定交初日夜半入转余}\times\text{其日转定分}}{\text{通法}\times\text{转法}}\right.\\&\quad\left.+\text{定交初日夜半入转日之转积度}\right)\end{aligned} \quad (8-69)$$

这一方法比较繁琐，方法本身也存在问题。[①] 所以后世历法多将朔望入交定日乘月平均速度，直接得出定朔望时刻月亮人交度数。

三、日食预报

隋代前后，中国历法在推算日食时开始考虑视差的影响。视差是从两个地点观测同一天体时出现的角度差。前述日、月运动计算依据的基本量都是地面长期观测的统计平均值，等于消除了各向误差之后，日、月相对地心的位置。而交食观测只能在地面进行，因此视位置与计算位置之间存在的视差将会影响其结果。太阳视差值很小，影响日食的主要是月亮视差。根据现代分析[②]，当设月亮天顶距为 z，视差为 H，月球地平视差为 H_0 时，有：

$$H=H_0\sin z \quad (8-70)$$

再设观测地纬度为 φ，月球赤纬及时角分别为 δ 和 h，又有：

$$\cos z=\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\cos h \quad (8-71)$$

日食时，日、月位置可近似视为相等。所以 φ 值确定后，月亮视差应是太阳时角和赤纬（节气）的函数，它会改变月亮到交点距离，进而影响食限、食甚时刻及食分等的设置和求算。对于上述影响，皇极、麟德等历均有初步的经验性改正，大衍历则极大地完善了这些改正。

---

① 例如，按其算理，两式中"定交初日夜半入转"之"初日夜半"当为多余的文字。第二式中"转定分"当为"转分"。

② 薮内清：《隋唐历法史之研究》，第 107 页；陈遵妫：《中国天文学史》第三册，第 769 页。



(一)判断合朔时月亮是否入食限

1. 食限变动的原理

食限是朔、望时是否发生交食的判据，通常以朔、望时月距交点度数或月亮走到交点所需日分来表示。早期中国历法的日食食限约在15度左右。合朔发生在此度数内即有日食。6世纪，张子信觉察到月在黄道南北对日食会产生影响。皇极、麟德等历将这一发现引入历法后，用文字叙述的形式依节气和时角对月在黄道南北的食限进行了经验性调整，所得黄道南食限小于黄道北食限[①]。其中原理，可以用下面三图作出解释。

图8—10中，从地心看到的是月亮的计算位置，从地面看到的是视位置，计算位置与视位置之差 Δz 为视差，此图显示出视差总是使月亮位置沿地平经圈降低，据此我们可以画出月在黄道南北时视差影响其去交距离的示意图。

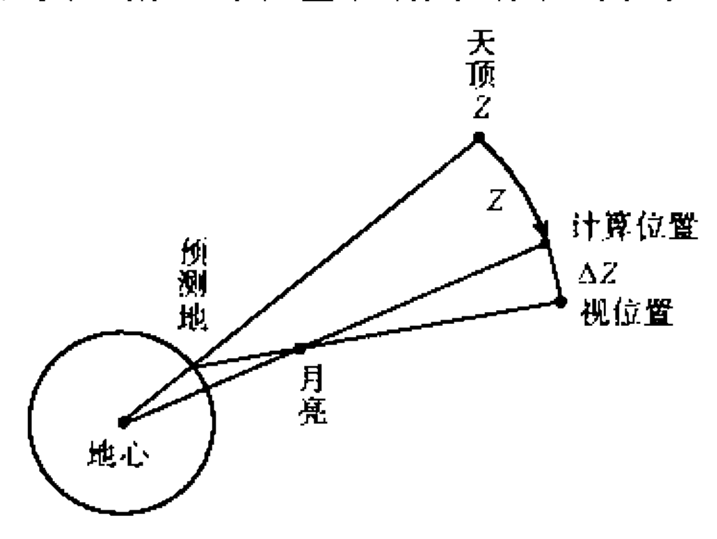


图8—10 月亮视差示意图



图8—11中，M、M'分别代表月亮的计算位置和视位置；N、N'代表白道及视白道与黄道的交点。当月在黄道北时，视去交 $M'N'$ 小于计算去交 MN，且有 $M'N'=MN-ML$，月在黄道南时，$M'N'>MN$，且 $M'N'=MN+M'L'$，两式中 ML 和 $M'L'$ 是月亮视差在白道方向的投影，下面简称视差投影。

虽然去交距离有计算去交和视去交之分，但无论对地心还是地面，食限都应是同一个值，如设此值为 A，那么对于地面观测者而言，日食发生的条件应为：

视去交 $<A$

计算去交 $\pm$ 视差投影 $<A$ （黄道北减，黄道南加）

计算去交 $<A\pm$ 视差投影

（黄道北加，黄道南减）(8—72)

① 参见本书第一章第十节。

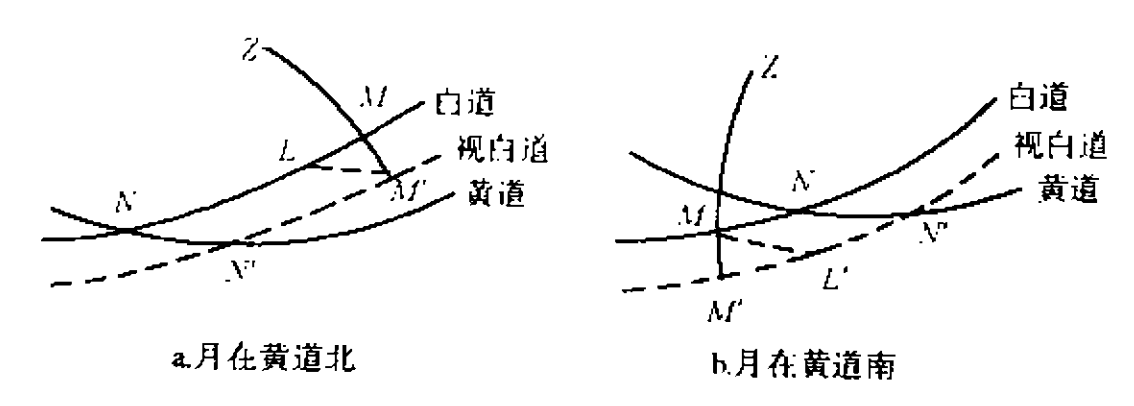


图 8－11　月在黄道南北视差影响去交距离示意图

上式的意义在于，如果地面上的观测者像皇极历、麟德历及大衍历一样，以计算去交判断交食是否发生，其所用食限就应是一随节气和太阳时角变化的量，这个量在黄道北大，在黄道南小。

2. 大衍历合朔时月入食限判断法

在大衍历中，一行首次明确提出了阴历食限和阳历食限的概念。他将冬至时黄道以北的食限定义为阴历食限，冬至时黄道以南的食限定义为阳历食限，这些食限以月亮从一特定距离走到交点所需日分表示。其中，

阴历：食限＝3524 日分(14.67 度)

　　　或限＝3659 日分(15.23 度)

阳历：食限＝136 日分(0.57 度)

　　　或限＝974 日分(4.05 度)

上文中或限是可食可不食之限，所给日分乘以 11/2643 为度[①]。

为了求得不同节气的食限，大衍历列出了冬至食限与其他节气食限之差(也是冬至食差与其他节气食差之差，见下)的表格。称为差积表(见本书第一章第十节表 1－27)。利用差积表，以与步日躔术类同的不等间距二次差内插法[见式(8－12)，不过在涉及符号时改为冬至后加，夏至后减]求出二十四气中任一日的差积定数，则：

该日日食定限＝阴(阳)历食限±当日差积定数

(阴历减，阳历加)(8－73)

对任一定朔日，只要知其在哪一节气的第几日，即可以上法得出该朔日的日食定限。

在给出冬至食限的同时，大衍历还给出了冬至食差，其值为 1275 日分(5.31 度)，并有：

任一日食定差＝冬至食差±当日差积定数

(阴历减，阳历加)(8－74)

① 11/2643 为月平均速度，单位为度/日分。$\frac{11}{2643}\times 3040=12.6523$(度/日)，应是一近似值。



由于存在阴历、阳历两种食定限，所以大衍历认为在判断合朔月亮是否入食限前，需先判定选用哪一种食限。判断的方法是，当以入交定日（计算去交）和上元时月过降交点得出月在黄道北，而且去交定分（入交定日化为距最近交点之日分值）＞食定差时，为阴历食；月在黄道北，去交定分＜食定差时，类同阳历食；月在黄道南，为阳历食。阴历食用阴历食定限，阳历食及类同阳历食用阳历食定限，此时只要

去交定分＜食定限 （8－75）

即有日食发生。上式与式（8－72）的分析结果是一致的，缺陷是食定限没有计入太阳时角的影响。[1]

从以上选择食限的过程可以推知，食定差是计算去交的改变值，它们应相当于月亮视差在白道上的投影，即

去交定分±食定差＝视去交

（黄道北减，黄道南加）（8－76）

而大衍历实际是以月亮视位置为判断标准，月亮视位置在黄道北，为阴历食；视位置在黄道南，为阳历食。式（8－76）在后面的食分计算中还要用到。

如果将式（8－75）两边加减食定差，并设视食限为常数，则可得：

视去交＜食定限±食定差 （阴历减，阳历加）

不等式右侧之常数可以利用冬至差积为零求出，这样上式变为：

视去交＜阴（阳）历食限±冬至食差

（阴历减，阳历加）（8－77）

所得阴历视白道上的固定食限为 2249 日分（9.36 度），阳历视食限为 1411 日分（5.87 度）。这可能就是宣明历改进日食判断的思路。从宣明历以后，中国历法即直接采用视去交和视食限，舍弃了大衍历所用的变动的食限。不过其阴历、阳历有两个不同的食限，这一点是不正确的。[2]

（二）求日食食分

$$\text{阴历食分}=15-\frac{(\text{去交定分}-\text{食定差})-104}{143}=15-\frac{\text{视去交}-104}{143} \quad (8-78)$$

式中 104 称为即限，当视去交≤104 时，为日全食。其

$$\text{分母 }143=\frac{\text{阴历食限}-\text{冬至食差}-104}{15}$$

① 大衍历可能只考虑了正午时的情形。参见薮内清：《隋唐历法史之研究》，第 110～111 页；陈遵妫：《中国天文学史》第三册，第 771 页。

② 参见薮内清：《隋唐历法史之研究》，第 111 页；陈遵妫：《中国天文学史》第三册，第 771 页。

$$类同阳历食食分=\frac{阳历食定限+去交定分}{90} \quad (8-79)$$

当阴历食定差－去交定分≤60 时，为全食。

$$阳历食分=\frac{去交定分}{90}\text{[1]} \quad (8-79')$$

$$分母\ 90=\frac{阳历食限+冬至食差}{15}-\frac{60}{15}$$

（三）日食方位

其术文曰：

月在阴历，初起西北，甚于正北，复于东北。月在阳历，初起西南，甚于正南，复于东南。其食十二分以上，皆起正西，复于正东（此亦据南方正午而论之）[2]。

这是定性描述。

（四）食甚时刻

$$食甚时刻=定朔小余\pm\frac{去交定分\times交率}{20\times交数}$$

（月道与黄道同名加，异名减）[3]（8－80）

上式中第二项为时差经验改正，其值与视差无关，显然有些问题。

（五）日食持续时间（定用刻数）

$$定用刻数=泛用刻率\left(1\pm\frac{其日入转损益率}{通法}\right)$$

（朓：损加益减；朒：损减益加）（8－81）



泛用刻率见表 8－8。

表 8－8　泛用刻率表

食分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	阴历食：去交定分—食定差>70	阴历食：去交定分—食定差<15	同阳历食：食定差—去交定分<20	同阳历食：食定差—去交定分<4
泛用刻率	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	20	20.5	21	$21\frac{1}{4}$

① 原文疑有脱误，公式应为：$阳历食分=\frac{阳历食定限-去交定分}{90}$

② 《旧唐书·历志三》。

③ 同名指月在黄道北（南）时，日在赤道北（南）。异名类推。



(六)计算不同纬度地区的日食(九服所在日食)

前述计算均以阳城为准。由于月亮视差随地理纬度而变,所以计算不同纬度地区的日食需重新求其视差量,这包括了两个步骤:求所在地冬至、夏至及春分、秋分食差;求所在地每日食定差。

1. 求所在地冬至、夏至和春分、秋分食差

先测所在地冬至、夏至及春分、秋分定日午正八尺表影长,与步晷漏术中阳城每日中晷常数比较,取相同者,则阳城当日食差即为所在地冬至、夏至或春分、秋分食差。

由于中晷长短相同太阳天顶距就相同,这一方法是符合视差原理的。

2. 求所在地每日食定差

该段术文为:

以夏至差减春分差,以春分差减冬至[差],各为率。并二率,半之,六而一,为夏率。二率相减,六而一,为总差。置总差,六而一,为气差。半气差,以加夏率,又以总差减之,为冬率(冬率即冬至率)。每以气差加之,各为每气定率。乃循积其率,以减冬至蚀差,各得每气初日蚀差(求每日,如阳城法求之,若戴日之南,当计所在地,皆反用之。)[1]

设,冬至食差－春分食差$=\Delta f_1>0$;春分食差－夏至食差$=\Delta f_2>0$;且有,$\Delta f_2>\Delta f_1$[2],则:

$$夏率=\frac{1}{6}\times\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}$$

$$总差=\frac{\Delta f_2-\Delta f_1}{6}$$

$$气差=\frac{\Delta f_2-\Delta f_1}{6^2}$$

$$\begin{aligned}冬率&=夏率-总差+\frac{气差}{2}\\&=\frac{1}{6}\times\frac{\Delta f_1+\Delta f_2}{2}+\frac{1}{6}\times(\Delta f_1-\Delta f_2)\\&\quad-\frac{1}{6^2}\times\frac{\Delta f_1-\Delta f_2}{2}\text{[3]}\end{aligned}\tag{8-82}$$

---

① 《新唐书·历志四下》,方括号内为脱文。

② 这些假设适用于月在黄道北。

③ 参见王应伟:《中国古历通解》。

这是一个等间距二次差内插式，所得冬率相当于冬至的增损差（见本书第一章表1－27），其后有：

$$第\ n\ 气定率(增损差)=冬率+(n-1)气差 \qquad (n=1,2,\cdots,12)^{①} \quad (8-83)$$

$$每气初日蚀差=冬至蚀差-\sum_{i=1}^{n}第\ i\ 气定率 \qquad (n=1,2,\cdots,12) \quad (8-84)$$

式(8－84)中的第二项相当于各气的差积，此式已直接求出每气气初的食定差，每日食定差则可以不等间距二次差内插法求得[②]。这样，在阳城判断将有日食发生后，可以用九服食差算出各地不同的食分。

大衍历在这一节还首次提到了戴日之南（北回归线之南）日食的求算。

四、月食预报

月食是由于月亮进入地影而产生，这一现象从地球上任一点观测都是相同的，所以月食与月亮视差无关，其计算也相对简单得多。

（一）判断是否入食限

大衍历给出的月食发生的判定条件是：

$$望时月在交后：入交定日<望差 \qquad (8-85)$$

$$望时月在交前：入交定日>交限 \qquad (8-86)$$

从望差 $\times 3040\times\frac{11}{2643}$ 可算得月食食限＝14.67度。上两式适用于月在黄道南。月在黄道北时，式中入交定日应换为入交定日－中日。

（二）月食食分

去交定分≤779

$$月食食分=15$$

去交定分＞779

$$食分=\frac{望差(分)-去交定分}{183}=\frac{3523.9339-去交定分}{183} \qquad (8-87)$$

---

① 此式可用于求前12节气的增损差，后12节气增损差应与前12节气数值对称，符号相反。下一式之蚀差，则为数值对称，符号相同。

② 上述算法仅适用于月在黄道北。月在黄道南可依此类推。



(三)月食方位

与日食相同,这一项内容也是定性描述:

月在阴历,初起东南,甚于正南,复于西南。月在阳历,初起东北,甚于正北,复于西北。其蚀十二分以上者,起于正东,复于正西。(此皆据南方正午而论之,若蚀于余方者,各随方面所在,准此取正,而定其蚀起复也。)[①]

(四)食甚时刻

$$食甚时刻=定望小余\pm\frac{去交定分\times交率}{20\times交数}$$

(月道、黄道同名加,异名减)(8—88)

以第二节中之发敛加时术可求真辰刻。

(五)月食持续时间

月食求定用刻数公式与日食相同,其泛用刻率见表8—9。

表8—9 月食泛用刻率

食分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	去交定分<520	去交定分<260
泛用刻率	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20	20.5	21

本节算例:

1. 计算开元十二年七月朔日食

(1)求开元十二年天正经朔入交泛日($B'C'$)。

按本节式(8—60):

$$B'C'=\frac{朔积分-n\times交终分}{3040}$$

$$=\frac{1199255781\times89773^{②}-n\times82725.1322}{3040}$$

其中朔积分$-n\times$交终分$<$交终分,由此求得$n=1301427829$。

所以,

---

① 《旧唐书·历志三上》。

② 见本章第一节算例(2)。

$$B'C'=\frac{24929.0062}{3040}=8.200331(\text{日})$$

(2)求开元十二年七月平朔入交泛日。

七月平朔入交泛日＝天正经朔入交泛日＋8×朔差日

＝26.747352(日)

(3)求七月朔入交定日。

按本节式(8－59)：

$$\text{七月朔入交定日}=\text{入交泛日}-\text{太阳改正}^{①}-\frac{\text{交率}}{\text{交数}}\times\text{月亮改正}^{②}$$

$$=26.747352-0.116779-\frac{343}{4369}\times 0.397149$$

$$=26.599394(\text{日})$$

(4)判断是否入食限。

据上元从降交点起算及七月朔入交定日＝26.599394日可知月在黄道北。从第三节算例(1)和第四节算例(1)又知七月定朔在大暑后第六日，以差积表和式(8－12)[③]求出当日差积定数为303.405085，据式(8－74)：

七月朔食定差＝冬至食差－当日差积定数

＝1275－303.405085

＝971.594915

因为，

去交定分＝(交终日－入交定日)×3040

＝1862.97444＞食定差

所以，本例应用阴历食限。

按式(8－73)：

所求

食定限＝阴历食限－当日差积定数

＝3524－303.405085

＝3220.594915(日分)

因为，去交定分＜食定限，所以，当有日食发生。

(5)求日食食分。

据式(8－78)：

---

① 见本章第三节算例(1)。

② 见本章第四节算例(1)。

③ 参见本节关于差积定数术法的说明。



$$日食食分=15-\frac{(去交定分-食定差)-104}{143}$$

$$=15-\frac{1862.97444-971.594915-104}{143}$$

$$=9.49385$$

对于此次日食,《大衍历议·日食议》中记道:"开元十二年七月戊午朔,于历当食半强,自交趾至于朔方,候之不蚀。"[①]其计算结果与本算例一致。据奥泊尔子《日月食典》,这一天确有日食发生,但食带从东半球高纬地区到西半球,没有经过中国[②]。

2. 求开元十二年七月望月食

(1)求开元十二年七月望入交泛日。

据式(8—62):

$$七月望入交泛日=七月朔入交泛日+望数日-交终日$$

$$=14.300434(日)$$

(2)求七月望入交定日。

据式(8—59):

$$入交定日=入交泛日-太阳改正^{③}+月亮改正\times\frac{交率^{④}}{交数}$$

$$=14.300434-0.145828+0.371762\times\frac{343}{4369}$$

$$=14.183792(日)$$

(3)判断是否入食限。

此例是月在黄道北,望时月在交后,月到交点日数=(入交定日-中日),小于望差,所以将有月食发生。

(4)求食分。

按式(8—87):

$$食分=\frac{望差(分)-去交定分}{183}$$

$$=\frac{3523.9339-(入交定日-\frac{1}{2}交终日)\times3040}{183}$$

① 《新唐书·历志三下》。

② Oppolzer(1841—1886):Canon of Eclipses, Dover Publications, Inc. p186。本次日食编号为4614,发生在724年7月25日0时8.9分(世界时),食带见该书书后所附Chart 93。

③ 见本章第三节算例(2)。

④ 见本章第四节算例(2)。

$$=\frac{3523.9339-1756.1624}{183}=9.66$$

(5)求食甚时刻。

据式(8－88)：

$$食甚时刻=定望小余^{①}-\frac{去交定分\times交率}{20\times交数}$$

$$=2510.33776-\frac{1756.1624\times343}{20\times4369}$$

$$=2503.444149(日分)$$

$$=0.823501(日)$$

这一时间约为阳城地方时晚 7 时 46 分。

(6)求月食持续时间。

据本节四泛用刻率表，食分为 9.66 时，泛用刻率为 13.66 刻，据式(8－81)：

$$定用刻数=泛用刻率(1-\frac{第9日^{②}入转损益率}{3040})$$

$$=13.66\left(\frac{1-106}{3040}\right)$$

$$=13.183697(刻)$$

这一时间相当于 3 小时 10 分。

在奥泊尔子的《日月食典》中，此次月食编号为 2989，发生时间为公元 724 年 8 月 9 日[③]世界时 12 时 28 分(约为阳城地方时晚 8 时)，为大食分偏食。交食持续时间 3 小时 2 分。

与本算例计算结果相同的是《唐会要》记开元十二年癸酉望发生月食。《旧唐书·玄宗本纪上》则记其发生于七月壬申，而且是月全食，同大衍历和《日月食典》出入很大。

3. 求开元十七年十月戊午朔日食

对此次日食，《旧唐书·玄宗本纪上》记曰："冬十月戊午朔日有食之，不尽如钩。"《新唐书·天文二》中有："十七年十月戊午朔，日有食之，不尽如钩，在氐九度。"而据《日月食典》(第 4626 号)，这是一次日全食，全食带经过中国北部和中部，发生时间在 729 年 10 月 27 日[④]世界时 1 时 12.9 分[⑤](约为阳城地方时 8 时 45

---

① 见本章第四节算例(2)。

② 七月朔入转日，见第四节算例(2)。

③ 癸酉日。

④ 戊午日。

⑤ 见 Oppolzer:《Canon of Eclipses》，第 186 页及书后第 93 章。



分)。下面是依大衍历方法所做的计算。

(1)求开元十七年天正冬至大、小余和天正经朔大、小余。

$$天正冬至大、小余=\frac{中积分}{3040}-n\times 60$$

$$=\frac{96961745\times 1110343}{3040}-n\times 60$$

$$=\frac{96961745\times 1110343}{3040}-590245585\times 60$$

$$=40.965461(日)$$

因为,

$$朔积分=中积分-归余之挂$$

$$=n\times 89773$$

$$=1199255843\times 89773$$

所以,

$$天正经朔大小余=\frac{朔积分}{3040}-n\times 60$$

$$=\frac{1199255843\times 89773}{3040}-590245585\times 60$$

$$=29.486513(日)$$

(2)求十月平朔大、小余和十月朔所在定气大、小余。

$$十月平朔大、小余=天正经朔大、小余+11\times 四象之策-n\times 60$$

$$=354.323026-5\times 60$$

$$=54.323026(日)$$

根据中气固定于特定月份的原则,十月朔所在气应为霜降或立冬,按上面三式的结果,可以判定开元十七年十月朔所在定气为霜降。

$$霜降平气大、小余=天正冬至大、小余+20\times 三元之策-n\times 60$$

$$=345.335801-5\times 60$$

$$=45.335801(日)$$

据式(8－13):

$$霜降定气大、小余=霜降平气大、小余+该气先后数$$

$$=45.335801+6564/3040$$

$$=47.495012(日)$$

(3)求十月朔太阳改正。

十月平朔入霜降日算及余＝54.323026－47.495012

＝6.828014（日）

对于霜降这一节气，$\Delta f_1=73$，$\Delta f_2=104$，$t_1=178.8/12=14.9$，$t_2=177.1/12=14.758333$，$n=6.828014$，朓朒积＝491（朓），将以上数值代入式（8－8）、式（8－9）和式（8－15），得：

日差＝0.144818

气初定率＝3.748022

太阳改正（朓）＝霜降朓朒积

$$-\left[n\times\text{气初定率}+\frac{n(n-1)}{2}\text{日差}\right]$$

＝462.527027（日分）

＝0.152147（日）

（4）求十月朔月亮改正。

据式（8－20）：

开元十七年天正经朔入转

$$=\frac{\text{朔积分}-n\times\text{转终(分)}}{3040}$$

$$=\frac{1199255843\times89773-1285256677\times83765.9875}{3040}$$

＝17.686007（日）

十月平朔入转

＝天正经朔入转＋11×转差日－转终日

＝11.867306（日）

即第12日，入转余/通法为0.867306，设入转余/通法＝t，由于第12日损益率为前少，所以有$\Delta f_1=229$，$\Delta f_2=189$，将以上三值代入式（8－24），得转率＝196.311348。

将t_0＝转率/3040＝0.064576和上述各量代入式（8－25），得$A'=15.820071$。

据式（8－26）：

转定率＝转率＋A'＝212.131419（日分）

据式（8－28）：

月亮改正（朒）＝第12日朓朒积－转定率

＝727－212.131419

＝514.868581（日分）

＝0.169365（日）



(5)求十月定朔大、小余。

按式(8－31)：

十月定朔大、小余

＝十月平朔大、小余－太阳改正＋月亮改正

＝54.323026－0.152147＋0.169365

＝54.340244(日)

即戊午日，小余＝0.340244×3040＝1034.34176(日分)。

(6)求十月朔入交定日。

按式(8－60)：

开元十七年天正经朔入交泛日

$$=\frac{\text{朔积分}-n\times\text{交终分}}{3040}$$

$$=\frac{1199255843\times89773-n\times82725.1322}{3040}$$

$$=\frac{1199255843\times89773-1301427896\times82725.1322}{3040}$$

＝15.878667(日)

十月朔入交泛日＝天正经朔入交泛日＋11×朔差日－交终日

＝14.168605(日)

据式(8－59)：

十月朔入交定日＝十月朔入交泛日－太阳改正

$$+\frac{\text{交率}}{\text{交数}}\times\text{月亮改正}$$

＝14.029754(日)

(7)判断是否入食限。

根据入交定日和上元时月过降交点可知此例为月在黄道北，据式(8－74)：

食定差＝冬至食差－霜降第7日差积定数

＝1275－57.653365

＝1217.346635(日分)

因为，

$$\text{去交定分}=(\text{入交定日}-\frac{1}{2}\text{交终日})\times3040$$

＝1287.88688＞食定差

所以，当用阴历食定限。

据式(8－73)：

所求食定限＝阴历食限－霜降第7日差积定数

＝3524－57.653365

＝3466.346635(日分)

由于去交定分<食定限，所以有日食发生。

(8)求食分。

据式(8－78)：

$$食分=15-\frac{(去交定分-食定差)-104}{143}$$

因为(去交定分－食定差)＝视去交<104，此次日食为全食。

(9)求食甚时刻。

据式(8－80)：

$$食甚时刻=定朔小余-\frac{去交定分\times交率}{20\times交数}$$

$$=1035.32976-\frac{1287.88688\times343}{20\times4369}$$

$$=1030.27431(日分)=0.338906(日)$$

此值相当于阳城地方时8时8分。

上述计算结果与《日月食典》和实测记录均很接近。

第七节　步五星术

本节数据：

终率：五星会合周期所含日分。

终日：一会合周期所含日数。

中合日：$\frac{1}{2}$终日，用于内行星，为晨合和夕合间隔的时间。

变差算：五星近日点相对冬至点的每年进动分值[1]。

象算：(策实＋变差算)/4。

爻算：象算/6。

辰法：760，本节各日余、度余之分母。

[1] 陈美东：《古历新探》，第412页。



秒法:100。

微分法:96。

五星的运动规律较日、月更为复杂。从近代天文学的角度看,如果设地球为参照系,那么行星的运行是太阳绕地球、行星又绕太阳两种运动的合成。此时呈现在地球观测者眼中的,是由合、顺行、留、退行,及对称的退行、留、顺行、合等动态组成的一系列循环往复的运动[①],这也是中国古代最早认识的五星周期运动,其平均观测值以五星动态表的形式表现在历法中。此外,由于行星绕日和太阳绕地均为椭圆而产生的两种中心差,在大衍历中分别以五星爻象历和文字叙述的形式出现。用两项中心差对五星动态表做出中心差的经验改正,可得出所求行星会合周期的真实动态表。以真实动态表为基础,即可进行行星位置等项计算。

一、五星动态表

以木星为例(见表 8—10)。

表 8—10 木星动态表[②]

变行月	合后伏	前顺	前留	前退	后退	后留	后顺	合前伏
变行日中率(日)	$17\frac{332}{760}$	112^{*}	27	43	43	27	112	$17\frac{333^{*}}{760}$
变行度中率(度)	$3\frac{332^{*}}{760}$	$18\frac{656^{*}}{760}$		$5\frac{369}{760}$	$5\frac{369}{760}$		$18\frac{656^{*}}{760}$	$3\frac{333}{760}$
差行损益率(分)	$\frac{9}{2}$	$-\frac{6}{5}$		$\frac{11}{6}$	$-\frac{11}{6}$		$\frac{6}{5}$	$-\frac{9}{2}$
变行度常率(度)	$1\frac{357}{760}$	$9\frac{337^{*}}{760}$	$2\frac{210^{*}}{760}$	$3\frac{475}{760}$	$3\frac{475}{760}$	$2\frac{210}{760}$	$9\frac{337}{760}$	$1\frac{358}{760}$
变行乘数 变行除数	350 280	350^{*} 280	267^{*} 221	470 403	510 467	270^{*} 222	267 227	350 280

表 8—10 中,"变行日中率"为木星各动态段平均运行时间;"变行度中率"为各段平均运行度数;设各段运行都遵循等差级数规律,则"差行损益率"为各段等差运动的公差;"变行度常率"是在该段平均运行时间内,行星如均匀顺行应走过的度数,也可以理解为木星相对于其近日点的平行度。变行乘、除数的用途见下文。

上述动态表表示的是平均运动,对任一会合周期,大衍历先取动态表之起点,

① 这是指外行星、内行星一周期内有两次合。

② 《旧唐书·历志三》。表中带 * 的数值均已按(i)变行日中率之和等于会合周期值,(ii)变行度中率之和等于变行度常率之和,(iii)表的对称性,(iv)《新唐书·历志》的木星动态表等,做了校正。

也就是合点，做两项中心差改正，再从合点出发，对整个表做出中心差改正。

二、对合点进行两项中心差改正，并求出定合日及其黄经

（一）五星爻象历

为求得行星中心差，大衍历首次给出了完整的五星爻象历表，此表将一近点周（策实＋变差算）平分为少阳、老阳、少阴、老阴共四象二十四爻，按爻目列出了每一行星真实运动和平均运动之差，称为损益率，以及各爻损益率之和，称为进退积。进退积是从近日点起算的真实运动与平均运动之差，即行星中心差。二者均以辰法为分母，在此仍举木星为例（见表 8－11）。

表 8－11 木星爻象历[①]

爻目	少阳少阴初	少阳少阴二	少阳少阴三	少阳少阴四	少阳少阴五	少阳少阴上	老阳老阴初	老阳老阴二	老阳老阴三	老阳老阴四	老阳老阴五	老阳老阴上
损益率	益 773	益 721	益 630	益 500	益 331	益 123	损 123	损 331	损 500	损 630	损 721	损 773
进退积	进退 0	进退 773	进退 1494	进退 2124	进退 2624	进退 2955	进退 3078	进退 2955	进退 2624	进退 2124	进退 1494	进退 773

（二）求平合入爻

求平合行星中心差改正，需知平合时行星的近点角，也即平合入历，其推求步骤如下：

$$\text{天正冬至夜半后平合日算及余} = \frac{\text{终率}-[(\text{中积分}-\text{天正冬至小余})-n\times\text{终率}]^{②}}{3040} \qquad (8-89)$$

平合入历＝所求年天正冬至夜半后平合日算及余

－天正冬至后近日点到冬至日数

＝天正冬至夜半后平合日算及余

① 《新唐书·历志四下》。对该表之研究参见本书第一章。

② n×终率为满终率去之，下式类同



$$=\frac{变差\times积算-n\times乾实}{3040}\text{①} \qquad (8-90)$$

平合入历满象算及余去之，所得为平合入象算数及余，入象算数及余满爻算及余再去之，得平合入爻算数及余，后者将在求合点行星中心差的公式中用到。

(三)求合点行星中心差改正及常合时间

利用五星爻象历求行星每算(即度)中心差的术文如下：

> 以所入爻与后爻损益率相减为前差，又以后爻与次后爻损益率相减为后差，前后差相减，为中差。置所入爻并后爻损益率，半中差以加之，九之，二百七十四而一，为爻末率，因为后爻初率(皆因前爻末率，以为后爻初率)。初末之率相减，为爻差，倍爻差，九之，二百七十四而一，为算差。半之，加减初末，各为定率。以算差累加减爻初定率(少象以差减，老象以差加)为每[算]损益率。循累其率，随所入爻，损益其下进退，即各得其算定。(其四象初爻无初率，上爻无末率，皆置本爻损益[率]，四而九之，二百七十四而一，各以初末率减之，皆互得其率。余依术算，各得所求。)②

这段术文表述的方法与步交会术中求月亮每度黄纬的方法相同(参见本章第六节)。设所入爻进退积为 F_1，所入爻及后爻损益率的绝对值分别为 ΔF_1 和 ΔF_2，则：

$$前差=|\Delta F_1-\Delta F_2|=\Delta^2 F_1$$

$$后差=|\Delta F_2-\Delta F_3|=\Delta^2 F_2$$

$$中差=|\Delta^2 F_1-\Delta^2 F_2|=\Delta^3 F$$

$$所在爻爻末率=后爻初率$$

$$=\frac{9}{274}\left(\Delta F_1+\Delta F_2+\frac{\Delta^3 F}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{15.\dot{2}\times 2}\left(\Delta F_1+\Delta F_2+\frac{\Delta^3 F}{2}\right)$$

$$所在爻爻初率=\frac{1}{15.\dot{2}\times 2}\left(\Delta F_0+\Delta F_1+\frac{\Delta^3 F}{2}\right)$$

$$爻差=|所在爻爻末率-所在爻爻初率|$$



---

① 按算理，此式应取冬至后(而不是冬至夜半后)平分日算及余。否则将使下面求中心差的计算出现误差，并使以二次差内插推求算余之进退数的计算失去意义。

② 《旧唐书·历志三》。方括号内文字据《新唐书》补。

$$=\frac{|\Delta F_2-\Delta F_0|}{15.\dot{2}\times 2}$$

$$算差=\frac{2\times 9}{274}爻差=\frac{|\Delta F_2-\Delta F_0|}{15.\dot{2}^2\times 2} \qquad (8-91)$$

$$爻初定率=所在爻爻初率\pm\frac{1}{2}算差$$

（少象减，老象加）(8－92)

所在爻每算损益率＝爻初定率±$(n-1)$算差

（少象减，老象加）(8－93)

$$所在爻第\,n\,算进退定数=所在爻进退积\pm\sum_{i=1}^{n}第\,i\,算损益率 \qquad (8-94)$$

在已知每算损益率和进退定数的基础上，大衍历又以二次差内插推求算余所对应之进退数，进而求出近点角为任意数值时的进退定数。其术文为：

求平合入进退定数，各置其星平合所入爻之算差，半之，以减所入算损益率，损者，以所入余[减辰法，余]乘限差，辰法除，并差而半之。益者，半入余，乘差，亦辰法除，[皆]加所减之率。乃以入余乘之，辰法而一，所得以损益其算下进退，各为平合所入进退定数。（此法微密，用算稍繁。若从省求之，亦可置其所入算余，以乘其下损益率，如辰法而一，所得以损益其算下进退，各为定数。）①

如设 b 为平合人爻之整算数，m 为算余（也即术文中入余/辰法），则合点人某爻之数可表达为 $b+m$，设 b 算之进退积和损益率分别为 $f(b)$ 和 $\Delta f(b)$，其爻算差为 $\Delta^2 f(b)$。按术文：

损者：

平合入进退定数

$$=算下进退-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(辰法-入余)\times算差+算差}{辰法}\right]+(入算损益率-\frac{1}{2}算差)\right\}\frac{入余}{辰法}$$

$$=f(b)-\left[m\Delta f(b)-\frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 f(b)\right] \qquad (8-95)$$

益者：

平合入进退定数

$$=算下进退+\left[\frac{入余\times算差}{2\times辰法}+(入算损益率-\frac{算差}{2})\right]\times\frac{入余}{辰法}$$

① 《旧唐书·历志三》。方括号内术文据第四节步月离术求月亮朓朒积之术文补。



$$=f(b)+\left[m\Delta f(b)+\frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 f(b)\right] \qquad (8-96)$$

均与等间距二次差内插公式一致。

求出平合入进退定数，即有：

$$常合日算及余=平合日算及余 \pm 平合入进退定数\times\frac{乘数}{除数}\times\frac{1}{760}$$

(进加，退减)(8－97)

常合日算及余是经过行星中心差改正后的会合日，此会合日经过太阳中心差[①]改正即得定合日算及余。

(四)求定合日算及余、定合黄道经度和定合所在月、日

$$天正冬至夜半后定合日算及余=常合日算及余\pm\frac{常合日太阳先后定数}{4\times 辰法}$$

(先减，后加)(8－98)

式中第二项即为太阳中心差改正。

$$定合黄道经度=定合夜半太阳黄经+定合余\pm\frac{太阳该日盈缩分}{4\times 辰法}\times 定合余$$

(盈加，缩减)(8－99)

大衍历所给求定合月、日的公式为：

定合月、日＝(冬至夜半后定合日算及余秒＋天正冬至大、小余－天正经朔大、小余)/四象之策

(8－100)

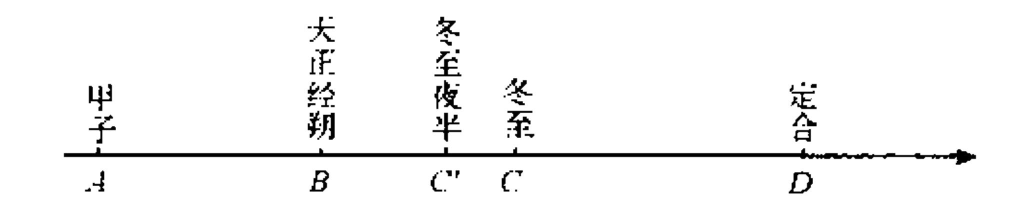


图 8－12 求定合月、日示意图

图 8－12 是这一计算之示意图。由图可知，大衍历公式是：

定合月、日＝BD/四象之策＝$C'D+AC-AB$

此式是有近似的，应以 CD，即冬至后定合日算及余秒代替 $C'D$。

① 实为地球中心差。

三、对整个五星动态表做行星中心差和太阳中心差改正，得出所求会合周期内行星真实视运动表

（一）求各动态段起点入交（变行初日入交）

定合入交＝平合入交±平合入进退定数

±太阳中心差改正　　（8—101）

定合入交依次累加各动态段变行度常率，满交数去之，得每一动态段起点入交。[①]

（二）对各动态段起点做行星中心差改正，求出变行日变率和变行度变率

同求合点行星中心差同样的方法求出各动态段起点的进退定数，以其下乘数乘之，除数除之，得各进退变率。各进退变率前后两两相减，所得加于该段变行日中率和度中率，得各段变行日变率和变行度变率。

（三）做太阳中心差等改正，求出变行日、度定率及行星真实视运动表

这一部分内容，新旧唐书历志的术文有较大的不同，以《新唐书》为例，其术文为：

以定合日与前疾初日，后疾初日与合前伏初日先后定数，各以同名者相消为差，异名者相从为并，皆四而一，所得满辰法，各为日度。乃以前日度盈加、缩减其合后伏度之变率及合前伏、前疾日之变率。亦以后日度盈减、缩加其后疾日之变率及合前伏、前疾度之变率。（金水夕合，反其加减，留退亦然。）其二留日之变率，若差于中率者，即以所差之数为度，各加、减本迟度之变率。（谓以所多于中率之数加之，少于中率之数减之，已下加减准此。）退行度之变率，若差于中率者，即倍所差之数，各加、减本疾度之变率。（其木、土二星，即无迟、疾，即加减前、后顺行度之变率。）其水星疾行度之变率，若差于中率者，即以所差之数为日，各加减留日变率。（其留日变率若少不足减者，即侵减迟日变率。若多于中率者，亦以所多之数为日，以加留日变率。）各加、减变率讫，皆为日、度定率。其日定率有

---

① 大衍历之后，多数历法均直接以平合入交求各变行段初日入交，这一方法更为合理。



分者，前后辈之。（辈，配也。以少分配多分，满全为日，有余转配其诸变率。不加减者，皆依变率为定率。）[1]

观此术文，大意是对合前后日、度变率加入太阳不均匀性改正，对其他段目依变率和中率之差进行调整，所得即为变行日、度定率。如若仔细推敲，上述与太阳改正相关的内容意义十分含混，整个改正也是很不完善的。

以变行日、度定率取代五星动态表中的变行日、度中率，再将差行损益率做相应调整[2]，即得所求会合周期行星的真实视运动表（根据需要，也可以只求表的一部分）。

四、已知时间求行星位置及已知行星位置求时间

以行星真实视运动表为基础，可以对任一动态段运用等差级数做已知时间求位置或已知位置求时间的计算。如设变行日定率＝t，变行度定率＝s，该动态段行星平行度为 $\bar{v}$，差行损益率为 d，所给时间到所入动态段起点的时间为 n，所给时间行星到动态段起点的度数为 s，动态段初日行分为 a_1，则大衍历给出的几个比较主要的公式为：

$$\bar{v}=\frac{s}{t} \tag{8-102}$$

$$a_1=\bar{v}\pm\frac{(t-1)d}{2} \quad \text{（益疾减，益迟加）} \tag{8-103}$$

$$a_n=a_1\pm(n-1)d \quad \text{（益迟减，益疾加）} \tag{8-104}$$

$$s=na_1\pm\frac{n(n-1)d}{2} \quad \text{（益迟减，益疾加）} \tag{8-105}$$

上面是已知时间求位置，已知位置求时间的公式是：

$$n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2a_1\pm d}{d}\right)^2\mp\frac{8s}{d}}\pm\frac{2a_1\pm d}{d}\right]^{③} \tag{8-106}$$

此式益迟者用第一套符号，益疾者用第二套符号。

由于定合时间及黄道经度、各动态段起点到定合的时间、度数均可求出，所以利用上述公式不难得出任一时间行星的黄道经度或行星在任一黄道经度的时刻。

步五星术中还给出了求每日夜半行星黄经的方法，其法为：

定合后夜半星所在黄道经度

＝定合时黄道度＋（辰法－定合小余）×该星初日行分 （8－107）

---

① 《新唐书·历志四下》。

② 见原文小注，此不详述。

③ 参见中国天文学史整理小组编：《中国天文学史》，科学出版社，1982年，第155页。

次日夜半星所在黄道经度

=定合后夜半星所在黄道经度+1日所行度分　　(8—108)

式中"1日所行度分"应指前述平行度。其后各日依此类推。

五、行星黄纬

一行认识到行星的运行轨道与黄道有一定的交角,因此大衍历中出现了一段描述这一现象的文字:

求星行黄道南北,各视其星变行入阴阳爻而定之。其前变入阳爻为黄道北,入阴爻为黄道南;后变入阳爻为黄道南,入阴爻为黄道北。(其金水二星,以夕变为前变,[晨变为后变]。各计其变行,起初日入爻之算,尽老象上爻末算之数,不满变行度常率者,因置其数,以变行日定率乘之,如变行度常率而一,为日。其入变日数,与此日数以下者,星在黄道南北,依本所入阴阳爻为定。过此日数之外者,黄道南北则返之。)①

上文表明,大衍历将星行黄道南北与所求会合周期前变、后变入五星盈缩历之阴、阳爻相联系。如按大衍历给出的变差算值算出其制历年代的五星近日点黄经(木星:345°.14;火星300°.20;土星69°.90;金星260°.11;水星286°.56)②分析,这是一种较为粗略的定性方法,在中国古代历法中,该法也仅见于大衍历。

第八节　余论

隋唐两代是中国古代历法的快速发展时期。在隋代皇极历引入太阳、五星的不均匀性改正、月亮视差的经验改正,并创立等间距二次差内插法的基础上,一行又以更精密的实测为依据,将历法内容做了进一步完善,推进了中国历算家对天体运动规律的整体认识。

大衍历的创新主要包括:①给出了更为符合太阳运动规律的日躔表,纠正了皇极历对日行变化的若干不正确描述③,并将二次差内插法推广至不等间距;②将以文字表述的对月亮视差的经验改正变为连续的表格及公式形式,明确了该改正中各种概念,为宣明历在日食计算上的发展奠定了基础;③首创五星爻象历表,并使五星中心差改正从前此历法中的一点推广至整个会合周期;④创立了太阳天顶距

---

① 《旧唐书·历志三》。方括号内容据《新唐书》补。

② 陈美东:《古历新探》,第427页。

③ 关于这一问题,曲安京在"中国古历若干典型算法的数理分析"中有直观的描述,参见《中国古代数理天文学探析》,第232页。



与晷影长对应表及其以此表为基础的求中晷影长的方法;⑤首次提出了不同纬度(九服)地区晷漏和交食食差的换算方法;⑥创立全新的推灭术,使灭与没从此成为两个相对独立的概念[①];⑦全篇历法按内容分裁为整齐的七个部分,编算结构清晰合理,等等。这些创新大多为后世历法所采纳。

大衍历之后,中国古代历法又经历了一些重要的发展,像宣明历日食三差的引入,从崇玄历起对历法计算所做的公式化等,但各历的主要内容和形式均是在大衍历时即已确定。至元授时历之前,再没有哪一部历法能像大衍历一样在内容上有如此之多的扩充,这也使大衍历在中国历法史上一直备受瞩目。

① 王荣彬:《中国古代历法推没灭术意义探秘》。

第九章 宣明历术及晚唐五代宋历法

第一节 宣明历法数和日月运动

一、宣明历的颁行、创新及影响

《新唐书·历志》称，唐肃宗时，山人韩颖上言大衍历或误。帝疑之，以颖为太子宫门郎，直司天台。又损益其术，每节增二日，更名至德历，起乾元元年(758)用之，迄上元三年(762)。有关至德历及其行用，历史文献仅有此寥寥数语。

唐代宗宝应元年(762)六月望戊夜，月食三之一。官历加时在日出后，有交不署食。代宗以至德历不与天合，诏司天台官属郭献之等，复用麟德元纪，更立岁差，增损迟疾、交会及五星差数，以写大衍旧术。上元七曜，起赤道虚4度。代宗亲为制序，并题曰五纪历。五纪历与大衍小异者九事。有关进朔方法一，晷漏术一，交食术五，五星术二。五纪历有些地方也沿袭麟德历，如总法，月离表并以近地为起点。《新唐书·历志》说，"大衍以四象考五星进退，或时弗叶。献之加减颇异而偶与天合。"于是颁用迄建中四年(783)。其数术载《新唐书·历志》。五纪历将岁差常数改小。

$$岁差=乾实\ 489442.70-策实\ 489428=14.70$$

通法1340(同麟德历)、岁差常数$\frac{14.7}{1340}=0.01097$，岁差合91.1565年始差1度，失之过小。在交会术增加了一些新的实测数据，有一定改进。

德宗时，五纪历气朔加时稍有后天，推测星度与大衍差率颇异。诏司天徐承嗣与夏官正杨景风等，杂麟德、大衍之旨治新历。上元七曜起赤道虚4度。建中四年(783)历成，名曰正元。诏起五年(784)正月施行。会朱泚之乱，改元兴元。值李晟收复京师，朱泚逃亡被杀。自是颁行，迄元和元年(806)。正元历的气朔、发敛、日躔、月离、轨漏、交会诸术，悉如五纪法，而有变易。其五星基本沿袭麟德旧术。仅法数与五纪微异。因此新唐志仅载法数和日躔、月离、交会、五星等表和有关数据。

宪宗即位(元和元年，806)，司天徐昂上新历，名曰观象。起元和二年(807)用之。新唐历志只说，此历"无蔀章之数。至于察敛启闭之候，循用旧法，测验不合"。



"观象历今有司无传者。"这样，直到穆宗长庆二年（822）颁行宣明历，这16年的历法，与肃宗行用5年的至德历，历史上只简单记载了行用的起迄年份，寥寥一两句概括的评述，数术皆无记载。迄今也未发现至德历、观象历的历书或残页。今长历只能分别借用其前行用的大衍、正元历术推算。

至穆宗立（821），认为继承累世伟业，必更历纪，乃诏日官改撰历术，名曰宣明。起长庆二年（822）用宣明历。自敬宗至于僖宗皆遵用之。虽朝廷多故，不暇讨论。然大衍历后，法制简易，合望密近，无能出其右者。迄景福元年（892），凡用71年。这样一部唐代行用最长历法的修撰、颁行过程，《新唐书》仅仅只说了上述几句话。撰修者只言"日官"，而不著姓名。宋史律历志明天历议，明天历术结尾，周琮又论历中提到"唐徐昇（为昂之误）作宣明历，悟日食有气、刻差数"。元史历志授时历议"不用积年日法"中，宣明历条下注明长庆二年壬寅徐昂造，行71年，至景福癸丑。所以后世才将宣明历的著作权还给了徐昂。《新唐书·历志》说，宣明历上元七曜起赤道虚9度。其气朔、发敛、日躔、月离皆因大衍旧术；晷漏、交会，则稍增损之；更立新数以步五星。对它总的评价是，"大衍历后，法制简单，合望密近，无能出其右者。"

大衍历计算定朔的太阳改正数，气朔距是指平朔到其前定气的时日。定气是按日行黄道等分24份划分的。太阳每走到一个分点为交气时刻。日行有盈缩，所以定气间时距是不等的。大衍历为此发展建立了不等间距二次差内插公式来计算日行盈缩和定朔的太阳改正。徐昂方法上做了进一步改进，得出二次差不等间距内插公式另一形式，更易理解，应用上也更加简便。

日出日没早晚、晷影长短的测定在同一时节与地理纬度有关。宣明历首次在步晷漏术中注明测量地的北极出地度分（即地理纬度）。

历法疏密，验在交食。历代历家莫不潜心研究这个历法推步中最困难的问题，企使交食合天。大衍历首推九服见食食分及初亏、食甚、复满三限时刻。发展了交食推步。宣明历首创时气刻三差，以改进去交定分、食分和食甚、定用刻率，提高了推步精度。且历法中首次引入日月带食出没的推步方法，皆为后世历家沿用。其创始之功自不可没。历议、历术、数表简要精到、言简意赅，确是大衍后唐代优秀历法。

麟德、大衍、宣明是唐代三大名历，共行用164年。加上戊寅历行用46年。唐代始终290年，历凡九改。这四历共行用了210年。

隋唐时代，日本积极发展同中国的外交关系。为了向中国学习先进的文化和典章制度，从公元600年起的二百多年中，先后派遣隋使4次，遣唐使19次。唐时实际到达的有13次。对促进古代日本政经改革、发展中日文化交流起了重大作

用。这样，中国历法也东传到了日本，自持统天皇六年（692）直到贞享元年（1684）凡 994 年日本一直行用中国的历法。文武天皇元年（697）始行麟德历（日称仪凤历）。圣武帝天平七年（735）四月，吉备真备自唐归国，持《大衍历经》一卷、《大衍历立成》十二卷以归。天平宝字元年（757）十一月，规定大衍历为历局官生的教科书。七年（763）八月颁诏停用仪凤历，行大衍历。麟德历（仪凤历）在日行用了 67 年。天安二年（858）起参用中国五纪历，大衍、五纪二历并用。贞观元年（859）渤海大使马孝慎上徐昂作长庆宣明历经。清和帝贞观三年（861）真野麻吕详奏请用。四年（862）起颁行宣明历，直到贞享二年（1685）施行自己编制的贞享历为止。大衍历在中国仅用 29 年，在日却行用了 94 年。宣明一术日本竟施行了 823 年。麟德、大衍、宣明三历在日本共颁行了 980 年。高丽建国即用宣明历，直到忠宣王（1309－1313）改行元授时历，而步交会仍循宣明旧术，直到 1392 年为李氏朝鲜取代止，行用了约 400 年。日本有不少仪凤、宣明历书传世。如正仓院保存的天平十八年（746）、二十一年（749）和天平胜宝八岁（756）的仪凤历残页。1980 年又在静冈县浜松市郊发现神龟六年（729）仪凤历残页。近年又在宫城县多贺城遗址发掘出土了大衍历行用期间的历书残页。宣明历施行的 823 年中，至今尚有多种残历留传。在日本各种文献、笔记中留存了大量这一时期的日月食预报和观测记载。为我们今天研究这部行用最久的历法提供了十分宝贵的材料，它们对现代天文、历法研究也有重要的作用。

二、法数闰限与平运动的计算

宣明历演纪上元甲子，至长庆二年（822）壬寅，积 7070138，算外。

统法 8400：日的分数。

章岁 3068055：岁实、回归年的日分。

章月 248057：朔实、合策、朔望月的日分。

通余 44055：章岁－360×统法。

章闰 91371：章岁－12×章月。

闰限 $240443\frac{6}{8}$：闰余分超过闰限之月置闰。

中节 $15\frac{1835\frac{5}{8}}{8400}$：中节长度$=\frac{章岁}{24\times8400}=15.21852679$。

合策 $29\frac{4457}{8400}$：$\frac{章月}{统法}=29.53059524$。

象准 $7\frac{3214.25}{8400}$：$\frac{1}{4}$合策$=7.38264881$。



中盈分 $3671\frac{2}{8}$：$\frac{章岁}{12}-30\times8400$。

朔虚分 3943：30×统法一章月。

旬周 504000：60×8400。

纪法 60。

秒法 8。

候数 $5\frac{611\frac{7}{8}}{8400}$：岁实/72 候。

卦位 $6\frac{734\frac{2}{8}}{8400}$：岁实/60 卦。

辰数 $12\frac{1468\frac{4}{8}}{8400}$：中节$-\frac{1}{2}$卦位。

刻法 84：统法/100，日有百刻，刻的分数。

象数 920446199：周天分。

周天 365 度：周天整度数。

虚分 $2153\frac{299}{300}$：周天度的余分。

岁差 29699：象数－300×章岁，为岁差秒数。

分统 2520000：8400×300，为一日秒数。

秒母 300：为周天度分的秒母。

六虚之差 $53\frac{299}{300}$：由 $365\frac{2153\frac{299}{300}}{8400}-365\frac{1}{4}=\frac{53\frac{299}{300}}{8400}$得出。

历周 231458.19：近点月日的分数。

历周日 $27\frac{4658.19}{8400}$：历周/统法＝27.5545464286。

历中日 $13\frac{6529.095}{8400}$：$\frac{1}{2}$历周日。

周差日 $1\frac{8198.81}{8400}$：合策一历周日。

秒母 100：历周计算中的秒母。

7 日：初数 7465，末数 935。7465＋935＝8400，为$\frac{1}{4}$历周日（近点月）的小数部分。$\frac{1}{4}$历周日＝$6\frac{7464.55}{8400}$。

14 日：初数 6529，末数 1871，为$\frac{1}{2}$历周日的小数部分(余分)。$\frac{1}{2}$历周日$=13\frac{6529.095}{8400}\approx13\frac{6529}{8400}$日，末数$=14-\frac{1}{2}$历周日$=13\frac{8400}{8400}-13\frac{6529}{8400}=\frac{1871}{8400}$。

上弦 $91\frac{2638\frac{149.75}{300}}{8400}$度：$\frac{1}{4}$全周天度。

望 $182\frac{5276\frac{299.5}{300}}{8400}$度：$\frac{1}{2}$全周天度。

下弦 $273\frac{7915\frac{149.5}{300}}{8400}$度：$\frac{3}{4}$全周天度。

终率 228582.6512：为交点月分数。

终日 $27\frac{1782.6512}{8400}$：交点月$=\frac{\text{终率}}{\text{终法}}$

$=27.21222038$。

中日$13\frac{5091.3256}{8400}$：$\frac{1}{2}$终日$=13.60611019$。

$$\text{岁实(回归年)}=\frac{\text{章岁}}{\text{统法}}=\frac{3068055}{8400}=365\frac{2055}{8400}$$

$$=360\frac{44055}{8400}=365.2446429$$

44055 称作通余。248057 年共 3068055 个月。内 91371 个闰月，称章闰。

回归年比 12 个朔望月长 $10\frac{7371}{8400}$日或 91371 分。称作冬至月龄或天正冬至闰余，为冬至距天正经朔的日分。每年冬至距天正经朔都要增加这么多日分。当闰余积分满朔实日分(章月)时，就需设一闰月，以保证冬至总出现在天正(十一月)月内，宣明历当岁前冬至月龄，即闰余分大于 156686 时，其年置闰(156686＋91371＝248057)。至于该闰何月，将每年增加的闰余日分 91371 以 12 除之，得 7614.25 分。将冬至闰余分按月递增此数，何月闰余分其和大于章月(248057)时，该月即为闰月，重上个月月名。判断何月闰月的标准称作闰限。由以上讨论可知，其值为：

$$\text{闰限}=\text{章月}-\frac{1}{12}(\text{章岁}-12\times\text{章月})$$

$$=248057-\frac{1}{12}(3068055-12\times248057)$$

$$=240442\frac{6}{8}$$



《新唐书·历志》法数中闰限为 240443 $\frac{6}{8}$，误。其中个位数 3 为 2 之讹(2 误作 3)，应为 240442 $\frac{6}{8}$。

上式中(章岁－12×章月)＝91371，即章闰。可以看出，宣明历章岁、章月、章闰，与岁实、朔实、闰余分之间直接一一对应，非常巧妙。当依上述方法寻找应闰何月时，若某月闰余分适值闰限左右时，置闰与否须据定朔判定。

朔望月即合策＝章月/终法＝29.53059524 日

在第七章第七节我们得出：

$$月每日平行度=\frac{周天度}{朔望月}+1=\frac{象数}{300\times 章月}+1$$

$$=\frac{920446199}{300\times 248057}+1$$

$$=13.36874588\ 度$$

如略去岁差，以回归年代恒星年，即以岁实代替全周天度，则有：

$$月日平行度=\frac{章岁+章月}{章月}=\frac{3316112}{248057}$$

$$=13.3683468\ 度$$

两者仅相差 0.0003991 度。

$$全周天度=\frac{象数}{分统}=365\ \frac{2153\ \frac{299}{300}}{8400}$$

$$=365.2564282$$

$$岁差=象数-300\times 章岁=29699$$

$$岁差度=\frac{岁差秒}{分统}=\frac{29699}{2520000}$$

$$=0.01178531746$$

合 84.85 年而差 1 度。岁差常数仍嫌较小。

宣明历 1 日分为 8400 分称作统法，1 分约近于现今的 10 秒钟(1 日 86400 秒)。回归年以统法表示为 3068055 分，称章岁；朔望月以统法表示为 248057 分，叫章月。中国历日常以 60 干支周期描述。旬周(60 日)的日分为 60×8400＝504000。章闰＝章岁－12×章月＝91371。宣明历与大多中国古历一样，选取甲子日晨初夜半(0^h)合朔冬至齐同作为历的起算点，又称上元。这一时刻同时又是日月五星同经，日月正好在降交点，月又处于远地点之时。日在冬至点宣明历与其他古历一样，视作日处在近地点。这就是通常说的日月如合璧，五星若连珠。

上元积年：上元至长庆二年(822)，积 7070138。

积年＝7070138＋(所求年－822)

通积分＝积年×章岁 3068055

为避免大数字运算，宣明历做了分解、简化。

令

r_1＝[积年/旬周分 504000]$_R$

天正冬至日分＝[(r_1×通余 44055)/旬周分 504000]$_R$

天正冬至大小余＝天正冬至日分/8400

类似，可求天正闰余(冬至平月龄)。

令

r'＝[积年/章月]$_R$

天正冬至闰余日分＝[(r'×章闰 91371)/章月]$_R$

天正闰余＝天正闰余日分/统法 8400

由所得天正闰余减冬至大小余得天正经朔。

天正经朔大小余＝冬至大小余－天正闰余

三、太阳盈缩和日度

宣明历日躔表的组成形式与大衍历相同。仅盈缩分、先后数以刻法 84 而非以统法 8400 为度母，与大衍稍异。日躔表给出二十四气各气的盈缩分、先后数、损益率、朓朒数四项数值。

盈缩分为本气内太阳实行度、平行度之差与刻法 84 之乘积。盈为实行快于平行，缩反之。

盈缩分＝84×(本气内日实行度－日平行度)

先后数为其前各气盈缩分的累积值。日实行在平行前称先，实行落后于平行为后。即

$$\text{先后数}=\sum_{1}^{n-1}\text{盈缩分}$$

冬至、夏至条下的先初、后初，是说在冬至、夏至交气时并无盈分和缩分的累积。是时太阳实行、平行同在一处。

损益率、朓朒数两栏是为计算定朔弦望时进行太阳改正所设。经分析，损益率与大衍历及其前几历相同，其值仍为气内日实行度、平行度之差与月亮平行度之比值与统法的乘积。即

$$\text{损益率}=8400\times\frac{(\text{气内日实行度}-\text{日平行度})}{\text{月每日平行度}}$$



$$=\frac{100\times\text{盈缩分}}{\text{月每日平行度}}$$

朓朒数为其前各气损益率的累加累减值。

$$\text{朓朒数}=\sum_{1}^{n-1}\text{损益率}$$

从秋分到春分，日实速大于平速，春分到秋分，实速小于平速；其中冬至速度最快，夏至最慢；二分日实速等于平速。这样，在冬至到夏至半年实太阳总在平太阳前；夏至到冬至半年实太阳在平太阳后。朓朒积在冬至到夏至半年，日躔表注为朒，夏至到冬至半年注为朓。介绍定朔计算时说过这是因为推求定朔望时，太阳改正和月亮改正的符号相反。大衍、宣明称冬至到夏至为朒，是为了与月亮改正采用同样改正符号而这样注记的，至于损益率的正负号，前面讲过，损益是指其下朓朒值的绝对数值损益而言的。这里的朒段益为正、损为负；朓段益为负、损为正。

我们已介绍了几种日躔表、月离表的组成。因为各史历志中对此并不做详细说明。诸历日躔表、月离表各项数值名称不一，有时内容含义也不尽相同，各栏数值所含的因子又不一致。对于初学者往往不明所以。而掌握了日躔月离的盈缩迟疾改正，日月运动和定朔望、定气、步朔闰等历日制度等问题就可迎刃而解了。

宣明历计算日躔盈缩，也采用定气不等间距二次差内插算法，但方法上比大衍历有所简化、改进。令本气、后气盈缩分为Δ_1、Δ_2，本气、后气定气长度为L_1、L_2，按宣明历术文有：

$$\text{本气中率}=\frac{\Delta_1}{L_1}$$

$$\text{后气中率}=\frac{\Delta_2}{L_2}$$

$$\text{合差}=\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}$$

$$\text{中差}=\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

$$\text{初率}=\frac{\Delta_1}{L_1}+\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

$$\text{末率}=\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

$$\text{日差}=\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

$$\text{定率}=\begin{cases}\text{初率}-\frac{1}{2}\text{日差}\\ \text{末率}+\frac{1}{2}\text{日差}\end{cases}$$

定率,“以日差累加减之,为每日盈缩差”。这是一个等差级数。首项 $a=$初率$-\frac{1}{2}$日差,公差 $d=$日差。则第 t 日的盈缩分 δ_t 为:

$$\begin{aligned}\delta_t &= a-(t-1)d\\ &=\frac{\Delta_1}{L_1}+\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{1}{L_1+L_2}\\ &\quad\times\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{2(t-1)}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_1^t \delta_t &= \frac{t}{2}[2a-(t-1)d]\\ &=t\frac{\Delta_1}{L_1}+t\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\end{aligned}$$

所以,入气先后(朓朒)定数为:

$$T=T_0+t\frac{\Delta_1}{L_1}+t\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$$

“凡百乘气下先后数,先减后加常气,为定气。”由日躔表某气下盈缩分可得该气定气长度。即

$$\text{定气长度}=\text{常气}(15.2185)\pm\frac{100\times\text{气下盈缩分}}{8400}$$

盈减、缩加。因各气条下先后数为其前各气盈缩分的累加累减值,要求某一定气距冬至的长度,先求出其间平气相距,再先减后加 100×所求气下先后数即得。如求春分定气距冬至,有

$$\begin{aligned}\text{冬至距春分定气}&=6\times15.2185\pm\frac{204\times100}{8400}\\ &=88.8626\text{ 日}\qquad\qquad(\text{先减后加})\end{aligned}$$

宣明历采用与大衍历相同的方法计算冬至赤道加时日度、黄道加时日度和每日夜半日度。

其赤道宿度与黄道互求是采用等差级数的方法得出。设赤道、黄道距度分别用 α、L 表示。大衍历选取二分二至作标准,在这四点太阳的黄、赤道距度相同。以5度为1限。历议说:“黄道之差始自春分秋分,赤道所交前后各五度为限。初,黄道增多赤道二十四分之十二,每限损一,极九限,数终于四,率赤道四十五度而黄道四十八度。至四立之际,一度少强,依平。复从四起,初限五度,赤道增多黄道二十四分之四,每限益一,极九限而止,终于十二,率赤道四十五度而黄道四十二度,复得冬夏至之中矣。”话说得很清楚。以二分前后各5度为初限。初限黄道距度大于赤道距度,多$\frac{12}{24}$度。以后每限损1,即黄道比赤道多的度数每限少$\frac{1}{24}$,至第9限,达



到极值为$\frac{4}{24}$度。9 限为 45 度。赤道距二分点 45 度时，黄赤道距度差为 3 度，即黄道距度为 48 度。一象限为91.3141度。分至的中点为四立。四立距分至点为 45.657 度，比 9 限多 0.637 度。四立前后各 0.637 度，即四立之际 1 度少强（2×0.637=1.3141 度），黄赤道距度差依平，按 3 度计算。四立所在 1.3141 度过后到二至点又为 45 度，仍以 5 度为限。初限 5 度，赤道比黄道多$\frac{4}{24}$度，以后每限增 1，至第 9 限达到极值，赤道比黄道距度多$\frac{12}{24}$度。即四立后赤道距二至这 45 度，赤道比黄道距度大 3 度，黄道距度仅 42 度，42+48=90。因此二至点的黄赤道距度又相同了。黄赤道距度差具体关系如表 9－1。

这是一个等差级数，公差 $d=-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{24}\right)$，首项 $a=\frac{12}{24}\left(-\frac{12}{24}\right)$。对于从四立起算的黄赤道距度差，则首项 $a=\frac{4}{24}$，公差 $d=\frac{1}{24}$。级数的末项 z、n 项之和 S_n 为

$$z=a+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+z)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

表 9－1 大衍历、宣明历黄赤道距度差

限数	α	二分前后		$L-\alpha$	二至前后		$L-\alpha$
		$\Delta(L-\alpha)$	$\Delta^2(L-\alpha)$		$\Delta(L-\alpha)$	$\Delta^2(L-\alpha)$	
初限	0～5	12/24		12/24	－12/24		－12/24
二限	5～10	11/24	1/24	23/24	－11/24	1/24	－23/24
三限	10～15	10/24	1/24	33/24	－10/24	1/24	－33/24
四限	15～20	9/24	1/24	42/24	－9/24	1/24	－42/24
五限	20～25	8/24	1/24	50/24	－8/24	1/24	－50/24
六限	25～30	7/24	1/24	57/24	－7/24	1/24	－57/24
七限	30～35	6/24	1/24	63/24	－6/24	1/24	－63/24
八限	35～40	5/24	1/24	68/24	－5/24	1/24	－68/24
九限	40～45	4/24	1/24	72/24	－4/24	1/24	－72/24
四立	45～46.31			72/24			－72/24

由此可以计算任何一限的 $L-\alpha$ 值。如四立后第 n 限的 $L-\alpha=3-S_n=3$ 度$-\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$。得到的黄赤道距度差称黄赤道差数。二至前后，赤经度大、黄

经度小，故二至前后各九限，黄道度＝赤道度－黄赤道差数；二分前后黄经度大、赤经度小，故二分前后各九限（45度），黄道度＝赤道度＋黄赤道差数。

宣明历同大衍历，上元七曜起赤道虚9度。

求冬至加时赤道日度：

$$冬至赤道日度=[积年\times 回归年长/周天]_R$$

自虚9度数起（不计入虚9），满赤道宿次去之，至不满宿（斗宿）的度分为冬至加时赤道宿度。

将冬至赤道斗宿度分按上述黄赤道互求方法，由冬至斗宿赤道度分内减去黄赤道差数，得冬至加时黄道日度。

大衍历、宣明历岁差为赤道岁差。要求各定气的加时黄道日度，先求出相应的岁差秒分加到定气距冬至长度以为赤道距度。再按上述黄赤道互求方法得出黄道距度，以加冬至黄道日度，得各定气加时黄道日度。定气小余乘按上面方法求出的某日盈缩分，用84刻法来除，得数盈加缩减定气小余。其值即定气小余这段时间里太阳实际运行的度分。用它来减该定气加时的黄道日度，得定气夜半日度。每加1日（度），就以其日盈缩分（被刻法除）盈加，缩减定气初日夜半日度，即得每日夜半黄道日度。

第二节　日月黄经和定气天文计算

6世纪，张子信发现日行盈缩，隋唐及以后的历法，都用以推算太阳位置和在定朔望计算中加进太阳改正。并自初唐戊寅历、麟德历开始，其后历书一直用定朔注历。虽然中国历书中清时宪历才采用定气，但唐大衍、宣明等历已用定气计算太阳改正，推求太阳位置和交会时刻。为了考查唐及以后历法日躔表及推算定气和太阳位置的方法和精度，这里我们介绍计算太阳黄经和节气的现代方法，以资比较。

计算太阳黄经如要求精度不高，只要准确到10″左右，节气时刻只要求准确到5～10分钟时，那计算可以大大减化。在太阳黄经的中心差公式中可以略去 e^3 以上的项（e 为偏心率），利用有三角函数的计算器，进行几项简单运算，并做初步章动、光行差改正就可以了，为要提高精度到1″～2″，节气时刻准确到 1^m，则每个太阳位置均需进行百多项的复杂运算方可。它的困难和花费的劳动都要增加几十倍上百倍。下面介绍的计算太阳黄经的简单公式，笔者做过计算和检验，证实方法是可行的。

$$L_0=279^\circ.6966778+36000^\circ T+(2768''.13T+1''.089T^2)/3600$$



$L_0=(1006908''.04+129602768''.13T+1''.089T^2)/3600$

$DL_1=[(6910''.057-17''.24T)\times\sin M+72''.338\times\sin(2M)]/3600$

$DL_2=-(20''.49+17''.2\times\sin Q)/3600$

$L=L_0+DL_1+DL_2$

其中

$T=(JD-2415020)/36525$

$M=357°.528+35999°.05E$

$Q=125°.045-1934°.136E$

$E=(JD-2451545)/36525$

JD 为所要求太阳黄经的日期时刻对应的儒略日及小数，可由天文年历、各种历表查出或用天文书籍中介绍的方法由公历日期推出。L_0 为太阳平黄经，所给出的两式可根据所用计算工具有效位数任选其一，结果相同。求出平黄经 L_0 后，经过中心差改正 DL_1，再做简单的光行差、章动改正 DL_2，就得出太阳黄经 L。

计算二十四节气时刻分两个步骤。

①按一定时间间隔算出太阳黄经。②根据所得太阳黄经，利用逆内插公式，求出节气时刻。即用逆内插法，反推出所需节气的黄经值(如冬至的黄经为 270°，立春太阳黄经为 315°等)所对应的日期、时刻。

沿黄道一周划分为 24 等份得出的节气为定气。因地球轨道为椭圆，运行有疾徐，视太阳通过同样的黄经(15°)所需要的时间是不相同的。

逆内插就是已知太阳位置 $S(t_0+h)$，欲求 h，h 是小于 1 的小数。一般用白塞尔内插公式：

$$h=[S(t_0+h)-S(t_0)-B_2(\Delta''_0+\Delta''_1)]/\Delta'_{\frac{1}{2}}$$



B_2 为白塞尔内插系数，其值 $B_2=\dfrac{h(h-1)}{2\cdot 2!}$。因 h 不知，先取 $B_2=0$，即用 $h=[S(t_0+h)-S(t_0)]/\Delta'_{\frac{1}{2}}$，计算出 h 的第一近似值，再以它代入 $B_2=\dfrac{h(h-1)}{2\cdot 2!}$ 中，得出 B_2 后再代入上式得出 h 的第二近似值。再代入 B_2，得出新的 B_2 继续依上计算，最终得出 h 值与前一次 h 值相同(如误差<0.000001 日)，即为所求。通常只需做两三次。具体做法是先求出与所求节气黄经相近的 4 日子夜的太阳黄经，取它们的一次差、二次差利用以上方法计算。即

$$\begin{array}{llll}
t_{-1} & S(t_{-1}) & & \\
 & & S(t_0)-S(t_{-1})=\Delta'_{-\frac{1}{2}} & \\
t_0 & S(t_0) & & \Delta'_{\frac{1}{2}}-\Delta'_{-\frac{1}{2}}=\Delta''_0 \\
 & & S(t_1)-S(t_0)=\Delta'_{\frac{1}{2}} & \\
t_1 & S(t_1) & & \Delta'_{\frac{3}{2}}-\Delta'_{\frac{1}{2}}=\Delta''_1 \\
 & & S(t_2)-S(t_1)=\Delta'_{\frac{3}{2}} & \\
t_2 & S(t_2) & &
\end{array}$$

Δ'、Δ''分别为一次差、二次差。经考查，对于近三四百年的节气时刻，由上列算式可准确到5～10分钟(平均小于5^m)。对于过去3000年，它可准确到10～20分(平均小于10^m)。这个计算简单易行，当然精度不够好。但用来比较古历计算的太阳位置和定气时刻还是够用的。也可满足一般生产生活和研讨各种灾害与天象的关系等对太阳位置和节气时日的使用需要。对于早于公元1600年的计算，所得节气时刻还需减去

$$\Delta T = 24^s.349 + 72^s.318T + 29^s.950T^2$$

这里$\Delta T = ET - UT$，是历书时(ET)换算成世界时(UT)所需加的改正。

日月同经，谓之合朔。合朔时黄道日度即月离黄道度。用内插法得出定朔小余时间的月实行度分，以减加时月离，得定朔夜半月离。以每日月实行度分递加之，得每日夜半月离。

现代计算月亮黄经λ的方法比较复杂。但为了考查历代月离表和古历推算月亮位置的疏密，可以选用下面比较简单的算法。

$$\begin{aligned}\lambda = l &+ 22640''\sin m + 769''\sin(2m)\\ &+ 36''\sin(3m) + 2370''\sin[2(l-L)]\\ &- 668''\sin M - 412''\sin[2(l-\Omega)]\\ &+ 4586''\sin[2(l-L)-m]\\ &+ 212''\sin[2(l-L-m)]\\ &+ 206''\sin[2(l-L)-m-M]\\ &+ 192''\sin[2(l-L)+m]\\ &+ 165''\sin[2(l-L)-M]\\ &- 110''\sin(m+M) + 148''\sin(m-M)\end{aligned}$$

其中

$$l = 270^\circ.434164 + 481267^\circ.883142T - 0^\circ.001133T^2$$

$$m = 296^\circ.104608 + 477198^\circ.849108T + 0^\circ.009192T^2$$

$$\Omega = 259^\circ.183275 - 1934^\circ.142008T + 0^\circ.002078T^2$$

$$L = 279^\circ.696678 + 36000^\circ.768925T + 0^\circ.000303T^2$$

$$M = 358^\circ.475833 + 35999^\circ.049750T - 0^\circ.000150T^2$$

$$T = (JD - 2415020.0)/36525$$

JD为儒略日。T为自1900.1.0.12^h历书时起算的儒略世纪数。l是月亮平黄经；m乃月亮平近点角。Ω为月轨升交点的平黄经。L是太阳平黄经；M乃太阳平近点角。为了达到$2'$～$5'$的精度，l选取3位小数，其他各项选取2位即可。



第三节 定朔推步和进朔

宣明历的月离表与大衍历形式完全相同。列出一个近点月内每日的历分、进退、积度、损益率和朓朒积五项数据。俱从远地点开始。除历分、转分、进退衰、列衰名称稍有不同外，宣明历最大特点是将一近点月分成两半，从远地点到近地点，由近地点到远地点各13.77726日。入历日(入近点月日数)小于半数(13.77726)者用月离表的前半进栏部分数据，大于半数者减去历中日(半数)使用月离表后半退栏数据。

历分＝月实行度×刻法 84＝月实行分

进退衰＝次日历分－本日历分

后多为进，后少为退。

积度＝∑历分/刻法 84

度分仍以刻法为分母。

损益率＝(历分－月平行分)×统法/月平行分

$$朓朒积=\sum 损益率=\sum\frac{(历分-月平行分)\times 统法}{月平行分}$$

远地点到近地点半周，开始 7 日$\left(\frac{1}{4}周\right)$月实行慢于平行，次 7 日$\left(第\frac{2}{4}周\right)$实行快于平行，即前半近点月内，月行一直在加快到近地点达到最大。所以进退衰前半近点月内全为进。但实月一直落在平月之后，朓朒积前半周全为朒。朒值在前$\frac{1}{4}$周越来越大，损益率按朓朒积大小而言，故为益，但要注意此益为负值。第$\frac{2}{4}$周，实月逐渐赶上平月，朒值越来越小，损益率为损，但此损为正值。在近地点到远地点的后半周，月实行一直在减慢，故进退衰全为退。同时实月总在平月之前，故朓朒积全为朓。开始 7 日$\left(近点月的第\frac{3}{4}周\right)$，月实行大于平行，实月与平月拉开距离越来越大，朓值在增大，损益率为益，此益为正。近点月的第 4 个$\frac{1}{4}$周，月速由平速继续变慢到远地点达到极小。这时实月与平月距离逐渐缩小，到远地点时重合。故朓值在减小、损益率为损，此损为负。

宣明历用来计算定朔望月亮改正的损益率、朓朒积仍如唐初诸历一样，为以月每日平行来除月实行与月平行之差，其数再乘以统法得出。计算定朔弦望月亮改正完全袭用大衍历的方法。

在介绍麟德历时说过，历书上的朔望并不采用二次差内插算法推步。太阳、月亮改正皆用简单的线性内插得出。具体做法如下：

太阳改正 $T=T_0+t\frac{\Delta_1}{L_1}$

月亮改正 $S=S_n+s\delta_n$

定朔弦望时刻＝平朔弦望时刻＋S＋T

T_0 是所求朔前之定气朓朒值。t 为定气到平朔的日数及小数。Δ_1、L_1 是这个定气的损益率和长度。入历日乃平朔距其前远地点的日数，入历日超过历中日(13.77727)，则减去历中日，用月离表的第二部分。S_n 为入历日整数 n 的朓朒积，s 为入历日的小数部分。n 为距远(近)地点的日数。δ_n 为距远(近)地点 n 日的损益率。平朔入历在 0～1.0 日用月离表 1 日的朓朒积和损益率数值。平朔入历 1.0～2.0 日用月离表 2 日的数值。入历 ns 则用月离表 $n+1$ 日数值运算。计算中要注意损益率和朓朒积的正负号。

在月离表前半周，自远地点至近地点，其 7 日(距远地点6.0～7.0日)条下，历分为 1115，即是日月亮实行 1115 分，比平行慢 8 分。按损益率的组成，是日损益率为$\frac{8}{1123}\times8400=60$(益、负)。但月亮在距远地点$\frac{1}{4}$周即 6.8887 日时实行等于平行，故这天从 6.0～6.8887 日损益率为 $60\times0.8887\approx53$(益、负)。斯日剩下的时间即 6.8887～7.0 日月实行要比平行快，故这一段的损益率为 $60\times0.1113\approx7$(损、正)。

在月离表的后半周，从近地点到远地点，其第 7 日(距近地点 6.0～7.0 日)历分为 1131，即是日月实行 1131 分，比平行快 8 分。其日损益率为 60 益(正)。月亮在距近地点 6.8887 日时实行、平行相等。与上类似可分析得出 6.0～6.8887 日损益率为 53 益(正)，在 6.8887～7.0 日损益率为 7 损(负)。

所以在月离表的前后两半周历日 7 日条下损益率栏给出了“初益 53，末损 7”的数值。在表前所列基本常数中有这样两条：

7 日	初数 7465	末数 935
14 日	初数 6529	末数 1871

将 7 日、14 日初末数，以统法 8400 除之分别得到 0.8887、0.1113 与 0.7773、0.2227。它的意思就是将 7 日、14 日各分作两部分。7 日的两部分如上所述，6.0～6.8887 日为初，损益率为初益 53，6.8887～7.0 日为末，损益率为末损 7。但要注意，前后两半周损益的正负号是相反的。前半周益负损正；后半周益为正、损为负。7 日分为初末，是因为 6.8887 日正好位于近地点与远地点的正中，月实行速正好与月平行速相等之时。



14 日分为初末数，表示 13.7773 日正好为历中日，是近地点到远地点，或远地点到近地点的时间。13.7773～14.0 日，即 14 日的末段 0.2227 日已进入近点月的另半圈。由月离表看出，前半周 14 日这天(13.0～14.0)，月亮日实行 1234 分，比平行约快 111 分。由此可知是日的损益率为$\frac{111.04}{1122.96}\times 8400\approx 830.6$ 损(正)。月亮在 13.7773 日过近地点。13.0～13.7773 日这一段为 14 日初段，它的损益率为 $831\times 0.7773\approx 646$ 损(正)。13.7773～14.0 日这 0.2227 日为 14 日末段，已进入下半历周。下半周 14 日历分 1012，比平行慢约 111 分。与上同样分析得知在 13.0～13.7773 日，14 日的这一初段损益率为 646 损(负)。所以在月离表前后两半周 14 日损益率栏，都给出初损 646 的数值。

在计算定朔月亮改正时，若平朔月亮位于入历 6.0～7.0 或 13.0～13.7773 日，就需要特殊处理。在麟德、大衍等历法中都存在同样问题，且除 7、14 日外，21、28 日也需特殊计算。

经过分析，我们得出了宣明历计算 7 日、14 日月亮改正的如下算式(略去推导的中间过程)。

对于入历 6.0～6.8887 日者，有：

$$S=S_6(3172)+(1-0.5625\times s)\times 119\times s$$

入历 6.8887～7.0 日者：

$$S=S_6+53-7\times\left(s-\frac{8}{9}\right)\times 9$$

入历 13.0～13.7773 日者：

$$S=S_{13}(646)+(789+53.3572\times s)\times s$$

符号与原式朓朒积、损益率取法相同。

我们依据上述方法计算了宣明历施行的 71 年，自长庆二年(822)至景福元年(892)的定朔干支、时刻。经与现代方法计算的这 71 年 878 个月的平朔、实朔比较，宣明历推出的定朔比实朔平均要迟 $13^m.61$(后天)，精度是比较高的。878 个月定朔与真实合朔时刻相比，扣除系统差，误差大于 70^m 者共 50 个，占 5.7%。误差最大的为 873 年 5 月 30 日合朔，宣明历后天 98^m。宣明历定朔误差有个明显特点，定朔后天 70^m 以上者，全发生在 4 月中到 7 月中 3 个月内；定朔早于真朔，先天 70^m 以上者，全出现在 10 月中至次年 1 月中这 3 个月内，无一例外。误差与季节、月份有明确关系。说明定朔计算主要误差是因日躔表和太阳改正不够精确所致。经考查，宣明历月离表比大衍历精度有提高。日躔表与大衍历相当，较皇极历、麟德历有改进，但仍不够准确。用宣明历日躔表得出的定气时刻与真实天象相差有的可达半日。一般小寒至小暑(上半年，近地点到远地点段)计算的定气要早于真实天

象(先天),而春分至芒种段失天最大。大暑到冬至(下半年,远日点到近日点段),定气要迟于天象(后天),而秋分到大雪段后天最多。这两段正好与宣明历定朔误差较大的时段对应。而定朔失天的方向与此正好相反。另一方面,仅就一次项中心差引起的日月运动改正而言,宣明历太阳改正占的成分过大,月日改正比约为2,而合天的值应约为3。

宣明历与大衍等历都取冬至、夏至为近日、远日点时刻,在唐代这不十分准确。以公元822年为例。822年12月9日己酉9时10分过近日点,而冬至在12月17日19时58分。近日点在冬至前8日10时48分。宣明历人历与远地点也有误差。如历取822年12月16.056日过远地点,而实际天象约为822年12月15.362日,相差近千分。加上宣明历定朔计算中太阳月亮改正项仍用月平速作分母。凡此种种都会对定朔计算带进一些误差。

宣明历术对进朔有明确规定。秋分后定朔小余如在0.75以上者则进一日,即朔日写成次日干支。春分后取其昏明小余与春分初日昏明小余之差,5分之,以减0.75,定朔小余在此数以上进一日。将每日夜半定漏用刻法通分即得昏明小余。这样可得出宣明历规定的进朔下限,定朔小余(即日的小数)大于此值者进日。数值如下:

秋分至春分	0.75000	夏至	0.74005
清明	0.74924	小暑	0.74031
谷雨	0.74479	大暑	0.74124
立夏	0.74276	立秋	0.74276
小满	0.74124	处暑	0.74479
芒种	0.74031	白露	0.74924

将计算得出的71年878个月的定朔,依据这个规定进位,得到的就应是宣明历书的历日。将它与汪曰桢《历代长术辑要》比较,878个月朔中有11个不同(相差1日),都发生在进朔的边缘状态。11个中有7个我们的计算结果与《资治通鉴》所收刘羲叟的《长历》(简称《目录》)相同,4个不同。即进朔后,我们有11个朔日与《长术辑要》不同,内有7个与《目录》同,另外4个与《辑要》、《目录》都不同。我们的计算似与《目录》较接近,但仍有4朔有别。三家历谱有一定差异,谁是谁非,谁疏谁密,是进朔问题,还是计算问题,另外有没有别的原因,这些问题有待进一步考查。

目前已知,现存较完整的宣明历书是敦煌发现的唐乾符四年(877)历书刻本一种。原件藏伦敦大英博物院。缺卷首,存二月十日至年终。将用宣明历术计算得出的乾符四年定朔(含进朔)、平气与这份历书比较,历朔节气完全一致。有关宣明历定朔计算结果和乾符四年历书的考查比较等有关具体问题,有兴趣的读者可参



看笔者有关论著。

第四节　日食月食的形成

一、日食月食性质不同

当围绕地球公转的月球走到太阳和地球中间时就形成日食；当月球在地球背后，被地球挡住了射到月面的日光时发生月食。可是日月食不是每月都有的。因为月球在白道上运行，地球在黄道上运行，黄道白道有5°许的交角。只有朔望发生在交点附近时，才有日月食发生。

月距地平均384000千米，约当地距日的1/390。月球、地球直径之比是272∶1000，与3∶11相近。地球直径是12757千米，月球是3473千米。月球表面积为3800万平方千米，体积是220亿立方千米，约当地球体积的1/49，而为太阳体积的1/64000000。虽然月球比太阳小得多，但因它离我们近，所以从地球上看，日月所张的角度（视角直径）却相差无几。

地球、月球本身都不发光。受太阳照射，在地、月背后都拖着一个圆锥形的阴影。地球影锥长度约为地球赤道直径的108.5倍，平均1384000千米。在月地平均距离384400千米处，地影锥的截面直径约为月球直径的两三倍(2.65)。而在月亮背后由日光形成的阴影锥长约为日月相距的1/400，即平均373540千米。比月地的平均距离还稍小。月球绕地公转轨道是椭圆，偏心率是0.055，约1/18。如果用18厘米为椭圆长轴表示月球公转轨道，其椭圆两焦点间的距离只有1厘米，焦点离中心仅半厘米。但比地球轨道的偏心率0.0167稍大。故月轨要更扁长一些。因此，在近地点，月距地较近约为363300千米，因而从地球看月球的视直径较大，约当32′46″；在远地点，月距地最远约为405000千米，月亮视直径较小，约为29′22″；平均384400千米，视直径31′04″。另一方面，地球椭圆运动也有近有远。而日食时月距日越远月影锥就越长；日月距越小时，月影锥就越短。因此，有时月影锥长会出现比月地距要大的情况。即使在最长情况下，月影锥在地球表面形成截面的直径也只有270千米，很多情况下本影圆锥刚及地面或其延长线组成的伪本影圆锥扫过地球表面。

因此，日食、月食现象性质上是不同的。月食时，月亮进入地影是全部还是一部分不为日光照射，取决于望月入交的远近。对于看得见月亮的半个以上地球（月亮在地平线以上）上的人们，月食现象都是相同的。日食则不然，同一次日食各地见食的时间、食分都不一样。有的地方见全食环食，有的地方仅见偏食，偏食大小又不同，还有的地方根本看不到食，尽管食时太阳都处在地平以上。所以推算日食

要比月食困难得多。因见食情况随地区而异，这样，仅计算交食的一般情况，如月食那样，就不行了。各地见食时刻、食分需一一计算。

古人不能确切了解月球运动，早期预报仅根据周期。我国汉代已按周期预报月食。在众多交食周期中，223 个朔望月 242 交点周最有意思。因月球轨道运动偏心率的关系，月行迟疾（偏离平行）有时可达 $\pm 6^{\circ}$ 之多。实际上勿需差这么远就可使食不再发生。但这个 223 月的交食周期恰恰又与 239 个近点月相近。就是说经过这一周期朔望、入交、入转差不多都恢复到起始状态。即

$$223\times 朔望月\approx 242\times 交点月\approx 239\times 近点月$$

使得这一周期成了很有用的预测日月食的方法。

日食时，只有在月影锥接触地面的小范围里，人们才能看到全食或环食。全食环食也称中心食。中心食区宽度不过两三百千米。它在地面扫过的面积形成一个长条，叫中心食带。因月绕地公转拖着本影圆锥扫过地面，其速度比地球自转带着观测者前进还要快。月亮速度大约是每秒 1 千米，而地面上一点的自转不过三四百米（赤道上每秒 465 米）。所以本影在地球的截面迅速地向东奔驶。在月球的影子进入地球的起点（在西方），这时正是日出。通常五六小时后由于月亮运动和地球自转组合，月影在东方离开地面，是时那里已近黄昏，当地居民在日落时看到日食。在中心带两旁一较广区域，人们可以看到偏食。再远的地区，就看不到日食了。

月亮的视直径是变化的。出现日食时，它可能小到 29′22″，大到 33′26″。太阳视直径也随季节而有差异，可由 31′28″，大到 32′32″。所以月轮比日轮有时大有时小。如月亮在天顶，它与我们更加接近，它的视直径还要增大 1/60，最大可达 34′多。所以更有利于形成中心食。日食时，如月球圆面大于太阳，在月影中心轴线附近的观测者就看到全食。如月角直径小于太阳，即使月球视中心与太阳中心相合的时刻，太阳边缘仍未被遮住而形成日环食。这实际上是月本影锥顶点未达地球，其延长线包络的伪本影圆锥与地面接触形成的。这时在月影轴线附近看到环食，而在月球半影区域内的观测者看到偏食。

因为月球由西向东运动，所以日食从圆面的西（右）边开始亏缺。整个日食过程可延续两三个小时，但全（环）食时间只有几分钟（一般小于 7^{m}）。因为月球圆面只略大于日面，很快就从它前面走过去了。月食是月亮进入地影圆锥，月球自西向东运动，所以月球东部（左）最先进入地影而亏缺。如月球全部进入地球本影圆锥便发生全食。如入交不深，月球仅在靠近地影边缘的地方进入本影则出现偏食。因地影圆锥截面约为月球圆面直径的 2.65 倍，所以月全食可以延续得比较久，长者可达 120 分钟。地球上任何地点月食的发生、终了都在同一时刻，食分也相同。



钟表上的不同读数那是与各地经度有关的。

二、食甚时刻与实朔实望并不一致

日月食的食甚时刻并不与实朔实望时刻一致。对于发生在视正午的日食，食甚与日月赤经相合时刻接近。月食食甚与实望(黄经冲)、赤经冲的时刻均有差别。只有恰好发生在升降交点的日月食，食甚才与实朔实望的时刻相同。

在图 9－1 中，M_0、S_0 表示日食时实朔时刻月日的位置，它们的黄经(日月同)为 L_0，月的黄纬为 b_0。I 为黄道白道交角。虽有日食发生，但因这时日月未处于最近距离，而并非食甚时刻。月速大于日速。月日黄经运动速度比设为 q。在时间 t 之前，当月行至 M，日走到 S 时已达到月日距最小值 D。过 M 作黄经圈，此 L、b 即为合朔前 t 时的月亮的黄经黄纬。此时太阳黄经为 L'，Ω 是月亮升交点的黄经。

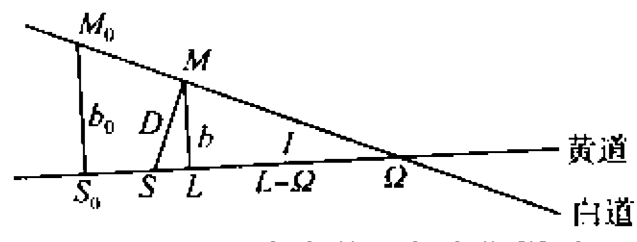


图 9－1　日食食甚不与实朔同时

由球面三角知，当 D 边对角为直角时，有：

$$\cos D=\cos b\cos(L-L')$$

因 I 角很小，b 仅 $0°.5$ 左右，此球面三角可视作平面直角三角形，近似有：

$$D^2=b^2+(L-L')^2$$

在球面直角三角形 $ML\Omega$ 中，有：

$$\mathrm{tg}b=\sin(L-\Omega)\mathrm{tg}I$$

近似地用平面直角三角形得出：

$$b=(L-\Omega)\mathrm{tg}I,\ b_0=(L_0-\Omega)\mathrm{tg}I$$

所以

$$D^2=(L-\Omega)^2\mathrm{tg}^2I+(L-L')^2$$

设 l、l' 为月、日黄经的每时变量，则有：

$$L=L_0+lt,\ L'=L_0+l't$$

代入 D 式，得：

$$\begin{aligned}D^2&=(L_0+lt-\Omega)^2\mathrm{tg}^2I+(l-l')^2t^2\\&=(b_0+lt\cdot\mathrm{tg}I)^2+(l-l')^2t^2\end{aligned}$$

满足 D 为最小的条件是 $\frac{\mathrm{d}D^2}{\mathrm{d}t}=0$，于是有：

$$(b_0+lt\cdot\mathrm{tg}I)l\cdot\mathrm{tg}I+(l-l')^2t=0$$

$$t=\frac{-b_0\cdot l\cdot \mathrm{tg}I}{(l\mathrm{tg}I)^2+(l-l')^2}$$

代入上式，得出最小的 D^2 值为：

$$D^2_{min}=\frac{b_0^2}{1+\left(\frac{l}{l-l'}\mathrm{tg}I\right)^2}=b_0^2\cos^2I'$$

因为有 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$的关系，令 $\mathrm{tg}I'=\frac{l}{l-l'}\mathrm{tg}I$。所以 D 的最小值 D_0，可表示为：

$$D_0=|b_0|\cos I'$$

t 就是视午日食食甚时刻对实朔的改正值。

$$食甚时刻=实朔时刻+t$$

月食的情况类似，可推出与上形式相近的改正值表示式。下面给出月食食甚时刻对实望时刻改正值 t_m 的另一形式，计算中常直接使用。

$$t_m=\mp 0^d.00402\frac{B}{\Delta L}$$

$$=\mp 0^d.00402\times p\times \sin P/\Delta L$$

B 为实望时月亮中心与地影中心的距离，以$\frac{\pi-\pi'}{\pi}$倍地球赤道半径为单位。π、π' 为月、日的地平视差，p 为计算辅助量，P 为实望时月亮的升交距角。ΔL 为月亮相对于地影中心的每时速度在黄道方向的分量。也以$\frac{\pi-\pi'}{\pi}$倍地球赤道半径为单位。于是有：

$$月食食甚时刻=实望时刻\mp 0^d.00402\frac{B}{\Delta L}$$

月亮升交距角 P 在第一、第三象限时，取负号；在第二、第四象限时，取正号。

日、月食总是发生在朔望，月亮中心常在日地中心的连线附近。因此，日、月食时日月距角 ξ，日食时约为 0°，月食时几近 180°。食时月亮黄纬必定很小，月必在轨道两交点之一附近。因此月的升交距角 P，大约近 0°或 180°。即食时 ξ、P 等于或接近 0°或 180°。与月、日平近点角 g、g' 各等于 90°对应的食叫平食；与月在近地点，日在远地点（即 $g=0°$，$g'=180°$）对应的食叫近地食；与月在远地点，日在近地点（$g=180°$，$g'=0°$）对应的食名叫远地食。近远地食是两种极端情况。

前面式中的 l、l'、b、p、P、ΔL 都可表示为三角级数。

$$l=2011''+258''\cos g+16''\cos 2g-1''\cos\xi+2''\cos g'+1''\cos(g-g')+\cdots$$

$$l'=148''(1+2e\cos g')$$



$$b=-18520''\sin(\lambda-\Omega)-526''\sin(2L'-L-\Omega)+\cdots$$

$$\lg p=0.71728-0.02769\cos g+\cdots$$

$$\lg\Delta L=9.734161+0.3192\cos g+\cdots$$

$$P=P_0-0.0064-0.4125\sin g-0.1135\sin(2g)+0.0279\sin(2g')+\cdots$$

其中 L'、L 为日、月平黄经，g'、g 为日月平近点角，ξ 为日月距角($L-L'$)，Ω 是月亮升交点平黄经。λ 乃月亮黄经，可依下式求出：

$$\lambda=L+22640''\sin g+769''\sin 2g+2370''\sin(2\xi)$$
$$+668\sin g'+4586''\sin(2\xi-g)+\cdots$$

日月食时，$2\xi\approx0$，上式可简化，其他各平值为：

$$L'=279°.696678+36000°.768925T$$
$$L=270°.434164+481267°.883142T$$
$$g=296°.104608+477198°.849108T$$
$$g'=358°.475833+35999°.049750T$$
$$\Omega=259°.183275-1934°.142008T$$
$$\xi=350°.737486+445267°.114217T$$

$T=(JD-2415020.0)/36525$ 为历书时。

月食食甚时刻各地相同，实望需加的改正量对各地皆适用。上列日食食甚时刻对实朔所加的改正指视午日食食甚时刻，各地食甚时刻并不相同。一般地说，在它西面食甚要早一些，在其东要迟一点。因月球运动和地球自转组合，月影在地面移动较快，各地食甚时刻相差通常都要小于它们之间的经度差。

从以上讨论看出，古历交食食甚时刻，月食通常就为实望时刻；日食虽认识到与实朔不同，需加一定改正，但仍将正午日食食甚与实朔视作一致。这些都是不够准确的。

第五节 视差对天体坐标的影响

不同地点观测同一地面目标，所测得的目标方位是不同的。同样，对于离我们较近的天体，例如太阳系天体，由于观测者空间位置的变化，它们在天球上的位置也不一样，这种现象天文学称作视差。

地面上的观测者随地球的自转和公转不断地改变自己的空间位置。不同位置上的观测者在同一时刻观测同一天体，测得的方位是不同的。同一观测者在不同时间观测同一天体，由于观测者的空间位置变了，所见天体的方位也有不同。天文学上讨论视差对天体坐标的影响，就是要解决如何从不同位置观测所得的天体坐

标归算到同一个系统的问题。

视差分周日视差和周年视差。前者取地球中心为标准点，同一天体的地面坐标和地心坐标之差称周日视差。恒星的周日视差很小，因而周日视差主要用于讨论太阳系天体。对恒星，则取日心为标准点。同一天体的地心和日心坐标之差为周年视差。我们主要考查视差对日月食的影响，所以下面只讨论周日视差问题。

观测者在地面测得的天体方向和由地心测到天体方向之间的夹角，就是天体的视差。设地球为正球体。由图9－2看出，对于观测者 A，$\angle ABO$、$\angle AB_0O$ 为同一天体在不同位置时的视差，分别以 P 和 P_0 表示。对于观测者 A' 来说，在同一时间观测天体 B，它的视差为 $\angle A'BO$ 或 P'。还可看出，视差随天体地平高度的变化而不同。当天体在天顶时，视差为零；而天体在地平线时，视差达到最大值 P_0。P_0 称作地平视差。它的大小就是从天体上所见的地球半径所张的角度。月球距地最近，在各种天体中它的视差是最大的。对于行星，只在特殊情况下视差才会超过 $1'$。而月球视差平均约为 $57'.3$。这个角度即从月球上看地球半径的张角。因此月球上的观测者看来，地球的视角径为 $57'.3\times2$，即 $1°54'.6$，几近 $2°$。

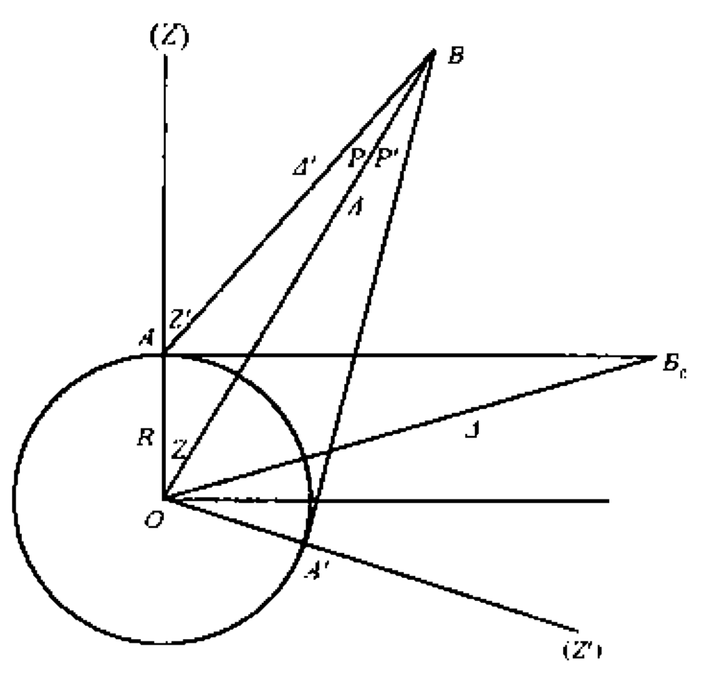


图9－2　视差随天体高度而不同

用 R 表示地球半径，Δ 代表天体距离，由图9－2得出：

$$\sin P_0=\frac{R}{\Delta},\frac{\sin P}{\sin Z'}=\frac{R}{\Delta},P=Z'-Z$$

所以

$$\sin P=\sin P_0\sin Z'$$

因 P 和 P_0 很小，可以弧本身代其正弦，故有：

$$P=Z'-Z=P_0\sin Z'$$

因此，视差按高度计算，而与天顶距的正弦成正比。由 $\Delta=R/\sin P_0$，若已知地



球半径 R 和地平视差，就很容易算出天体的距离Δ。所以天文上要测天体的距离，就是设法测定天体的视差。因为 R 为常数，P_0 只与天体的地心距Δ 有关。所以天文年历中，逐日列出日月行星的地平视差值，由此可知每日它们的地心距。

地球不是正圆体而是椭球体。通常地心不处在观测者所在的铅垂线上。以观测者为中心的天球就有地心天顶与天文天顶之别。地心天顶指地心 O 与观测者 A 连线与天球的交点。天文天顶为地球上过 A 的铅垂线与天球的交点。对于北半球，地心天顶位于天顶之南（子午圈上）的 $\varphi-\varphi'$ 角度处。这里 φ 为地理纬度，φ' 是地心纬度。

地球是旋转椭球体。根据大地测量结果，1967 年国际规定参考椭球的半长轴 a、半短轴 b 和椭率 $\varepsilon=\frac{a-b}{a}$ 的数值如下：

$$a=6378160\text{ 米}, b=6356775\text{ 米}, \varepsilon=\frac{1}{298.25}$$

地理纬度 φ 是椭球的法线与赤道面之间的夹角。地心纬度是连接地心与观测者 A 的直线与赤道面所成的角度 φ'。它们之间有下列关系：

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi$$

令 $OA=a\rho$，OA 是 A 点的地心距。ρ 是与 1 很接近的数值。

在图 9－3 中，$OA=a\rho$，以 ζ 表示天体 B 的地心天顶距 Δ 为天体的地心距，a 为地球的赤道半径，即椭圆半长轴。在$\triangle ABO$ 中，有：

$$\sin P=\frac{OA}{\Delta}\sin\zeta'=\rho\frac{a}{\Delta}\sin\zeta'$$

前已得出 $\sin P_0=\frac{R}{\Delta}$。因地球有椭率，对地球表面上各点同一天体的地平视差不完全相等。它在赤道上有最大值。因此，一般所说的地平视差是指赤道地平视差，即地球赤道半径在天体处所张之角。故式中之 R 即地球赤道半径 a。



P、P_0 都是小角，可取角的弧度等于小弧的正弦。

于是有：

$$P_0=\frac{a}{\Delta}, P=\rho\frac{a}{\Delta}\sin\zeta'=\rho P_0\sin\zeta'$$

将图 9－3 投影到以 A 点为中心的天球上，A 点有地心 ϕ' 和地理 ϕ 两种纬度，有地心 Z'、天文 Z 两个天顶。天体 B 的方向分别是 ABS' 和 OBS。S'、S 为与天球之交点。在$\triangle ZZ'S'$ 中，已知 $ZZ'=\phi-\phi'$，ZS'、$\angle Z'ZS'$ 分别为在 A 点测得的天体 S' 的天顶距和方位角。由此，根据球面三角公式可解得 $Z'S'$，即 ζ'。将 ζ'、ρ、P_0 代入上式就可以计算出 P 值。

图 9—3 视差与地心天顶距的关系

视差改变了天体的方向，也就改变了天体的坐标。天文年历和各种星历表提供天体的地心坐标。地面的观测者测定得出的是地面坐标。它们之间有一定差异，对于月球相差最大。

由于地球是椭球体，存在地心天顶和天文天顶之别，但它们的距角不超过 12′。由此产生的方位角 A（地平经度）的视差可以忽略不计。即天体地心方向的指向点与天体在观测者眼里的指向点在地平经度方面的视差可略。视差主要表现在地平高度上的变化。即有：

$$\Delta A=0,\Delta Z=\rho P_0\sin\zeta$$

由地面观测所得的天顶距比地心天顶距大，其差即为视差 P 这个角度。因此视差总是使天体的位置降低，而不改变天体的地平经度。中国历法中称总周日视差为高下差。视差增加了视天顶距，但是蒙气差却减少了它。蒙气差总是使天体的位置升高。视差使天体位置降低，因而推迟了天体出东地平的时间，而提早了西没的时间。也就是改变了上式中时角 t 的大小。由蒙气差 R 引起的时角改正值为：

$$\Delta t_1=\pm\frac{R}{\sqrt{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi-\delta)}}$$

由于蒙气差的折射作用，天体升时提早，没时推迟，所以没时取正，升时取负。

由视差引起的天体出没的时角改正值为：

$$\Delta t_2=\pm\frac{P_0}{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}$$

因视差使天体升时推迟，下没提早，所以升时取正，没时取负。

天体在地平圈上时，天顶距为 90°。所以由前式可以计算天体出没的时角 t。通常因天体的视差都很小，所以对天体的出没无有多大影响，可是会明显改变月亮



的出没时间。因为它的视差平均 57′，超过蒙气差约 22′。综合这两方面相反的效应，月亮升没时角的改正值为：

$$\Delta t=\pm\frac{22'}{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}=\pm\frac{1^{m}28^{s}}{\sqrt{\cos(\varphi-\delta)\cos(\varphi+\delta)}}$$

升时取正，没时取负。

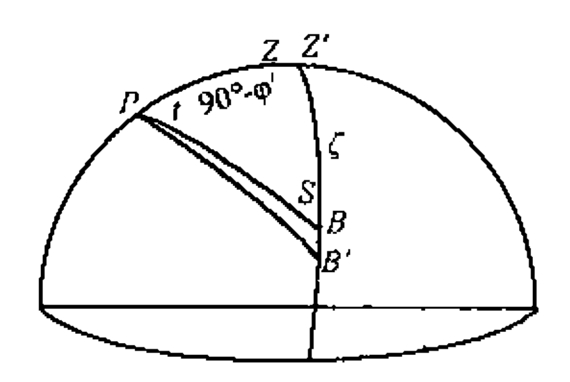


图 9－4　总视差与赤经赤纬视差

赤道坐标的视差可由总视差（高下差）推出。在图 9－4 中，设 S 为球面三角形 $PZ'B$ 的星位角。B 为天体的地心方向在天球的交点，B' 为观测者的视方向。BB' 为总视差（高下差）P。于是有：

$$\Delta\alpha\cos\delta=-P\sin S,\Delta\delta=-P\cos S$$

由弧三角形 PBZ' 有：

$$\sin\zeta\sin S=\cos\varphi'\sin t$$

$$\sin\zeta\cos S=\cos\delta\sin\varphi'-\sin\delta\cos\varphi'\cos t$$

由此得出：

$$\Delta\alpha=-\rho\cos\varphi' P_0\sin t\sec\delta$$

$$\Delta\delta=-\rho\sin\varphi' P_0\cos\delta+\rho\cos\varphi' P_0\sin\delta\cos t$$

其中

$$\rho\cos\varphi'=C\cos\varphi,\rho\sin\varphi'=S_1\sin\varphi$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{1-(2\varepsilon-\varepsilon^2)\sin^2\varphi}},S_1=(1-\varepsilon^2)C$$

将 C 展开到二阶项，最后得出：

$$C=1.0016871-0.0016892\cos2\varphi+0.0000021\cos4\varphi$$

$$S_1=0.9949530-0.0016778\cos2\varphi+0.0000021\cos4\varphi$$

$$\rho=0.9983200+0.0016835\cos2\varphi-0.0000035\cos4\varphi$$

以上是根据 $a=6378388$ 米，$b=6356909$ 米，$\varepsilon=\frac{1}{297.0}$分析得出的。按上引的 1967 年国际参考椭球数据，可由下式得出：

$$C=1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{16}\varepsilon^2-\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cos2\varphi+\frac{3}{16}\varepsilon^2\cos4\varphi+\cdots$$

$$S_1=1-\frac{3\varepsilon}{2}+\frac{5}{16}\varepsilon^2-\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cos2\varphi+\frac{3}{16}\varepsilon^2\cos4\varphi+\cdots$$

$$\rho=1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{5}{16}\varepsilon^2+\frac{\varepsilon}{2}\cos2\varphi-\frac{5}{16}\varepsilon^2\cos4\varphi+\cdots$$

也可简单由下式求得 $\rho\cos\varphi'$、$\rho\sin\varphi'$：

$$\mathrm{tg}\varphi'=(1-\varepsilon)\mathrm{tg}\varphi_1,\ \mathrm{tg}\varphi_1=(1-\varepsilon)\mathrm{tg}\varphi$$

$$\rho\cos\varphi'=\cos\varphi_1,\ \rho\sin\varphi'=(1-\varepsilon)\sin\varphi_1$$

由 $\Delta\alpha$、$\Delta\delta$ 的算式可知，当天体上中天时，视差不影响天体的赤经。知道了 $\Delta\alpha$、$\Delta\delta$，经过简单换算就可将地心坐标 α、δ 化为地面坐标，或反过来，由地面坐标得出地心坐标。

类似地我们可推出黄道坐标的视差 $\Delta\lambda$、ΔB 和白道坐标的视差 Δl、Δb。中历往往将地平纬度（高度）上的总视差称作高下差，将月亮黄道、白道圈上的视差 $\Delta\lambda$、Δl 称为东西差；黄经圈、白经圈上的视差 ΔB、Δb 叫作南北差。因月亮总在白道上运行而近黄道，交食又总发生在交点附近，白道东西差不像赤道 $\Delta\alpha$ 需带 $\cos\delta$ 这个因子。

因 P 很小，由图 9－3 可近似得出：

$$OA\cos\zeta=\Delta-\Delta'$$

$OA=\rho a$，所以，两端以 Δ 来除，得：

$$\frac{\Delta'-\Delta}{\Delta}=-\rho\frac{a}{\Delta}\cos\zeta=-\rho P_0\cos\zeta$$

设天体地面视半径为 S'，地心视半径为 S，因为近似地有天体视半径与距离成反比关系，即

$$S=\frac{r}{\Delta},S'=\frac{r}{\Delta'},S\Delta=S'\Delta'$$

所以

$$\frac{S'-S}{S}=\rho P_0\cos\zeta$$

对于行星，这个关系毫无作用。对于太阳，设

$$S=900'',\rho P_0=8''.8=0.000043$$

所以

$$S'-S=0''.04\cos\zeta$$

太阳在天顶时，其地面视直径比其地心视直径（在地平上观测的）大不到 0″.1。而月亮情况下，在日月食时，平均赤道地平视差取作 3440″＝0.0167 弧度；月亮视半径约当 $0.2723P_0$，近 937″，于是有：

$$\frac{S'-S}{S}=0.0167\cos\zeta$$



$$S'-S=15''.65\cos\zeta$$

当月亮在天顶时，地面视半径要比地平观测的地心视半径大 15″.65，增大约1/60。这个性质对日全食、日环食的讨论很重要。月在天顶时 $\zeta=0$。

日食计算中，先计算合朔时日月的天顶距、求出高下差，再分解为东西差、南北差。根据对日月两心实相距的影响作用，判断食的有无，并改正见食时刻和食分。因视差使天体位置降低，对月球作用尤为显著。此外，日月在不同的轨道位置引起的视半径的变化，对见食情况也有影响。

第六节 视差对日食的影响和计算

日食时，不同地区的观测者看到的日月相对位置大有不同。食的时刻和见食情况也很相异。故需按经纬度一一计算。用视差方法计算日食的原理及具体做法简述如下。

一、推算需要的日食要素

日月赤经合时的日、月赤经	a	A
日、月赤经的每时变量	a'	A'
日、月赤纬	d	D
日、月赤纬的每时变量	d'	D'
日、月赤道地平视差	π	Π
日、月视半径	s	S

日用小写字母、月用大写字母表示。

二、计算月亮的赤经赤纬视差

由赤经、赤纬视差算式可知，当 φ、δ 一定时，周日视差主要由时角 t 来决定。太阳的时角就是视太阳时，即

太阳时角＝所给定时间－太阳南中时刻

而月亮的时角，需要加上月亮运动的改正。

（一）求任意时刻月亮的时角 t

由计算或查天文年历得出该日月亮南中时刻。令

$$\tau=\text{所给定时刻}-\text{月南中时刻}$$

则

$$t=\tau^{\circ}-\frac{A'}{4}\tau^{h}$$

A'为用时秒表示的月亮赤经的每时变化。如取

$$\tau=30^{\circ}(2^{h})$$

$$\frac{A'}{4}\tau^{h}=A'(\text{时秒})\times 2^{h}(\tau^{h})/4=\frac{A'}{4}\tau^{h}(\text{角分})$$

化为度，则有

$$t^{\circ}=\tau^{\circ}(30^{\circ})-\frac{A'}{4}\tau^{h}(\text{度})$$

如取 $A'=153^{s}.43$，则

$$\frac{A'}{4}\tau^{h}(\text{角分})=153^{s}.43\times 2^{h}(\tau\text{时})/4=76'.715=1^{\circ}.278583$$

$$t^{\circ}=30^{\circ}-1^{\circ}.2786=28^{\circ}.7214=28^{\circ}43'$$

为计算上方便，τ 可取 5°、10°、15°、20°等整倍数角度。记住，太阳时角即地方视时，月亮时角需按此计算。

（二）求与各时角对应的月的视差值

赤道坐标的视差可由总视差（高下差）推出：

$$\Delta\alpha\cos\delta=-P\sin S_1,\Delta\delta=-P\cos S_1$$

S_1 为星位角。在以地心天顶 z'（与地心纬度 φ'对应）、天体的地心方向在天球的交点 B 和北天极 P 组成的球面三角形中，与$\widehat{Pz'}$（即 $90^{\circ}-\varphi'$）所对之角，即星位角 S_1。而

$$\Delta\alpha=-\rho\cos\varphi'P_0\sin t\sec\delta$$

$$\Delta\delta=-\rho\sin\varphi'P_0\cos\delta+\rho\cos\varphi'P_0\sin\delta\cos t$$

地面坐标表为 α'、δ'，地心坐标 α、δ。计算视差影响月亮赤道坐标的准确公式为（s 是恒星时）：

$$\mathrm{tg}(\alpha'-\alpha)=\frac{-\rho\cos\varphi'\sin P_0\sec\delta\sin(s-\alpha)}{1-\rho\cos\varphi'\sin P_0\sec\delta\cos(s-\alpha)}$$

$$\mathrm{tg}(\delta'-\delta)=\frac{-\rho\beta\sin P_0\sin(r-\delta)}{1-\rho\beta\sin P_0\cos(r-\delta)}$$

其中

$$\beta\sin r=\sin\varphi'$$

$$\beta\cos r=\cos\varphi'\frac{\cos\left[s-\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}$$

由此得出月亮的赤经、赤纬视差值 $\Delta\alpha\cos\delta$ 和 $\Delta\delta$。



三、求观测者地面日月赤经相合时刻

日食根数给出地心赤经合的时刻。推出了地面坐标，就可以采用与求地心合同样的内插方法，计算得出观测者所见日月赤经合的时刻。具体做时，除内插算法外，还可采用作图法。

(一)计算或用作图法求(A')、(a')、(A)

$(A')=A'\cos D$ 为一小时后月亮赤经方向的变量。$(a')=a'\cos d$ 为一小时后太阳赤经变量。$(A)=(A')-(a')=A'\cos D-a'\cos d$ 为地心赤经合一小时后月日赤经差。

(二)作月亮相对太阳在赤经方向的位置图

在纸上作 EL 横线，其上标注时刻，与它垂直作纵直线，其上用赤经分秒标示。EL 上端为赤经增加方向，下端反之。在 EL 上点出赤经地心合的时间 H 点，通过 H 作 OA 直线。作法是，在地心合后 $1^{h}C$ 处，向上作一垂线 CD，使其长等于上面得出的(A)——日月赤经差的数值。OA 即通过 D 与 H 的直线。直线 AO 上各点与 EL 的垂直距离表示在与时圈成直角，即赤经方向，月亮相对于太阳的位置。参见图 9－5。

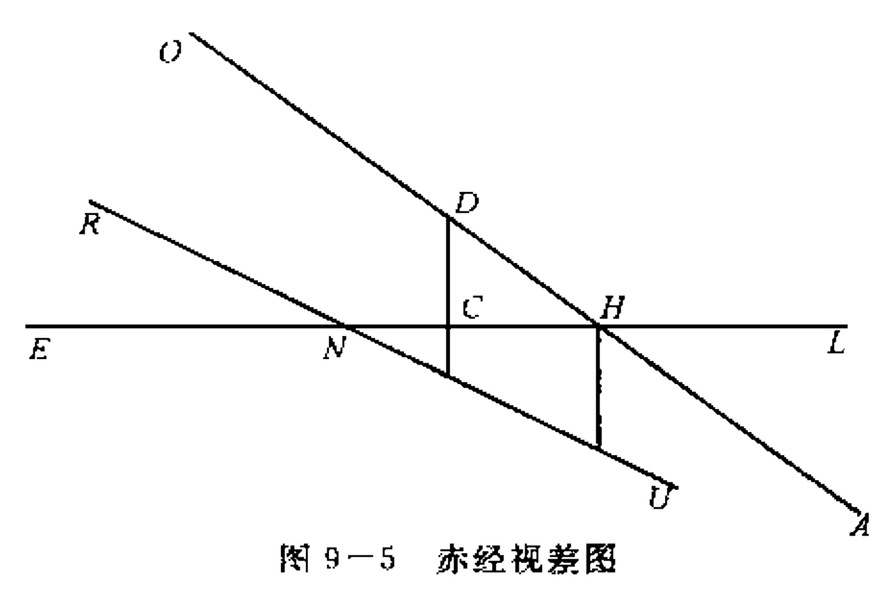


图 9－5 赤经视差图

(三)作赤经视差线

在 EL 线上各时刻点作垂线与 AO 相交。自交点选取长度等于与该时所当 τ 度对应的赤经视差值 $\Delta\alpha\cos\delta(p)$ 的各线段。线段方向这样确定，如 τ 在月南中以前(即约当食在上午发生)，垂线作于 AO 上方；南中以后作于下方。

(四)求观测地赤经合时刻

将赤经视差各端点连成 RU 平滑曲线。曲线对 EL 的斜率一般较 AO 为小，曲线 RU 与直线 EL 相交之处，即所要求的观测地所见日月赤经相合的时刻。

曲线 RU 上各点与 EL 的垂直距离，表示月亮相对于太阳在赤经方向的距角弧长。

四、求观测地地面赤经合时刻之日月间距离

(一)作赤纬视差图

作 EL 横直线，线上标注时刻。取 H 点当地心赤经合的时刻值。EL 直线上方表示赤纬增加、下侧为减少的方向。在 EL 线 H 点后 1^h 的 D 处，向下作一垂线，其长等于 $D'-d'$，端点为 M。通过 H 和 M 点作直线 HO。参见图 9－6。

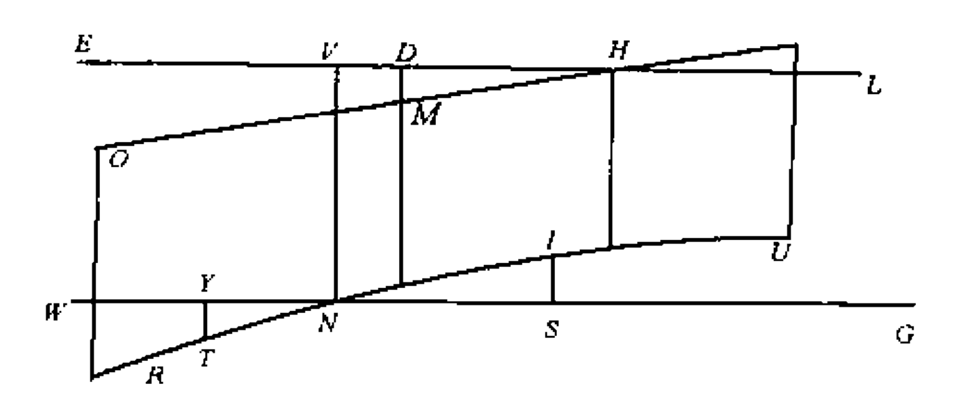


图 9－6　赤纬视差图

(二)作赤纬视差线

在 EL 线上，以等时距(例如取 20^m 为间隔)各点作垂线，与 OH 相交。以各交点为始，在上述各垂线上选取长度等于与该 τ 对应的赤纬视差 $\Delta\delta(q)$ 值的线段。线段端点方向这样确定：观测者的地理纬度如比月的赤纬北，端点取 OH 线的下方；纬度若较月亮赤纬南，则取上方。中国、日本等国在北半球，纬度常比月的赤纬大(即北)，故端点常在 HO 线的下方。

(三)求观测地赤经合时日月间距离

将以上赤纬视差线段得出的各端点连成平滑曲线 RU。在 EL 线上，找出观测者所见日月赤经相合的时刻点 V。过 V 作垂线交于 RU 曲线上的 N 点。VN 线段的长度，即为所求观测地赤经合时日月相距的角度变量。过 N 点作与 EL 平行的 WG 直线。



五、计算食甚、食分和初亏、复圆时刻

(一)作太阳距月图

在纸上,以 E 为中心,s 为半径作代表太阳的圆。在 E 的上方纵线上选取一点 L,使 EL 的长度与 $D-d$ 相等,月的赤纬大于太阳赤纬,即月在太阳北侧,取 L 在 E 的上方;反之取下方。在直线 EL 上,取一点 H,使 HL 长度等于前面得出的 NV(N 在 V 下,取 H 在 L 下)。H 点即观测者所见赤经合时月中心的位置。参见图 9—7。

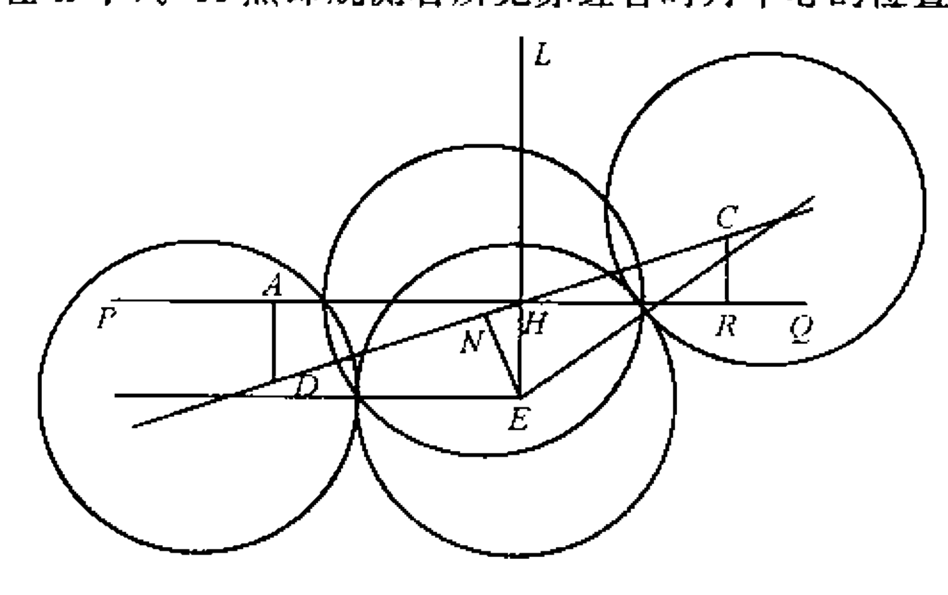


图 9—7 视差日食图解

(二)过 *H* 点作与 *LE* 垂直的 *PQ* 线

其上诸点(如 A 点)与 H 点的距离与赤经视差图(图 9—5)RU 曲线上对应诸点与直线 EL 各垂线长度相等。而用对应的时刻表示。诸点分布在月南中前后稠密,距离远时疏散。也就是说 PQ 线上等时距各点并不等长。等时段在南中附近短,距离越远越长。

(三)在 *PQ* 线上各点作垂线

其长度由赤纬视差曲线 RU 上诸点与 WG 直线的垂直距离相等。例如,AD、CR,它们长度分别与赤纬视差图 YT、IS 长度相等,但上下方向正好相反。即与赤纬视差图上 RU 曲线在 WG 直线的上下相反。把如此得到的各垂线端点,连成 CHD 平滑曲线。此即天球上相对于太阳、月亮移动的路径。曲线上各端点的位置可由 PQ 线上读出时间。

(四)初亏、复圆时刻

由 E 点作 CHD 曲线的法线,与曲线交于 N 点。取 N 为中心,以 S 作半径画

圆，它与太阳圆相交的两点，即为所求日月相切时的中心位置（初亏、复圆点）。它的时刻即初亏、复圆日食始终。以 E 为中心，以半径 $S+s$ 作圆。此圆与 CHD 曲线相交。以此两交点为心，S 为半径作两个圆。将 E 和这两个圆的中心连接，与 CHD 曲线（几为直线）成近似等腰三角形。EN 为其垂足。直线 EL 与上述两中心连线（等腰两边）之夹角，以反时针方向量度，得初亏复圆的北极方向角。

（五）食甚时刻、食分

E 作 CHD 垂线得垂足 N，N 相应的时刻即食甚。$\angle HEN$ 为食甚方向角。由 E、N 为中心所作的 s、S 为半径的圆相交重合部分占日面的比例即为食分。

作图法得到的各地日食见食情况，食分可准确到 0.01，初亏、食甚、复圆时刻误差不超过分。图解法能得出这么精密的结果是意想不到的。为节省篇幅，具体算例略。

第七节　步轨漏术

大衍历晷漏表给出二十四定气交气时刻的陟降率、消息衰、阳城日晷、漏刻、黄道去极度、距中星度等六项数值。宣明历给出二十四定气的屈伸数、黄道去极度、阳城日晷、夜半定漏、距中星度等五项数据。后四种含义相同，大衍、宣明两历都是指交气初日的数值，而其值稍有不同。宣明历术文说，"爻统曰中统，象积曰刻法，消息曰屈伸。"因此，宣明历晷漏表中的屈伸数是与大衍历表中的消息衰相当的。

各历多作晷漏。大衍作轨漏。《大衍历议》说，"观晷影之进退，知轨道之升降，轨与晷名舛而义合，其差则水漏之所从也。总命曰轨漏。中晷长短谓之陟降。景长则昼短，景短则昼长。积其陟降谓之消息。"可见晷指影长、轨乃日轨。晷漏即轨漏，研究的是日影长短、轨道高低与时间（漏刻）之间的关系。

大衍历对雨水、清明、处暑、寒露 4 气的陟降率做了特殊安排。其余 20 气，在气内每日的陟降率都是相同的。前气陟降率与该气定气日数相乘，加前气消息衰，就得次气消息衰。即

各气消息衰＝前气陟降率×该定气日数＋前气消息衰

依定气日数，每天都以陟降率陟减、降加其气条下的消息衰，满百进衰，得每日消息定衰。如气内第 t 日的消息定衰为：

第 t 日消息定衰＝其气消息衰±$(t-1)$×陟降率　　　（陟减，降加）

根据每日消息定衰，就可求出每日的漏刻、晷影长度、黄道去极度及距中星度。每日消息定衰是一个等差级数（一阶算术级数），其首项 a 即各气消息衰值，公差 d 即陟降率，交气后第 t 日（交气日不计入）的消息定衰，即为级数的第 t 项 $z=a+(t$



$-1)d$，其和 S_t 为：

$$S_t=\sum_{1}^{t}\text{消息定衰}=t\times\text{消息衰}+\frac{t(t-1)}{2}\times\text{朓降率}$$

$$\text{气内}\ t\ \text{日夜半漏定数}=\text{气初夜半漏}\pm\frac{1}{480}\left[t\ \text{消息衰}\pm\frac{1}{2}t(t-1)\text{朓降率}\right]$$

息减、消加，朓减、降加。朓降率满百进位为消息衰整数。

$$\text{气内}\ t\ \text{日黄道去极度}=\text{气初去极度}\pm\left[t\ \text{消息衰}\pm\frac{t}{2}(t-1)\text{朓降率}\right]\qquad(\text{息减、消加})$$

$$\text{气内}\ t\ \text{日距中星度}=\text{气初距中星度}\pm\frac{12386}{16277}\times\left[t\ \text{消息衰}\pm\frac{1}{2}t(t-1)\text{朓降率}\right]\qquad(\text{息加、消减})$$

以冬至气为例，大衍历气内各日消息定衰、夜半漏、去极度及距中度的数值如表 9－2 所示。

表 9－2　大衍历冬至气内步轨漏各值

日序	消息定衰	朓降率	Σ定衰	夜半漏刻分	去极度度分	$\frac{12386}{16277}$×Σ定衰	距中度度分
初日	－0.64	0.78		27 230	115 20		82 26
1 日	－1.42	0.78	0.64	27 229	115 19	0.487	82 26
2 日	－2.20	0.78	2.06	27 228	115 18	1.568	82 28
3 日	－2.98	0.78	4.26	27 226	115 16	3.242	82 29
4 日	－3.76	0.78	7.24	27 223	115 13	5.509	82 32
5 日	－4.54	0.78	11.00	27 219	115 09	8.370	82 34
6 日	－5.32	0.78	15.54	27 214	115 04	11.825	82 38
7 日	－6.10	0.78	20.86	27 209	114 99	15.873	82 42
8 日	－6.88	0.78	26.96	27 203	114 93	20.515	82 47
9 日	－7.66	0.78	33.84	27 196	114 86	25.751	82 52
10 日	－8.44	0.78	41.50	27 189	114 78	31.579	82 58
11 日	－9.22	0.78	49.94	27 180	114 70	38.002	82 64
12 日	－10.00	0.78	59.16	27 171	114 61	45.018	82 71
13 日	－10.78	0.78	69.16	27 161	114 51	52.627	82 79
14 日	－11.56	0.3463	79.94	27 150	114 40	60.830	82 87
14.444 日	－11.91		84.98	27 145	114 35	64.666	82 91

宣明历步晷漏术记载非常简单，除中统、辰刻、昏明刻、刻法、距极度和北极出地度六项常数及晷漏表外，术文仅约200字。《新唐书·历志》说，宣明历“其气朔、发敛、日躔、月离皆因大衍旧术；晷漏、交会则稍增损之；更立新数，以步五星”。由晷漏表可看出，宣明历日晷、定漏、去极度及距中度数值确与大衍诸数稍有增损。那么，其术是不是一样的呢？

根据“消息曰屈伸”，把宣明历屈伸数视如大衍历消息衰，宣明历没有给出陟降率，按大衍轨漏术可以求出各气陟降率，如冬至为11.03，小寒为9.58，大寒为8.13，立春为6.71，雨水为5.33，惊蛰为0，春分为5.23，清明为6.50，谷雨为7.74，立夏为8.92，小满为10.12，芒种为0。其值惊蛰前为降，春分后为陟，对应的屈伸数为屈。夏至后为伸段，屈伸数值及陟降率与冬至后一一对应并完全相同。由此，如大衍历，可以求出每日的屈伸定数（定衰）。但这样做了以后，根据宣明历术文得不到夜半漏、去极度和距中度分正确的数值。此外，大衍历雨水、清明、处暑、寒露四气内陟降率逐日不等。宣明历屈伸数与大衍消息衰并不相等。它又并未另外给出数据和处理方法。如惊蛰、白露气依大衍历方法所得陟降率为0，芒种、大雪情况类似。这四气的屈伸定数该如何计算。凡此种种，可以看出，宣明历步晷漏术与大衍历是有所不同的。

宣明历将大衍历采用等差级数求和计算气内各日的夜半定漏、去极度和距中度的方法，简化为线性内插。各气屈伸数并非各气初日之值，而可理解为本气内插线段的斜率。我们依大衍陟降率的术语来介绍宣明历计算每日定衰及夜半定漏、黄道去极度及距中星度的方法。

以各定气日数除该气屈伸数得陟降率，以它作为等差级数的公差 d，首项 $a=0$。这样，各气内每日的屈伸定衰组成一首项 a 为0，公差 d 为陟降率（＝该气屈伸数/定气长度）的一个等差级数。气内第 t 日（交气日不计入）的屈伸定衰（定数）为 t 与陟降率（公差 d）的乘积。求气内每日去极度分、夜半定漏、距中度分的算式为：

$$t\text{日去极度分}=\text{气初去极度分}\pm\frac{21}{25}\times t\text{日屈伸定衰}$$

$$=\text{气初去极度分}\pm\frac{21}{25}\times t\times\text{陟降率}\qquad\text{（屈减，伸加）}$$

$$t\text{日夜半定漏}=\text{气初夜半漏}\pm\frac{5}{24}\times t\times\text{陟降率}\qquad\text{（屈减，伸加）}$$

此式夜半漏刻分为百进制。

$$t\text{日距中星度}=\text{气初距中星度}\pm\frac{12386}{16277}\times\frac{21}{25}\times t\times\text{陟降率}\qquad\text{（屈加，伸减）}$$

宣明历黄道去极度、夜半定漏、距中星度皆以刻法84为分母，上述去极度、距中星度算式中第二项得数即以刻法为度母。故与气初去极度分、气初距中星度可



以直接相加。夜半定漏算式中，$\frac{5}{24}\times t\times$陟降率得数为百进制，要化为以刻法 84 为分母，需乘以$\frac{21}{25}(=0.84)$，即

$$t\text{日夜半定漏}=\text{气初夜半漏}\pm\frac{5}{24}\times\frac{21}{25}\times t\times\text{陟降率}\qquad(\text{屈减,伸加})$$

此式气初夜半漏的刻为 84 分。

以上算式中的陟降率数值皆为以定气长度除该气屈伸数之商。$t\times$陟降数即 t 日定衰。

宣明历用简单线性内插的方法代替大衍历采用的等差级数求和的方法，既方便直观，又避免了雨水、清明、处暑、寒露四气的繁琐计算。在宣明历术文中直接说将每日定衰 5 乘之，24 除之，曰漏差。屈减伸加气初夜半漏，得每日夜半定漏。同样，每日去极度分、距中星度都是以该日屈伸定衰乘以某个常数，加减气初去极度分、距中星度分而直接得出。不像大衍历还需要一个累加累减的求和过程。现以冬至、小寒、大寒为例，将宣明历计算气内每日屈伸定衰、夜半漏、去极度及距中星度的结果列于表 9—3、表 9—4 中。

表 9—3 宣明历冬至气屈伸定衰、夜半漏、去极度、距中度值

冬至日序	屈伸定衰	定衰$\times\frac{21}{25}$	去极度度分	定衰$\times\frac{5}{24}\times\frac{21}{25}$	定漏刻分	定衰$\times\frac{21}{25}\times\frac{12386}{16277}$	距中度度分
初日	0	0	115 17	0	27 40	0	82 22
1 日	4.48	3.76	115 13	0.78	27 39.2	2.9	82 25
2 日	8.96	7.53	115 9	1.56	27 38.4	5.7	82 28
3 日	13.44	11.29	115 6	2.34	27 37.6	8.6	82 31
4 日	17.93	15.05	115 2	3.12	27 36.9	11.4	82 33
5 日	22.41	18.82	114 82	3.91	27 36.1	14.3	82 36
6 日	26.89	22.58	114 78	4.69	27 35.3	17.2	82 39
7 日	31.37	26.34	114 75	5.47	27 34.5	20.1	82 42
8 日	35.85	30.11	114 71	6.25	27 33.7	22.9	82 45
9 日	40.33	33.87	114 67	7.03	27 33.0	25.8	82 48
10 日	44.82	37.63	114 63	7.81	27 32.2	28.6	82 51
11 日	49.30	41.40	114 60	8.59	27 31.4	31.5	82 54
12 日	53.78	45.16	114 56	9.37	27 30.6	34.4	82 56
13 日	58.26	48.92	114 52	10.16	27 29.8	37.2	82 59
14 日	62.74	52.68	114 48	10.94	27 29.1	40.1	82 62
14.504 日	65.00	54.60	114 46	11.37	27 29.0	41.5	82 64

表 9—4 宣明历小寒大寒气屈伸定衰、去极度、定漏、距中度各值

		屈伸定衰	定衰 $\times\frac{21}{25}$	去极度度分	定衰 $\times\frac{21}{25}\times\frac{5}{24}$	定漏刻分	定衰 $\times\frac{21}{25}\times\frac{12386}{16277}$	距中度度分
小寒日序	初日	0	0	114 46	0	27 29	0	82 64
	1 日	15.39	12.93	114 33	2.7	27 26.3	9.8	82 74
	2 日	30.77	25.86	114 20	5.4	27 23.6	19.7	83
	3 日	46.16	38.78	114 7	8.1	27 20.9	29.6	83 10
	4 日	61.55	51.71	113 78	10.8	27 18.2	39.3	83 19
	5 日	76.93	64.64	113 65	13.5	27 15.5	49.2	83 29
	6 日	92.32	77.57	113 52	16.2	27 12.8	59.0	83 39
	7 日	107.71	90.49	113 40	18.9	27 10.1	68.9	83 49
	8 日	123.09	103.42	113 27	21.6	27 7.4	78.7	83 59
	9 日	138.48	116.35	113 14	24.3	27 4.7	88.5	83 69
	10 日	153.87	129.27	113 1	27.0	27 2	98.4	83 78
	11 日	169.25	142.20	112 72	29.7	26 83.3	108.2	84 4
	12 日	184.64	155.13	112 59	32.4	26 80.6	118.0	84 14
	13 日	200.03	168.05	112 46	35.1	26 77.9	127.9	84 24
	14 日	215.41	180.99	112 33	37.7	26 75.3	137.7	84 34
	4.623 日	225.00	189.00	112 25	39.0	26 74	143.8	84 40
大寒日序	初日	0	0	112 25	0	26 74	0	84 40
	1 日	24.76	20.80	112 4	4.3	26 69.7	15.8	84 56
	2 日	49.52	41.60	111 67	8.7	26 65.3	31.7	84 72
	3 日	74.28	62.40	111 47	13.0	26 61	47.4	85 3
	4 日	99.04	83.19	111 26	17.3	26 56.7	63.3	86 19
	5 日	123.80	103.99	111 5	21.7	26 52.3	79.1	85 35
	6 日	148.56	124.79	110 68	26.0	26 48	95.0	85 51
	7 日	173.31	145.59	110 47	30.3	26 43.7	110.8	85 67
	8 日	198.07	166.39	110 27	34.7	26 39.3	126.6	85 83
	9 日	222.83	187.19	110 6	39.0	26 35	142.4	86 14
	10 日	247.59	208.00	109 69	43.3	26 30.7	158.3	86 30
	11 日	272.35	228.78	109 48	47.7	26 26.3	174.1	86 46
	12 日	297.11	249.58	109 27	52.0	26 22	189.9	86 62
	13 日	321.87	270.38	109 7	56.3	26 17.7	205.7	86 78
	14 日	346.63	291.18	108 70	60.7	26 13.3	221.6	87 10
	14.742 日	365.00	306.60	108 55	63.9	26 10.1	233.3	87 21



晷影长短、夜漏大小、距中星度分全由太阳赤纬或去极度决定。距中星度指太阳在昏时距午的度分。夜半漏刻为夜漏的半数。所以

全夜漏刻＝2×夜半漏

昼刻＝100 刻－全夜漏刻

＝100 刻－2×夜半漏

大衍历术说，各倍夜半漏为夜刻。以减百刻，余为昼刻。上面算式就是依此得出的。大衍、宣明皆规定昏明各二刻半，共五刻。将昏明五刻从昼刻内减去，得数为见刻。即从日出到日没的刻数。在夜刻内加进昏明 5 刻为没刻，是从日没到日出的刻数。即有：

见刻（从日出到日没）＝昼刻－5 刻（昏明各 2.5 刻）

没刻（从日没到日出）＝夜刻＋5 刻（昏明 5 刻）

从子夜（夜半）到日出为半没刻，半没刻加半时辰，为从子初算起的日出辰刻。见刻加日出辰刻得日入辰刻。以 5 除夜刻，得每更差刻，再以 5 除，为每筹（点）差刻。以昏刻（2.5 刻）加日入辰刻，得甲夜初刻。再以更、筹差加之得五夜更、筹时辰。

日出辰刻（自子初算起）＝半没刻＋半辰（$4\frac{16}{84}$刻）

日没辰刻＝日出辰刻＋见刻

每更差刻＝夜刻/5

每筹差刻＝夜刻/25

甲夜（初更）初刻＝日入辰刻＋昏刻（$2\frac{42}{48}$刻）

距中星度为太阳在昏刻时距午（子午线）角度。倍距中星度以减周天，半之，为距子度。即昏刻太阳距子（下中天）的度数。距中度加距子度应为半周天度。即

距子度＝（周天度 365.2564－2×距中度）

＝半周天度－距中度

日没时太阳距午度即为太阳出没的时角，化为时刻应为半见刻，即太阳自午到没所行之度。有：

$$\text{日没时太阳距午星度}=\text{周天度}\times\frac{\text{半见刻}}{100}$$

它的数值化为 360°制，应与下式所得时角 t 相等：

$$\cos t=-\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\delta$$

ϕ 为观测地的地理纬度，宣明历取作 34.475 度，化为 360°制为 34°。δ 为观测时太阳的赤纬。以冬至日为例。冬至时太阳赤纬约为－23°.5，代入上式，不考虑蒙气

差和视差影响，得时角 t 为 72°.96。而由宣明历周天度 365.2564 度和半见刻 20.02 刻得出的结果化为 360°制为 72°.08。根据同样道理，可知太阳自午至昏所行之度为：

$$距中星度（昏刻太阳距午度）=周天度\times\frac{半昼刻}{100}$$

仍以冬至为例，得出冬至太阳昏刻距午度为：

$$冬至太阳距中星度=365.2564\times\frac{22\frac{44}{84}}{100}$$

$$=82.27=82\frac{22.6}{84}度$$

由每日的距中星度和距子度，根据其日太阳赤道宿度，可得出昏、晓中星的赤道宿度。即

昏中星（赤道宿度）=其日赤道日度+距中度

旦中星（赤道宿度）=昏中星赤道宿度+2×距子度

昏中星即为甲夜初刻（初更初点）中星，加每更差度，得五夜（五更）中星。

赤道、黄道宿度是沿着赤道、黄道自西向东度量的，即按着与周日运动相反的方向计量。所以知道了太阳昏刻的赤道宿度加上距中星度即得昏中星赤道宿度。旦（晓）中星指晨时（明刻）南中星辰（在上中天）的赤道宿度。距子度是昏时太阳离下中天的度数。子是视太阳子夜所处的方位。由昏至明太阳共走过的角度是 2 乘距子度，所以旦中星赤道宿度为：

旦中星（赤道宿度）=其日赤道日度+距中度+2×距子度

=昏中星赤道宿度+2×距中度

=其日赤道日度+距中度+半周天度

天文学上称太阳中心在地平下 6°的时刻为昏、明。日出、日入为太阳上下边缘与地平相切的时刻。考虑到太阳半径及蒙气差，所以日出、日入时太阳天顶距取作 90°50′。一般昏、明距日出、日没相当于太阳天顶距从 90°50′到 96°，约需时 25～30 分钟。大致当百刻制的两刻。大衍、宣明等历取昏明各 2.5 刻，约当太阳中心在地平下 6°.5～7°。此时太阳的天顶距约为 96°.5。不考虑大气折射和视差影响（对于太阳视差可不计），距中星度（即时角 t）可由下式算出：

$$\cos z=\sin\phi\sin\delta+\cos\phi\cos\delta\cos t$$

其中 z 为太阳的天顶距，ϕ 为观测地的纬度，δ 为太阳赤纬。按此式也可根据由晷漏表得出的距中星度 t，求出与大衍历、宣明历昏明时刻相应的太阳在地平下的高度。



第八节 步交会术及日食三差

宣明历步交会术也基本沿用大衍旧术，唯法数稍有增损。它所创设的时气刻三差之法，尤为前历所未有。计算日月带食出没的方法也系首创，而为后世沿用。

大衍历与宣明历步交会术法数名称略有不同，其对应关系与数值如下（括号内为大衍名称）：

终率（终数）228582.6512：交点月日分。

终日（交终）$27\frac{1782.6512}{8400}$日：交点月日数。

中日（大衍同）$13\frac{5091.3256}{8400}$日：为半交点月日数。

交朔日（朔差日）$2\frac{2674.3488}{8400}$日：朔望月－交点月。

交望日（望数日）$14\frac{6428.5}{8400}$日：$\frac{1}{2}$朔望月。

前准日（交限日）$12\frac{3754.1512}{8400}$日：交望日－交朔日。

后准日（望差日）$1\frac{1377.1744}{8400}$日：$\frac{1}{2}$交朔日。

阴历食限 6060。

阴历定法 404。

阳历食限 2640。

阳历定法 176。

交率 202。

交数 2573。

去交度乘数 11。

除数 7303。

食限、交率、交数及去交度与大衍历名同义同。

步交会术前面的计算程序，宣明历基本沿袭大衍历方法，仅所用数值不一而已。

1. 推天正经朔及各朔望入交泛日及余

天正经朔加时入交泛日及余

$$=[(\text{通积分}-\text{天正闰余})/\text{交点月}]_R$$

式中的通积分为上元至所求年的积年与章岁乘积；天正闰余为冬至的月龄，即天正

冬至距其前经朔的日数;朔积分即通积分与天正闰余分的差值。R 表示求余计算。

天正经朔入交泛日加交朔得次朔、加交望日得望日入交泛日及余。加得之数如大于终日(交点月),则去之。

2. 求朔望入交常日及入交定日

与大衍历相同,求出入交泛日后按以下方法得出入交常日和入交定日:

入交常日＝入交泛日±入气朓朒

$$\text{入交定日}=\text{入交常日}\pm\frac{\text{交率}}{\text{交数}}\times\text{入转朓朒}$$

$$=\text{入交泛日}\pm\text{入气朓朒}\pm\frac{\text{交率}}{\text{交数}}\times\text{入转朓朒}\qquad(\text{朓减,朒加})$$

这个算法大衍历步交会术中已有。对此算式有时不易直接理解,现用天文方法稍做分析。

用 T、T_m 分别表示定朔望、平朔望的时刻。以 λ、λ'、N 表示太阳、月亮和黄白道交点的真黄经。λ_m、λ'_m、N_m 表示平朔望时它们相应的值。日、月的平黄经用 l、l' 表示。则有:

$$\Delta l=\lambda-l,\Delta l'=\lambda'-l'$$

真合朔时,日月同经,它们与交点的角距(黄经差)为:

$$[\lambda-N]_T=(\lambda_m-N_m)+\left[\frac{\mathrm{d}(\lambda-N)}{\mathrm{d}t}\right]_m(T-T_m)$$

$$=\lambda_m-N_m+\left[\frac{\mathrm{d}(\lambda-N)}{\mathrm{d}(\lambda'-\lambda)}\cdot\frac{\mathrm{d}(\lambda'-\lambda)}{\mathrm{d}t}\right]_m\times(T-T_m)$$

$T-T_m$ 为实朔与平朔的时间差 ΔT。前面在介绍由平朔计算定朔时曾指出,当略去小量$\frac{\mathrm{d}\Delta l'}{\mathrm{d}t}$、$\frac{\mathrm{d}\Delta l}{\mathrm{d}t}$时,有

$$\Delta T=\left[\frac{\Delta l}{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}}\right]_m-\left[\frac{\Delta l'}{\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}}\right]_m$$

的关系。那时我们所用的符号与现在稍有不同。上式中 D 为日月距角,其值可视作 $\lambda'-\lambda$。设日、月每日的平行度为 s、m,令交点向西逆行(年近 20°)每日的平行度为 k,结合上式则可得出:

$$\left[\frac{\mathrm{d}(\lambda-N)}{\mathrm{d}(\lambda'-\lambda)}\cdot\frac{\mathrm{d}(\lambda'-\lambda)}{\mathrm{d}t}\right]_m=\frac{s-k}{m-s}\left[\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\right]_m$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\right]_m=\frac{[\Delta l-\Delta l']_m}{\Delta T}$$

代入$[\lambda-N]_T$ 式内,稍做整理得出:

$$[\lambda-N]_T=(l-N_m)+(\lambda_m-l)+\frac{s-k}{m-s}[\Delta l-\Delta l']_m$$



以月平行度一日平行度$(m-s)$分别除上式两端得：

$$\frac{[\lambda-N]_T}{m-s}=\frac{l-N_m}{m-s}+\frac{\lambda_m-l}{m-s}+\frac{s-k}{m-s}\frac{[\Delta l-\Delta l']_m}{m-s}$$

左端即入交定日，右边第一项为入交泛日，与m相比s为小量。$\lambda_m-l=\Delta l$，为平朔时真太阳与平太阳黄经差，即太阳盈缩分。而$\frac{\Delta l}{m}$、$\frac{\Delta l'}{m}$分别为入气朓朒和入转朓朒值。故

$$\text{入交定日}=\text{入交泛日}\pm\text{入气朓朒}+\frac{s-k}{m-s}(\pm\text{入转朓朒}\pm\text{入气朓朒})$$

皆朓减、朒加。大衍历和宣明历在上式右端第三项中皆略去了入气朓朒。而交率/交数相当于$\frac{s-k}{m-s}$。大衍历交数4369，交率343；宣明历交数2573，交率202。大衍历、宣明历$\frac{\text{交率}}{\text{交数}}$值均约当0.0785。月亮交点做逆向（自东向西）运动，移动周期约6793日，平均每年移动19°21′，每日0°.052996，合中历0.053769度。因系反向运动，故$k=-0.053769$度。由此得出：

$$\frac{s-k}{m-s}=\frac{1.053769}{12.36875}=0.085196$$

与计算定朔的太阳、月亮改正类似，大衍历、宣明历选取的交率/交数，实际上相当于略去了分母中的太阳日平行项。即

$$\frac{\text{交率}}{\text{交数}}=\frac{s-k}{m}=\frac{1.05377}{13.36875}=0.0788$$

在皇极、大衍、宣明诸历中，皆是把交点月/食年＝交率/交数使用。交点月/食年＝0.0785。



3. 求月交入阴阳历

白道与黄道相交，交点称升、降交点。月亮通过升交点，从黄道南运行进入黄道北；再通过降交点，由黄道北而进入黄道南，重新回到升交点，完成一个交点月。月道在黄道北的半周称作阴历，月亮运行在黄道南的半周，叫作阳历。计算交食以月过降交点为起算点。朔望时入交定日如在中日以下（半个交点月），表示月过降交点后尚未到达升交点，月亮位于黄道之南，为入阳历。入交定日大于中日，说明月已过升交点，正在黄道北面的白道上运行，称月入阴历。这时，以中日减入交定日及余，所余为月入阴历的日及余。

4. 求四象六爻每度加减分及月去黄道定数

5. 求朔望夜半月行入阴阳、四象、六爻度数

4与5两条是计算月亮在白道上运行时离交点不同位置时月去黄道度数，及

推算朔望夜半时实月距升降交点白道度数的方法。大衍历中已做了详细介绍。宣明历除因统法 8400 与大衍历不同，计算月去黄道度化为分母 120 的方法及月行人阴阳四象历度数值稍异外，余皆循大衍历术。这两步主要是考查朔望时月亮所处位置及是否入限。

6. 求时差、食定余

宣明历以加、气、刻三差来修正去交分，以判定是否有食及食分大小。时差用来修正定朔小余，得到食定余作为日食的食甚时刻。规定：

$$时差=147/定朔日出入辰刻距午正刻数$$

定朔日出、日入辰刻由步晷漏术求得。

如定朔小余小于半法（半统法 4200，半日），即定朔时刻在上午时，

$$初率=半统法-定朔小余$$

$$\begin{aligned}食定余&=定朔小余-\frac{初率}{刻法}\times时差\\&=定朔小余-\frac{半法-小余}{刻法}\times\frac{147}{定朔日出辰距午正刻数}\\&=定朔小余-147\times\frac{定朔距午正刻数}{日出辰距午正刻数}\end{aligned}$$

如定朔小余在半法以上，即定朔在下午时，

$$末率=定朔小余-半统法$$

$$\begin{aligned}食定余&=定朔小余+\frac{2\times末率}{刻法}\times时差\\&=定朔小余+\frac{小余-半法}{刻法}\times\frac{2\times147}{日没辰距午正刻数}\\&=定朔小余+294\times\frac{定朔距午正刻数}{日没辰距午正刻数}\end{aligned}$$

因为$\frac{半法-小余}{刻法}$、$\frac{小余-半法}{刻法}$皆等于定朔距午正刻数，由食定余算式看出，定朔如在午正，则上两式右边第二项皆为 0。说明宣明历认为午正合朔日食的食甚时刻即合朔时刻。前面我们曾介绍过，除非日食确实正好发生在升降交点时才会如此。通常正午合朔时食甚与之仍有几分钟的差异，就是说，食甚时如太阳正好在当地子午线上南中，此时与实朔时刻仍不完全一致。由食定余式还可看出，当合朔时刻为日出、日没时，则食甚时刻日出时比合朔早 147/8400 日，约当 25.2 分钟；日没时食甚时刻要迟 50.4 分。

宣明历规定，以定望小余为食定余，即月食食甚与定望时刻同。前节已指出，除正在交点食外，食甚与实望时刻总有几到十几分之差。



7. 气差

宣明历称，凡日食有气差、有刻差、有加差。三差中气差的数值最大，为主要成分。气差在冬至、夏至其值2350，为极大。距二至前后，每一日减少26，至春分、秋分为0。$\frac{2350}{26}=90.385$日，与宣明历6个节气的长度$6\times15\frac{1835\frac{5}{8}}{8400}=91\frac{2613\frac{3}{4}}{8400}$大致相当。春分、秋分日气差当可减尽。

气差对入交定日、去交定分的改正作用为：

$$\text{定数}=\text{朔日气差}-\text{朔日气差}\times\frac{\text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}}$$

$$=\text{朔日气差}\times\frac{\text{日出没辰刻距午正刻数}-\text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}}$$

此定数，春分后阴历加之，阳历减之；秋分后，阴历减之，阳历加之。

8. 刻差

二至初日无刻差。自后每日益2.07分。自立春至立夏，起立秋迄立冬，皆以94.5分为刻差。自后每日损$2\frac{10}{150}$分(2.07分)，至冬至、夏至之初损尽。由此看出，刻差值虽小于气差，但其分布却与气差不同。春秋两季大，冬夏两季小。刻差对去交分的改正作用为：

$$\text{刻差定数}=\text{朔日刻差}\times\text{食甚距午正刻数}$$

冬至后食甚在午正前，夏至后食甚在午正后，阴历以减，阳历以加；冬至后食甚在午正后，夏至后食甚在午正前，阴历以加，阳历以减。

9. 加差

立冬初日后，每气增差17，至冬至初日，共三气，得51。此后每气损17，终于大寒末，亦为三气，损尽。食甚在午正后，则每刻累益其差，阴历以减，阳历以加。

根据宣明历术，气、刻、加三差皆为线性变化。刻差在立春至立夏、立秋至立冬各六气内恒为常数。故可得出每日的气、刻、加三差数值。三差的作用为修正视白道上的去交度分，以调整交食的有无和深浅。

加差仅作用于立冬至大寒冬季六气，涉及的范围较小，后世亦不沿用。历法上影响不大。

日食因月影而生。月亮距地甚近，交食时，月亮的赤道地平视差可以在53′.95～61′.45之间变化。其视角半径变化于14′.7～16′.7之间。对日食的类型、食相、食分、时刻等见食情况会起很大作用。前节我们专门讨论了这个问题并介绍了用视差计算日食的方法。视差对日食有影响，皇极历已有所涉及，大衍历计算中有进一步发展，直到宣明历给出的日食三差。视差对天体的坐标(赤经、赤纬、黄经、黄

纬等)有影响。现简单地讨论一下,月亮的赤经、赤纬视差对日食的影响。

赤经视差 $\cos\delta\Delta\alpha=-P\rho\cos\phi'\sin t$,当月亮的时角 t 为 0 时,即当月亮南中时,它的赤经视差等于 0。当时角 t 为 90°时,赤经视差最大,其值为 $P\rho\cos\phi'$。此外由视差引起的月亮赤经的改变,还随月亮的赤纬而变。当月亮的赤纬为 0 时,$\Delta\alpha=-P\rho\cos\phi'$。月亮的赤纬变化非常复杂,不能简单地根据太阳的赤纬加减 5°9′估计范围。需根据黄道赤道坐标换算公式计算得出。月亮的黄纬总在±5°.3 之内变化,月亮赤纬可在±28°.68 内改变。太阳、月亮赤纬有时可相差 50°以上。但日食时日月的赤纬一定是相近的。因此食时月亮赤纬最大也不会超过±25°。月亮的赤道地平视差变化于 53′.95~61′.45 之间。由于月亮视差引起的赤经变化,不同的观测地所见到的日月赤经相合的时刻不同。因而食甚的时间就不一样。食甚正好发生在当地子午线上(南中)的日食,其时刻与赤经合相近。由赤经赤纬视差公式看出,此时赤经视差为 0。月亮时角 t 越大,赤经视差越大,因而观测地的食甚时刻与地心赤经合的差距越大。

以唐朝都城长安为例(与宣明历晷漏术观测地纬度相近,约当 34°.1)。可算出长安的 $\rho\cos\phi'$ 值为 0.8273,$\rho\sin\phi'$ 是 0.5599,设日食时月亮的时角 t 为 90°,月亮的赤纬 δ 为 0°,这约当接近日出日没时刻食甚的日食。如这时又适值月亮的赤道地平视差值为极大值 61′。由上式可得出此时的 $\Delta\alpha=0.8273\times61'=50'.4592=3027''.55$。太阳的赤道地平视差一般在 8″.65~8″.95 之间变化。约比月亮小 400 倍。与月亮比较,太阳赤经、赤纬视差可以忽略。按月赤经每小时 100~165 秒变化量来估计,大约需时73~121 分钟。这就是长安太阳出没前后食甚因赤经视差需增减的大致时间。当然赤经合并不与合朔(日月黄经相同)同时,一般要相差十多分钟,有时会相差三四十分钟。

再考虑 $\delta=23°.5$ 的情况。其他条件不变。

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=0.8273\times61'\times\sin90°/\cos23°.5\\&=56'.76=3405''.53\end{aligned}$$

同样,按月亮赤经每时变率 $100^s\sim165^s$ 来估计,大约需时 82.6~136.2 分钟。

如计算山西阳城的情况(日本有的学者认为此为宣明历观测地)。阳城经纬度取作 112°.5 和 35°.5,可得出 $\rho\cos\phi'$ 是0.81352,$\rho\sin\phi'$ 为 0.5796。当 $t=90°$,$P=61'$,$\delta=0°$时,

$$\Delta\alpha=0.81352\times61'=49'.625=2977''.48$$

当 $P=61'$,$t=90°$,$\delta=23°.5$ 时,

$$\Delta\alpha=0.81352\times61/\cos23°.5=3246''.77$$

按月赤经每时变量 $100^s\sim165^s$ 计,前者需时 $72^m\sim119^m$,后者为 $79^m\sim130^m$。



赤经视差主要改变观测者所见到的日月赤经相合的时刻，合朔时刻距午时越远，即 t 越大，观测地所见日食的食甚时刻与合朔时刻相差越大。赤纬视差主要影响观测者得出的日月赤经相合时刻日月之间的距离，从而使不同的观测地点见到的日食食分有不同的大小和深浅。

由赤纬视差。

$$\Delta\delta=-\rho P\sin\phi'\cos\delta+\rho P\cos\phi'\sin\delta\cos t$$

可看出，它与观测地纬度、日食时月亮的赤纬 δ、时角 t、赤道地平视差 P 有关系。日食时日月赤纬相近，通常在赤经合时相差不足 1°，δ 总在 ±25°以内变化。由长安、阳城的 $\rho\cos\phi'$、$\rho\sin\phi'$ 值可看出，对于中原地区 $\rho\cos\phi'/\rho\sin\phi'$ 值不超过 1.5。纬度越高，比值越小。而日食时月亮赤纬不会超过±25°。对于小角来说，余弦的值，总大于正弦的值（45°的正弦、余弦数值相等）。$\cos t$ 值最大为 1。所以赤纬视差的两项中，对于中原地区的日食而言，第一项总大于第二项。若 $\delta=0°$ 或 $t=90°$ 时第二项为 0。当 δ 为正值时，第二项的符号与第一项相反，从而使赤纬视差值减小。当日食时 δ 值为负时，赤纬视差值两项同号，因而增大。日食时日月赤纬相近。因此，基本上从春分到秋分这半年，日食时月亮的赤纬视差值相对较小；从秋分到春分，月亮的赤纬视差值相对较大。而赤纬视差值又与日食时的时角 t（约当合朔时的距午正时刻）有关系。日食正好发生在午刻（$t=0$），第二项其值最大；δ 为正值极大时，赤纬视差值最小；δ 为负值极大时，赤纬视差值最大。赤纬视差与 δ、t 的关系，列于表 9－5。

表 9－5　赤纬视差与 δ、t 的关系

观测地	长安　$P=61'$				
δ	0°	23°.5		－23°.5	
t		0°	45°	0°	45°
$\Delta\delta$	－2049″.2	－671″.9	－847″.3	－3086″.7	－2733″.0
观测地	阳城　$P=61'$				
δ	0°	23°.5		－23°.5	
t		0°	45°	0°	45°
$\Delta\delta$	－2121″.3	－758″.2	－1105″.9	－3132″.6	－2784″.9

太阳视角半径随轨道运动变化于 15′.7～16′.3 间，而月亮视半径则在 14′.7～16′.75 间改变。日食只有当在视日月相距最近要小于日月两角半径之和时才会发生。而由讨论可知，月亮赤纬视差，对于中原地区，通常总在 10′以上，有时可达 50

余角分。而日月视半径之和最大不过33′许。可见视差对于日食的有无和食分的深浅关系极为密切。

现在回到宣明历的时差和气差、刻差、加差问题上来。时差基本上可与上面所述的赤经视差对应。食定余算式告诉我们，对于午正合朔的日食，食甚时刻等于定朔时刻。随着距午时刻的增加，食甚和定朔时刻差加大。日出、日没差距最大。这个关系与前面关于赤经视差的讨论结果是一致的。只有两点稍有不同：①宣明历给出的食甚、合朔时刻差，尤其日出、日没合朔与食甚相距数值偏低；②日出时食甚时刻比合朔早$\frac{147}{8400}$日，而日没时食甚迟$\frac{294}{8400}$日，可能与实际有些偏离。

宣明历气差、刻差、加差数值皆与节气有关。当观测地一定时，由赤经、赤纬视差算式可看出，视差对食甚时刻和食分的影响与月亮赤纬和时角两个因素有关系(月亮赤道地平视差可看成常数)。月亮赤纬十分复杂，但日食时日月赤纬一定是相近的。由太阳赤纬可知，日食时月亮赤纬与季节有明确的关系。因此宣明历日食三差皆与季节有关是合理的。三差数值只与节气有关，但其改正食差的定数中却皆包含了食甚距午正刻数(时差、刻差并与日出没辰刻距午正刻数有关，后者显然又表示了与季节之间的关系)。这说明，宣明历已认识到视差对食分的影响中，除月亮赤纬(依靠节气)外，还与时角t有关系。这是宣明历认识上的很大进步。

前面说过，赤纬视差，当秋分至春分，冬至前后这半年，相对较大。宣明历的加差，由此看来，也并非没有道理。只是对午正前合朔的日食没有影响，有些令人费解。因为对于午前午后的同一时角t值，它的余弦值及符号是一样的。

将宣明历的气差、刻差定数的算式与赤经、赤纬视差比较看出：刻差定数与赤经视差、气差定数与赤纬视差比较接近。所以朱文鑫先生称气差为南北差，刻差为东西差。南北差即地平经圈上的总视差(高下差)在赤经圈上的分量，东西差为高下差在赤纬圈上的分量。赤经视差

$$\cos\delta\Delta\alpha = -P\rho\cos\phi'\sin t$$

与

$$\text{刻差定数} = \text{朔日刻差} \times \text{食甚距午刻度}$$

形式相近。食甚在午正，相应的月亮时角为0，刻差定数等于0，赤经视差也为0。但刻差值在冬夏二至是0，而视差对赤经的影响，在二至却为最大值。另外，宣明历的刻差数值相对气差为小，而赤经视差除午时为0外，其值随距午度的正弦而增大，与赤纬视差属同一量级。

$$\text{气差定数} = \text{朔日气差}\left(1 - \frac{\text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}}\right)$$

$$= \text{朔日气差} \times$$



$$\frac{\text{日出没辰刻距午正刻数}-\text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}}$$

$$\Delta\delta=-P\rho\sin\phi'\cos\delta+P\rho\cos\phi'\sin\delta\cos t$$

春分后、秋分后气差定数数值相近，符号正好相反。日食时日月赤纬相近(月食时日月赤纬数值相近，符号相反)。春分后赤纬为正，秋分后赤纬为负，故符号相反。定数，食甚在午正时数值大，食甚在日出没时数值为0。二分时气差及气差定数为0。可看出，气差定数与$\Delta\delta$赤纬视差算式比较接近，因二分时δ近0，尤其与第二项基本一致。由气差定数中与日出没辰刻距午正刻数关系可知，春分后因δ为正，日出没距午刻数，大于秋分后，所以气差定数数值，春分后比秋分后相应日期为大。

综上所述，可以看出，宣明历创立的日食时差、刻差、气差、加差进一步定量地描述了日食时月亮视差对日食见食情况的影响。虽然它的数值还不够准确，加减正负的安排还有些值得改进的地方，但通过以上分析，可知，它对日食计算确是一项重要的发展和改进。

10. 去交前后定分、去交度数

入交定日及分，如小于后准日($1\frac{1337.1744}{8400}$日)或大于前准日($12\frac{3754.1512}{8400}$日)，为入食限。

望入食限，则出现月食；朔入食限，如月在阴历(即在黄道北，升交点至降交点的半周内)，则有日食发生。很容易知道，所入食限，若在后准日以下，是在交后；若在前准日以上，必在交前。由前述法数定义知，前准后准与前后二交点的距离是相等的。入交定日大于前准日以减中日($13\frac{5041.3256}{8400}$日)为交前定日分；入交定日小于后准日为交后定日分。各乘以统法为去交前后定分。以11乘，7303除，得去交度数。即

$$\text{去交度数}=\frac{11}{7303}\times\text{去交前后定分}$$

11. 食差及去交真定分

视差使观测者看到的月亮位置改变了，使它的视位置比地心位置偏南(即降低了月亮的高度，加大了天顶距)。前面我们就视差对日食食甚时刻及食分影响做了半定量的分析。简单地说，对于阴历，月亮处在太阳北面，视差使月亮视位置降低与太阳更接近了；对于阳历，月亮位于太阳之南，视差使月与太阳的距离拉大。只有当日月两心相距的角度小于日月视半径之和，即33′以内时，才会有日食发生。月亮视差在某些情况下可使赤纬南移五十余分，一般也有十几、二三十分。因此，对于阴历，月处黄道北，食限增加，日食可发生在月距交点较远处；相反，对于月处黄道南的阳历，因视差增大了日月视距，使发生日食的机会减少。

视差对阴阳历日食食分的影响,宣明历用食差来表示。宣明历的气差、刻差、加差其大小、符号各随季节、时刻、阴阳历而异。加减号,同名相加,异名相减。其食差即为三差定数的代数和:

食差=±气差±刻差±加差

去交定分经过食差改正,为去交真定分,即

去交真定分=去交定分±食差

=去交定分±气差±刻差±加差

如食差为减号(负值),其绝对值大于去交定分,这时分月在阴历、月在阳历两种状态、四种情况予以讨论。

①月在阴历、交前,以去交定分减食差,减余为阳历交后真定分。因去交定分小于食差,故减余视月所在真去交定分已在交点以南。

②月在阴历、交后,以去交定分减食差,减余为月在阳历交前真定分。

这两种情况,视月皆入阳历(黄道南),由前所述,皆没有日食发生。

③月在阳历、交前,以去交定分减食差,减余为月在阴历交后真定分。

④月在阳历、交后,以去交定分减食差,减余为月在阴历交前真定分。

后两种情况,经过视差改正,视月皆入阴历,且在交点近旁,显然皆有日食发生。

至于具体见食情况、食分深浅,皆须由食限数值和计算食分得出。

12. 阴阳历食限和日食食分

阴历食限 6060　　阴历定法 404

阳历食限 2640　　阳历定法 176

如去交真定分小于阳历食限,为阳历食。以阳历定法 176 除去交真定分,得食分。即

食分 G=去交真定分/阳历定法 176

全食食分为 15。阳历定法 176 与 15 相乘得阳历食限 2640。

若去交真定分在阳历食限以上,以阳历食限减去交真定分,所得为阴历食。地心及观测地所见食甚时的月亮皆在黄道以北。以阴历定法 404 除去交定分与阳历食限之差,以减 15,余数即为食分 g。即

$$食分\ g=15-\frac{去交真定分-阳历食限\ 2640}{阴历定法\ 404}$$

日全食食分为 15。去交真定分为阳历食限 2640 时,为日全食。因阴历定法 404 乘 15 为阴历食限 6060。去交真定分为阴历食限、阳历食限之和 8700 时,从上式看出,其时食分 g 为 0。

由此可得出,宣明历阴历日偏食、日全食食限为:



$$\text{阴历偏食食限}=8700\times\frac{11}{7303}=13.10\text{ 度}$$

大衍历说，大抵去交13度以上，虽入食限为涉交数微，光景相接，或不见食。宣明历与此相符，并给出了确切的日偏食食限。

$$\text{阴历日全食食限}=2640\times\frac{11}{7303}=3.98\text{ 度}$$

由宣明历气差、刻差、加差数值和定数算式知道，当春分秋分(其时日食月亮的赤纬近于0)及食甚发生在午正时，气差、刻差、加差皆为0。此时由入交定分确定的阴阳历食限为：

$$\text{阴历食限}=6060\times\frac{11}{7303}=9.13\text{ 度}$$

$$\text{阳历食限}=2640\times\frac{11}{7303}=3.98\text{ 度}$$

根据月亮赤纬视差

$$\Delta\delta=-P\rho\sin\phi'\cos\delta+P\rho\cos\phi'\sin\delta\cos t$$

日食时月亮赤纬δ只可能在$-25°\sim+25°$之间变化，赤纬视差总不为0，并常为负值，即总使月亮的赤纬向南。即对于月在黄道南的阳历食，总使月亮远离黄道，故食限总要小于阴历食。这就是大衍历虽然冬至差积为0，宣明历即使气、刻、加三差定数皆为0的情况下，阴历、阳历食限不等，且阴历食限总大于阳历食限的原因。

13. 日食泛用刻分、定用刻数及初亏复满时刻

将食分以18乘之，以15除之，商为刻数，不尽以刻法84乘之，以15除之，为分。所得即为泛用刻数及分。

泛用刻数与日食其日入转损益率相乘，以统法除之，得数加减泛用刻数值，得定用刻数：

$$\text{定用刻数}=\text{泛用刻数}(1\pm\frac{\text{入转损益率}}{\text{统法}})$$

按月离表，朒时损为减、益为加；朓时损为加、益为减。定用刻数即日食从初亏至复满持续的时间。半定用刻是初亏至食甚或食甚至复满的时间间隔。因此有：

$$\text{亏初时刻}=\text{食定余辰刻(食甚)}-\frac{1}{2}\text{定用刻数}$$

$$\text{复满时刻}=\text{食甚辰刻}+\frac{1}{2}\text{定用刻数}$$

14. 月食食分

凡月食去交定分在2147以下，为月全食；大于2147，则以去交定分减后准$1\frac{1337.1744}{8400}$(=9737.1744分)，减余以月食定法506除，商为食分G。即

月食食分＝(后准 9737.1744－去交定分)/506

后准 9737.1744＝15×506＋2147.1744

由此得出，月全食与月偏食的食限(根据宣明历去交度乘数$\frac{11}{7303}$计算)为：

月全食食限＝2147×$\frac{11}{7303}$＝3.23 度

月偏食食限＝9737.1744×$\frac{11}{7303}$＝14.67 度

15. 月食泛用、定用刻数及初亏复满时间

凡月全食，泛用刻为 20；如去交定分在 1435 以下，再增半刻为 20.5 刻；若去交定分小于 712，又增半刻为 21 刻。依大衍历偏食泛用刻见表 9－6。

表 9－6 大衍历偏食泛用刻

食　分	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
泛用刻	0	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20

定用刻数为初亏至复圆距时，求法同日食。

定用刻数＝泛用刻数(1±$\frac{其日入转损益率}{统法}$)

朒时损为减、益为加；朓时损为加、益为减。

月食食甚时刻即定望小余，所以

亏初时刻＝定望时刻－$\frac{1}{2}$定用刻数

复圆时刻＝定望时刻＋$\frac{1}{2}$定用刻数

16. 求日月带食出没

宣明历首创推求日月带食出没的方法，为后世历法所沿用。

(1)先不考虑日出入，计算出这次交食的定用刻数、食甚时间及食分。

(2)根据步晷漏术，求出其日太阳出入时刻，并计算日出(入)至食甚的时间间距。

(3)日月带食出没分两种情况：可见食甚及不可见食甚，分别予以计算。

(4)可见食甚情况下，日月食实际上不可见的时段长度为半定用时内减日出(入)至食甚时刻间距。半定用时为亏初至食甚或食甚至复满的时间。即在可见食甚情况下：

不可见刻＝半定用时－日出(入)至食甚时间

(5)不可见食甚情况下，日月食可见时段长度为半定用时内减日出(入)至食甚



时距，即

见刻＝半定用时－日出(入)至食甚时距

不可见食甚的见刻和可见食甚的不可见刻皆小于半定用刻。

(6)计算日出入时所见日月带食的食分

仅当日出(入)时刻恰为交食食甚情况下，可见带食为食甚食分。通常因上述的“不可见刻”、“见刻”皆小于半定用刻，所以日出没时所见带食食分均小于食甚食分。

可见食甚时，日出(没)时可见日月带食食分为：

带食食分＝不可见刻×食甚食分/半定用刻

不可见食甚情况下：

带食食分＝见刻×食甚食分/半定用刻

可见食甚情况下，日月食实际见刻大于半定用刻。即亏初在日出(没)前，或复满在日没(出)后。日出(没)时，食分正扩大，日没(出)时食分正减退(括号内字为月食的情况，下同)。

不可见食甚情况下，日月食实际见刻小于半定用刻。即食甚在日出(没)前，或在日没(出)后。日出(没)时食分正减退，日没(出)时食分正进展。所以宣明历术文说，“多于半定用刻，出为进，没为退；小于半定用刻，出为退，没为进。”

宣明历交食计算方法和推步程序比较简单。为节省篇幅不计算实例了。宣明历在中国行用了71年，在日本施行了823年，其中862－892年中日共同行用。日至今保存大量宣明历施行期间的日月食预报和观测。其中日食五十、月食百四十余次。日本学者渡边敏夫、内田正男等对宣明历日月食计算做过细致的研究。内田认为宣明历是基于阳城($\lambda 113^\circ$E，$\varphi 34^\circ.6$N)观测制订的；渡边视作在山西阳城($\lambda 112^\circ.5$E，$\varphi 35^\circ.5$N)观测得出的。因而考查结果略有不同。此两地距日本京都约23°，时间相差约92^m。对日食而言，不考虑这点当然不可能准确报出京都地区交食。考查得出，用宣明历预报862—1684年京都的交食，误差个别的可达3^h。日食平均误差约早50^m～80^m，月食约早40^m。计算阳城的日月食误差也大约有1^h，通常是偏后。在862至1684年这823年间的日食预报大致约有六成不准。

传世有丰富的宣明历的日月食资料，并有大量的观测记录。这些材料以及宣明历交食的推算方法和精度很值得深入研究。

第九节　晚唐五代宋历法一瞥

《新五代史·司天考》谓，唐建中(780—783)时术者曹士蔿始变古法，以显庆五

年(660)为上元,雨水为岁首,号符天历。然世谓之小历,只行于民间。而重绩乃用以为法遂施于朝廷,赐号调元历。然行之五年辄差不可用,而复用崇玄历。

符天历除上述以雨水为岁首,不用上元积年外,还采用一万为日法,使计算方便易行。更重要的它创立了相减相乘的简单二次函数算式,来计算由中心差引起的太阳盈缩运动。将函数算法公式引入历法计算中来。这个特点为唐末边冈的崇玄历所继承并有很大发展。

唐末昭宗时,宣明历施行已久,数亦渐差,乃诏边冈等改治新历。景福元年(892)历成,赐名崇玄。二年(893)行用,至唐哀帝天祐四年唐亡,凡15年。崇玄历气朔、发敛、盈缩、朓朒、定朔弦望、九道月度、交会、人食限去交前后等皆大衍之旧。余虽不同,亦殊途而至者。其主要差别是算法上广泛采用了函数来处理各类的历法推步。他将二次函数算法推广到黄赤道宿度换算、月亮的黄道内外度和交食的有关问题。并首创三四次函数算法以计算太阳距极、每日晷长、漏刻等历法问题。崇玄历算法的发展对五代、宋历法有很大影响。

后晋天福(939—943)时曾颁行马重绩的调元历。此历在辽施行过48年(947—994)。其术失传。后周显德三年(956)至七年(960)周亡,行用王朴钦天历。宋初自建隆元年(960)迄乾德元年(963)沿用。此术共行用8年。历术仅存基本法数和部分推步方法。日躔月离五星损益朓朒诸数,史皆缺失。中原地区,五代其他时期皆用边冈崇玄历。

北宋168年间,颁行了应天(964—982)、乾元(983—1000)、仪天(1001—1023)、崇天(1024—1064,1068—1074)、明天(1065—1067)、奉元(1075—1093)、观天(1094—1102)、占天(1103—1105)和纪元(1106—1127,北宋南迁)等九历。南宋152年中,颁行了统元(1136—1167)、乾道(1168—1176)、淳熙(1177—1190)、会元(1191—1198)、统天(1199—1207)、开禧(1208—1251)、淳祐(1252)、会天(1253—1270)、成天(1271—1276)和本天(1277—1279,南宋亡)等十历。南宋建炎二年(1128)至绍兴二年(1132)用何历术失载。绍兴三年(1133)迄五年(1135)又用纪元术。历志记载至德祐丙子(1276)复八改历,内缺淳祐。

《宋史·律历志》两度记载,宋历在东都(北宋开封)凡八改,曰应天、乾元、仪天、崇天、明天、奉元、观天、纪元,而独缺占天历。并云,统元历颁行虽久,有司不善用之,暗用纪元法推步而以统元为名。乾道二年(1166),日官以纪元历推三年丁亥岁十一月甲子朔,将颁行,裴伯寿诣礼部陈统元历法当进作乙丑朔,于是依统元历法正之。并记载有,二年(1166)礼部谓:统元历法用之十有五年,纪元历法经六十年。纪元历自崇宁五年(1106)始用,迄乾道二年(1166)历经六十年。三年(1107)侍御史单时言:“比年太史局以统元历稍差而用纪元历。”可知,南宋高宗绍兴六年



(1136)颁行统元历，实行十五年，乾道三年(1167)复用一年。绍兴二十一年(1151)后迄乾道二年(1166)仍行纪元历。历志记载淳祐十一年(1251)，殿中侍御史陈垓说，"今所颁历乃相师尧等依淳祐新历推算"，"开禧旧历仅差一二刻，而李德卿新历差六刻二分有奇"。"由此观之，旧历差少未可遽废，新历差多未可轻用。一旦废旧历而用新历，不知何所凭据，请参考推算颁行。"十二年(1252)，谭玉历成，赐名会天。宝祐元年(1253)行之，史缺其法。由此可知，李德卿淳祐历于十一年颁行十二年历，仅行用了一年。会天历史缺其法，但今有宝祐四年(1256)丙辰岁会天万年具注历一册抄本传世，对其情况可有一些了解。

两宋历凡 19 改，但历法在天文学并无很大发展。而在数学方法上，由符天、崇玄历创立的函数算法，宋代历法又进一步地发扬光大。其中尤以周琮的明天历较为突出。明天历对日月五星的盈缩运动，黄赤、黄白距度的变换，交食、晷漏长度、黄道去极度等问题的计算，皆采用二次及高次函数方法来处理。这些在第二章中有详述，就不重复了。宋代历法比较有影响的是明天、纪元、统天三历。

周琮明天历不仅算法上有发展，其取法大衍历议撰写义略，说明其立法之源由，评议古历的得失，简明扼要，也很有特色。历法很多基本单位，例如年月日之间往往没有整数倍的公约关系。在没有十进制小数法之前，古代天文学家就用分数来表示天文数据的奇零部分。例如四分历的朔望月长 $29\frac{499}{940}$日，三统历的月长是 $29\frac{43}{81}$日。这些分数的分母称作日法，分子叫朔余。古代天文学家是采用逐次逼近的调日法，来不断修正所得出的分子和分母的数值，才得到与观测或推算相符的以分数形式表达的历法数据奇零部分的。明天历议论调日法说，后汉刘洪考验四分，于天不合，乃减朔余苟合时用。自是已降，率意加减，以造日法。宋世何承天更以 $\frac{26}{49}$为强率，$\frac{9}{17}$为弱率，于强弱之际以求日法。承天日法 752，得 15 强 1 弱。自后治历者，莫不因承天法，累强弱之数，皆不悟日月有自然合会之数。今稍悟其失，定新历以 39000 为日法，6240000 为度母，9500 为斗分，693 为朔余。指出了调日法之创建及其取强弱率、调整日法朔余的方法，以及周琮的发展和改易。又在月度转分中说，旧历课转分，以 $\frac{5}{9}$ 为强率，$\frac{56}{101}$为弱率，乃于强弱之际而求秒焉。新历转分 29882242251，以 1000000 平之，得 $27\frac{554626}{1000000}$日，最得中平之数。介绍了旧历用调日法决定近点月奇零部分的方法及明天历的不同。对了解调日法及古历奇零的选取很有用处。周琮明天历议涉及中朔、盈虚、岁差、周天、宿度，日月五星行度、盈缩、晷漏、消息、进朔、食差等历法的方方面面，介绍了各项历法数值及各术推步的

发展。

周琮论历曰:"古今之历,必有术过于前人,而可以为万世之法者,乃为胜也。"他列举的创法诸家及推较晷影、星度、交食之法,皆为后世所宗,要点如下:①一行为大衍历议及略例,校正历世,以求历法强弱,为历家体要,得中平之数;②刘焯悟日行有盈缩之差;③李淳风悟定朔之法,合并气朔闰余皆同一术;④张子信悟月道有交道表里,五星有入气加减;⑤晋姜岌始悟以月食所冲之宿为日所在之度;⑥后汉刘洪作乾象历,始悟月行有迟疾数;⑦刘宋祖冲之始悟岁差;⑧唐徐昂作宣明历,悟日食有气刻差数;⑨明天历悟日月会合为朔,所立日法、积年有自然之数,及立法推求晷影,知气节加时所在;⑩较日月交食,若一分、二刻以下为亲,二分、四刻以下为近,三分、五刻以上为远,以历注有食而天验无食,或天验有食而历注无食者为失;⑪较星度,则以差天二度以下为亲,三度以下为近,四度以上为远;⑫较晷影尺寸,以二分以下为亲,三分以下为近,四分以上为远。

周琮认为,"其疏谬之甚者,即苗守信之乾元历、马重绩之调元历、郭绍之五纪历也。大概无出于此矣。"周琮论九家创法之端,为授时所本。可惜明天历议虽详,而测算未能精到,行之仅 3 年,因月食不验,而复用崇天历。

纪元历是两宋行用最长的二历之一。自徽宗崇宁五年(1106)颁行,到靖康二年(1127),北宋施行 22 年。南渡后,因战乱其术散失。至绍兴二年(1132)高宗重新购得。三年(1133)仍用此术,迄五年(1135)。六年(1136)至二十年(1150)用统元历 15 年。绍兴二十一年(1151)后复用纪元历,迄乾道二年(1166)凡 16 年。乾道四年(1168)又用一年。共施行 42 年。另外,行用统元历时,曾参用纪元历。有的学者将这 15 年,及南渡后建炎二年(1128)至绍兴二年(1132)5 年,加到一起,称纪元术共用 62 年。因史载缺失,南渡后至绍兴二年所用历术不明。另宋史历志记载统元历用 15 年。绍兴二十一年(1151)所行是统元,还是纪元,学者时有不同纪法,故有称纪元共行 41 年、42 年或 62 年等几种说法。但目前所传历日,因统元术无传,这 62 年皆以纪元术推得。在两宋历法中纪元和崇天二术是行用最久的两种历法,崇天历自仁宗天圣二年(1024)颁行,用 8 年。重修后自仁宗明道元年(1032)至英宗治平元年(1064)用 33 年,神宗熙宁元年复用 7 年,共施行 48 年。

纪元历有较高的精度,它的基本常数,例如岁差,计算方法优于前历。姚舜辅求岳台晷影,重测二十八宿赤道宿度。计算、推步和观测方法都做了改进。

在明末以前,中国古代天文学不明球面三角术。由太阳赤道距度 α,推求黄道距度 λ,只能用实物模拟或经验公式来解决。自符天历、崇玄历创立相减相乘法,北宋以后各历差不多都应用函数算式处理各类历法计算问题。纪元历将黄赤道距度换算公式做了进一步简化。对太阳去极度、月去黄道度等算式,都有所改进。

为制定新历，在崇宁元年至五年(1102－1106)，姚舜辅领导又重新测定了二十八宿赤道距度。在北宋所进行的七次恒星测量中，这是最精确的一次。过去的观测都以度为单位，姚舜辅以 1/4 度为单位，观测读数准确。他使用的仪器经过改进，观测方法有所提高。因此观测得到了前所未有的精度。二十八宿距度平均误差仅0°.15。精度的提高基于观测。纪元历得出的周天度比旧历加大。因而改善了岁差常数。纪元历岁差约 73.5 年差 1 度，而观天、明天、统元各历皆 78 年左右始差 1 度，不如纪元之密。

因为太阳甚亮，人眼不敢直视，且日出列宿俱熄。所以古人欲测日躔所在，是根据昏旦、夜半中天之星来推出的。可是昏、旦、夜半时刻不易准确测得。时刻一差则太阳所距、所在位置就不能准确无误。晋姜岌首倡根据月食所冲，判断日度所在。因月食在望，正当日月相冲。月食时尤其全食时可以准确判定星宿位置。由于水金二星附日而行，水星近地不易观测和测准，纪元历创立以金星远近于昏后明前验定星度，确定太阳位置的方法也比较简便易行，因为金星动态在战国末期、秦汉之际已测得比较准确，由此确定日躔易得其真。

纪元历推日月交会和五星也比较准确。历史记载，五星中最难以观测的火星，纪元历推步都能比较密近。

清代学者梅文鼎说，“宋历莫善于纪元，尤莫善于统天。”又说，“授时历集古法之大成，自改正七事、创法五端外，大率多因古术。”“不读统天历，不知授时之岁实消长。”统天确为宋历中最优秀的历法。宁宗庆元五年(1199)赐名颁行。七月辛卯朔，统天历推日食，云阴未见。六年(1200)六月乙酉朔，推日食不验。嘉泰二年(1202)五月甲辰朔日有食之，诏太史与草泽聚验于朝。太阳午初一刻起亏，未初刻复满。统天历先天一辰有半。乃罢杨忠辅，诏草泽通晓历法的应聘修治。开禧三年(1207)新历议论始定，诏以戊辰年(嘉定元年，1208)权附统天历颁之。这样，这部优秀历法实际仅施行了 9 年。

统天历术载《宋史・历志》。记有基本法数和日躔、黄道、赤道过宫、月离、五星动态、盈缩诸表。但术文极其简单。仅因岁实、朔实消长，记有求天正冬至、求天正经朔的方法。此外，只在赤道过宫后注有依今历上元命日所起，及求黄道过宫的简单术文。所有步发敛、日躔、月离、晷漏、交会、五星各术，皆注“法同前历，此不载”，《宋史・历志》中均予省略。

统天历最大的改革为变动了上元的求法而采用近距历元及发现岁实消长，回归年长度古大今小不是常量。这两点都为其后的授时历采纳。

统天历所找的上元甲子，不是天正甲子冬至合朔夜半齐同，也不是日月交会、五星会合、月过高卑的日月合璧、五星连珠的时刻。统天历的上元甲子只不过是一

般的甲子年而已。由于历法计算起点，天象并不齐同，所以创设了气差、闰差、转差、交差等以便于推算。与授时历的闰、气、周、转、交、合、历七应含义虽略有不同，其实质是一样的。

我们考查后得出，统天历是以上元甲子年的冬至日作为计算起点的。气差是冬至与其后甲子日夜半的时距。闰差为其后经朔距甲子夜半的时刻。气、闰、转、交等差为统天历所创。步月离、交会术文中推步皆云“与前历同此不载”，无法判别转差、交差。我们推算了统天历的天象，它们可能是近地点、黄白交点距甲子夜半的时距。

杨忠辅统天历发现岁实消长，古大今小，不是常量。上推下验，须用斗分差来校正。斗分差 127，每年岁分相差为斗分差除以 10000，即 0.0127。往古上推，加之；下验未来，减之。

统天历视岁分消长如一等差级数。首项 a 即岁分 4382910，公差 $d=0.0127$，上推为正下求为负。以绍熙五年甲寅(1194)为起点。其后 100 年的岁分为 $a+100d=4382910-100\times0.0127=4382908.73$，岁实 365.2423942 日。其后 200 年公元 1394 年的岁分为 $a+200d=4382910-200\times0.0127=4382907.46$，回归年长 365.2422883 日。故统天历的岁实消长或回归年长度可用下式表述：

岁实(回归年日数)

$$=365^{d}.2425-0^{d}.000001058\times(t-1194)$$

$$=365^{d}.2425-1^{d}.0583\times10^{-6}(t-1194)$$

100 年的总长度、总日数为：

$$\begin{aligned}S&=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]\\&=100\times4382910-50\times99\times0.0127\\&=438291000-62.865\\&=438290937.1\\&=36524.24476\text{ 日}\end{aligned}$$

向后 200 年的总长度、总日数为 $200\times4382910-100\times199\times0.0127=876581747.3=73048.47894$ 日。

统天历的岁实为岁分/策法，得 365.2425 日。与 1582 年 10 月颁行的格里历相当。统天历的朔策为朔实 354368/策法 12000，得 29.53066667 日，为隋唐以降诸历最强率。是因统天历朔实如岁实亦有消长之法。其法为以 105 乘距算($t-1194$)，退位减之。与岁实消长相同，亦为“积算少如距算者加之”，即上推为加，下求为减。有的学者认为朔实 354368，每岁须减 105/10 分，每月需减 $10.5/\frac{\text{岁分}}{\text{朔实}}=$



0.8489483 分。即

$$朔望月长度 = 354368 - 10.5 \times (t-1194)$$
$$= 29^d.53066677 - 0^d.000875(t-1194)$$

如果如此，则十年后的朔望月就仅为 29.52191667 日。显然不当。我们认为，统天历朔实与岁实消长有对应关系。距差$(t-1194)$为 n 年后的朔实是：

$$距差\ n\ 年的朔实 = \frac{n\ 年总岁分 - 10.5(t-1194)}{n(岁分\ 4382910/朔实\ 354368)}$$

这样，距绍熙五年甲寅(1194)百年后，1294 年朔实＝(438290937.1－1050)/1236.824431＝354367.1002＝29.53059168日。距绍熙甲寅二百年后，1394 年朔实为：

$$1394\ 年朔实 = \frac{876581747.3 - 2100}{200 \times 12.36824431}$$
$$= 354367.0489 = 29.53058741\ 日$$

现代得出的岁实、朔实消长的关系如下：

$$回归年 = 365^d.24218968 - 0^d.0000000616(t-2000)$$

$$朔望月 = 29^d.53058885 + 0^d.0000000022(t-2000)$$

统天历岁分、朔实消长都嫌过大，更重要的是朔望月的消长方向与统天历是相反的，即应该是古小今大。

统天历求天正冬至方法为：

积算＝距算(3830)＋(所求年－绍熙甲寅 1194)

距差$(t-1194)$＝积算－距算

气泛积＝积算×岁分－气差 237811

躔差＝距差×斗分差/10000

气定积＝气泛积－距差×躔差

冬至日分＝[气定积/纪实 720000]$_R$

冬至大小余＝[冬至日分/策法 12000]$_R$

求天正经朔的方法如下：

天正闰泛余＝[(冬至气定积－闰差)/朔实]$_R$

天正经朔泛积＝气定积－天正闰泛余

$$天正朔定积 = 朔泛积 - \frac{105}{10} \times 距差$$

经朔日分＝[天正朔定积/纪实]$_R$

天正经朔大小余＝[天正经朔日分/策法]$_R$

其中

岁分 4382910；策法 12000；朔实 354368；



气差 237811；闰差 21704；斗分差 127；

纪实 720000；气策 $15\frac{2621.25}{12000}=15.2184$ 日；

望策 $14\frac{9184}{12000}$ 日；弦策 $7\frac{4592}{12000}$ 日；

岁余 62910。

得出天正冬至大小余，累加气策，得以后各气。由天正经朔，递加朔策、望策、弦策，可得各月经朔、弦、望。

下面以庆元五年、六年为例，各求其天正冬至和经朔（表 9－7）。因距差乘躔差不满秒半以上者，以泛为定。即小于 0.00005 日者略去，就以气泛积为气定积。另外，统天历因庆元五年始颁行，实际计算中，以此为起点，即距差＝$t-1199$。

表 9－7　求庆元五年、六年天正冬至和经朔

	庆元五年(1199)	庆元六年(1200)
积算	3835	3836
气泛积	16808222039	16812604949
气定积/纪实	$23344\frac{542037.6}{720000}$	$23350\frac{604951.2}{720000}$
冬至大小余	45.1698 己酉	50.4126 甲寅
天正闰泛余	$47431\frac{171730.28}{720000}$	$47443\frac{302226.29}{720000}$
天正朔泛积	16808050309	16812302723
朔定积/纪实	$23344\frac{370310}{720000}$	$23350\frac{302717}{720000}$
天正朔大小余	30.8592 甲午	25.2264 己丑



第十章　元明授时集大成

第一节　授时历制定、颁行与成就、特点

一、授时历的制定和颁行

元初承用金大明历。庚辰岁(1220)太祖西征,夏五月,西域人预言五月望夜当有月食,至期不效;而二月、五月朔日见微月于西南。中书令耶律楚材以大明历稍后天,乃采用大明历的基本天文数据(周天度分微异)和推步方法,而调正了历术推步的起点。以中元庚午岁(1210),国兵南伐而天下略定,推上元庚午岁天正十一月壬戌朔子正冬至,日月合璧五星联珠,同会虚宿6度,以应太祖受命之符,作为历元。又以西域、中原相距殊远,遂创里差之法予以增减,这样虽东西万里通过经度差的改正,所得地方时不复差忒,并题名西征庚午元历,表上之,但未得颁行。此外,耶律楚材认为西域人的步五星术密于中国,曾作麻答巴历。可惜此历现已失传。庚午元历今还保存在《元史·历志》中。

《元史》说,世祖忽必烈至元四年(1267),西域札马鲁丁撰进"万年历",世祖稍颁行之。世祖本纪载,至元八年(1271)设回回司天台,以札马鲁丁为提点。故所进万年历可能就是回回历。"稍颁行之",是指仅行用了很短时间,还是只作为其时制历的参考,因"万年历"失传,已不易详考。但《元史》刘秉忠、许衡、王恂、郭守敬诸传中,都说元朝初年所用金大明历年代已久,错误很多,应该改行新历。这些材料似皆说明授时历前并未施行过"万年历"、"回回历"等历法。

至元十三年(1276),平宋。忽必烈遂诏太子赞善王恂、都水少监郭守敬改制新历,设立太史局,并命御史中丞张文谦、枢密副使张易总领其事。王恂又举荐退休还乡的前中书左丞许衡参加。许衡等认为金虽改历,但止以宋纪元历略加增益,实未曾验天测候。乃与南北日官陈鼎臣、邓元麟、毛鹏翼、刘巨渊、王素、岳铉、高敏等分析考查历代历法,并建造仪器,分赴全国各地测候日月星辰的运行和日景,参别同异、酌取中数,以为历本。十六年改局为太史院,以王恂为太史令,郭守敬为同知太史院事。张文谦为昭文馆大学士,领太史院以总其事。同年太史院又得深明历理的大德杨恭懿共襄此事。十七年(1280)冬至历成,新历赐名"授时历"。十八年

(1281),颁行天下。

就在至元十八年,许衡、王恂先后病故,杨恭懿辞归。授时历制成,但推步方法、测验数据尚未整理定稿。王恂精于算术,郭守敬巧思过人。原本授时历制定中,历法理论和推步演算多为王恂负责,而仪器研制和观天测候悉归郭守敬安排。但到此时,整理授时历的全部担子就落到了郭守敬身上。在以后的几年中,他整理完成了《推步》七卷、《立成》二卷、《历议拟稿》三卷等书稿。二十年(1283),太子谕德李谦奉命撰写《历议》十篇,发明新历顺天求合之微,考证前代人为附会之失。认为此历可以行用永久。自古及斯,其推验之精,确未有出于此者。

授时历不论在实际测量,或理论推算都有辉煌成就。它是王恂、郭守敬和其他天文学家,在张文谦、张易、许衡领导下的集体创作。郭守敬由于享寿最高,有关授时历的文稿又多由他整理完成,故后来研究授时历的人总要提到他的名字。实际上郭守敬也确有很大贡献。

现在,许衡、王恂、郭守敬所撰的《授时历》及王谦《历议》都保存在《元史·历志》中,是研究授时历的最主要最基本的材料。

授时历自至元十八年颁行,到元惠宗至正二十八年(1368)共施行 88 年。朱元璋吴元年(1364)十一月乙未冬至,太史院使刘基率其属高翼上戊申(1368,即后来的明洪武元年)大统历。其法数推步悉依授时历。洪武元年改院为司天监,又置回回司天监。诏征元太史院使张佑、回回司天监黑的儿等 14 人,寻召回回司天台官郑阿里等 11 人至京议历法。三年改监为钦天,设天文、漏刻、大统历、回回历四科。以监令、少监统之。岁造大统民历、御览月令历、七政躔度历、六壬遁甲历、四季天象占验历、御览天象录,各以时上。其日月交食分秒时刻,起复方位,先期以闻。

洪武十七年(1384)闰十月,漏刻博士元统言,历以大统为名,而积分犹踵授时之数,非所以重始敬正也。况授时以至元辛巳(1281)为元,至洪武甲子(1384)积 104 年,年远数盈,渐差天度,合修改。七政运行不齐其理深奥。闻有郭伯玉者,精明九数之理,宜征令推算,以成一代之制。报可。于是提升元统为监令。统乃取授时历,去其岁实消长之说,于交食晷漏做了微小改动,重新编排,成书四卷,以洪武十七年甲子(1384)为元,命曰《大统历法通轨》。二十二年改监令、丞为监正、副。二十六年监副李德芳上言奏请恢复授时历至正辛巳为元及"周岁消长,百年各一"的岁实消长之法。元统奏辩。太祖说,二说皆难凭,但验七政交会行度无差者为是。此事不了了之。自此大统历元以洪武甲子,而推算仍依授时法。直到崇祯十七年(1644),又行用了 276 年。明亡后,南明小朝廷仍颁行大统历。《小腆纪年》载,到 1659 年(顺治十六年)冬十月戊子朔桂王朱由榔仍奉明正朔,颁行次年历书,直到 1662 年桂王为缅甸献于清廷,为吴三桂所杀为止。这样授时历共行用 382



年。是中国古历中行用最久的历法。

授时历还东传日本、朝鲜。元朝时期高丽王朝行用的就是授时历。其后李氏王朝修成的《高丽史》中，其五十一卷历志就载有授时历经全文。日本在德川幕府时代，宽文十二年出版了《改正授时历经》。次年，小川正意作《新勘授时历经及立成》。是时日本就改革宣明历，是否采用授时历有过争论。最终于贞享二年起行用的贞享历，仍汲取了授时历的原理和方法。

二、授时历的成就与特点

梅文鼎说：授时历不用积年，一凭实测，故自元迄明，承用三四百年法无大差。以视汉、晋、唐、宋之屡差屡改，不啻霄壤。故曰授时集诸家之大成。盖自西历以前，未有精于授时历者也。

阮元《畴人传》也说：推步之要，测与算二者而已。简仪、仰仪、景符、窥几之制，前此言测候者未之及也。垛叠招差、勾股弧矢之法，前此言算造者弗能用也。先之以精测，继之以密算，上考下求若应准绳，施行于世，垂四百年。可谓集古法之大成，为将来之典要者矣。自三统以来，为术者七十余家莫之伦比也。

确如斯言。授时历是集古历之大成，反映中国历法最高水平的压卷之作。

授时历用以前天文学家没有用过的数学方法，改进了历法。使用招差法三次差内插公式及弧矢割圆术，创立了更准确的推算日月五星运行、黄赤道差、黄赤道内外度和白赤、黄赤交点距限的新推算方法。授时历彻底废除了虚拟的上元积年。根据多年实测，得出以至元十八年(1281)辛巳年前冬至作为计算历元的各项天文根数：气应(冬至距其前甲子夜半的时间)、闰应(冬至距十一月平合朔的时距)、转应(冬至距月过近地点的时日)和交应(冬至距月过黄白降交点的时间)以及周应、合应、历应等数据。

中国古代各历多用分数来表示天文数据的奇零部分。授时历采纳南宫说撰神龙乙巳元历创立 100 为母法、曹士蔿符天历以一日为万分的先进经验。以日百刻、刻百分、分百秒，弧度也为度百分、分百秒的百进制。秒以下的微纤也一律从百进，大大减轻了天文计算的工作量。

授时历在研制过程中，曾遍考汉以来历书 40 余家，精思推算，考查探究其演变与得失，从中汲取有益的理论和方法。总结比较，授时历选取了其时比较先进的天文常数。它以 365.2425 日为回归年，以 365.2575 度为周天。从而得出岁差 1 分 50 秒，或 66 年 8 月退 1 度。这是取自杨忠辅的统天历。授时历朔策 29.530593 日，交终 27.212224 日，转终 27.5546 日。而赵知微重修大明历和耶律楚材西征庚午元历的朔望月、近点月、交点月与此相同。可知授时历关于月道运行的主要数据

是依赵知微、耶律楚材历法得出的。

杨忠辅最先发现回归年长古大今小不是常量。上推古代下测未来，首倡用“斗分差”校正的办法。斗分差 127，相当于百年回归年长减少 0.0001058 日。授时历接受这个概念，也有“岁实消长”之说，规定“周岁消长，百年各一”，“上考百年长一分，下推百年消一分”。即规定每隔 100 年，岁实应该减少 0.0001 日。用代数式表达如下：

$$统天历回归年长 = 365^d.2425 - 0.000001058(t-1199)$$

$$授时历回归年长 = 365^d.2425 - 0.000001(t-1281)$$

根据现代观测，是时合天的回归年长应为：

$$回归年长 = 365^d.242242 - 0.00000006(t-1199)$$

其中 t 为公元年数。由上式看出，虽然授时历比统天历稍有改进，但实际上它们的“斗分差”和岁实消长率都过大了。

授时历虽然有辉煌成就，但由于受到时代限制，有好多天文规律未能很好认识和掌握。例如，岁实 365.2425 日数值稍大，明元统又将其作为常数，废弃了岁实消长之说。行用日久，必然出现差错。在明代的中后期多次出现日月食与推算不应、舛误。授时历关于五星运动的数据大致与耶律楚材庚午元历相当。用以推算五星的运动、位置远不如回回天文学精密。所以梅文鼎说，五星之迟疾逆留，汉以前无言之者，汉以后语焉而不详。虽授时历号为精密，而于此未有精测。至西历乃能言之。

弧矢割圆术及其推导应用，在元初仍是一种进步的数学方法，它创立了我国自己的球面三角学理论和计算公式。但因所取的三角函数值和反三角函数值都很粗疏。为简化计算，授时历取圆周率为 3，这也增加了计算中的误差。因而用公式算出的黄赤道差，误差虽比大衍历要小，但却比姚舜辅纪元历用经验公式算出的还大。

由于受行星的摄动影响，地球轨道的长轴又称拱线发生旋转，使得近日点、远日点循着轨道运行。即长轴并不保持固定的方向。拱线旋转的周期约为 20000 年。约公元前 4000 年地球在 9 月 23 日即秋分日过近日点，在公元 1250 年冬至日过近日点。现在地球约在 1 月 4 日过近日点。授时历假定冬至日太阳运动最速，夏至日运行最缓。授时历颁行时近地点和冬至点相距不到 1 度，所差甚小。到明朝末年，太阳最速点已延迟到冬至后 6 日之多，依大统历推算太阳位置就有了较大误差。

授时历是中国古历最优秀的代表。由于时代和认识上的限制，行用日久出现一些舛误是正常的、难免的。



梅文鼎在《古今历法通考》"序言"中说："授时历集古法之大成。自改正七事，创法五端外，大率多因古术。故不读耶律文正之庚午元历，不知授时之五星；不读统天历，不知授时之岁实消长；不考王朴之钦天历，不知斜升正降之理；不考宣明历，不知气刻时三差；非一行之大衍历，无以知岁自为岁，天自为天；非淳风之麟德历，不能用定朔……"事实证明，授时历既有新的科学上的创造发展，也总结汲取了历代有价值的经验；既有创造性的理论推演，又有大规模严谨的观测实践。他们的工作和成就，是天文历法史上的大事，值得学习和称道。

第二节　日行盈缩、月行迟疾

一、日行盈缩的计算

地球绕日公转的轨道是椭圆。因此运动不是匀速的。过近日点时速度最大，过远日点时最慢。太阳视运动最大时日行1°.02，最小时约为0°.953。

北齐张子信首先发现太阳运动有疾徐，不是匀速的。隋末刘焯及其以后的天文学家都认为日月五星的运行在一定时期内是等加速的或等减速的。自隋大业历、皇极历开始，各历都给出太阳不均匀运动的改正表，即日躔表。根据二次差内插公式就可得出太阳盈缩运动的近似结果。太阳运行大于平均速度叫盈，不及平速曰缩。王恂、郭守敬的授时历认为把日月五星运动视作等加速、等减速比较粗疏，它们的运动速度不是时间的一次函数，而是时间的二次函数。在某一时间内运行的度数不是时间的二次函数，而是时间的三次函数。基于这个认识，因此授时历计算结果比过去要精密得多。

授时历认为太阳在冬至点速度最高，在夏至点速度最低。并根据实测得出，在冬至前、后，太阳只用 88.91 日就在天球上走一象限 91.31 度。按平均日行 1 度来说，在 88.91 日中它多走或超前了 2.40 度。就是说，按匀速运动，它需用 91.31 日。因冬至点日行最速，从秋分(定秋分)到冬至，或从冬至到定春分太阳运行比匀速运动少用了 2.40 日。夏至点太阳运行最慢，在夏至点前或后，需要 93.71 日太阳运行一象限。这比匀速多用了 2.40 日。按日期来说，它比匀速运动少走了 2.40 度。

授时历称冬至后的半岁 182.62125 日为盈历，夏至后的半岁为缩历。并给出盈初缩末限 88.909225 日，缩初盈末限 93.712025 日。称冬至后 88.909225 日以内为盈初限，冬至前 88.909225 日以内为缩末限；夏至后 93.712025 日以内为缩初限，夏至前 93.712025 日以内为盈末限。为此，授时历建立了两个不同的计算盈缩差的三次差内插公式。

(一)冬至前后盈初缩末历盈缩差算式

授时历将冬至后88.91日等分为6段,每段约长14.82日。从冬至时刻开始。通过实测得出的太阳实行度与平行度相较,得出每段的积差。所以各段积差为段末时刻的太阳实行度与平行度(每日1度)之差。将各段积差,以其段积日除之,得各段日平差,为该段时间内平均每日多走的分数。亦即该段中间之日超出平均运动的分数,又称盈加分。各段日平差与后段日平差相减,为一差;各段一差与后段一差相减,为二差。得数全以分数表示(10000分为1度),结果如表10—1。

表10—1 冬至后各段积差、日平差、一差、二差值

	积日	积差	日平差	一差	二差
冬至时	0		[513.32]	[37.07]	[1.38]
第1段	14.82	7058.0250	476.25	38.45	1.38
第2段	29.64	12976.3920	437.80	39.83	1.38
第3段	44.46	17693.7462	397.97	41.21	1.38
第4段	59.28	21148.7328	356.76	42.59	1.38
第5段	74.10	23279.9970	314.17	43.97	
第6段	89.92	24026.1840	270.20		

根据上述定义,冬至时刻的一差应该是38.45−1.38=37.07,日平差应为476.25+37.07=513.32分。

由上列数据,可以得出平立定三差。

以第1段日平差476.25分为泛平积。以第2段二差1.38减去第1段一差38.45,余37.07为泛平积差。另称第1段二差1.38折半得0.69为泛立积差,则:

$$定差=泛平积差+泛平积=37.07+476.25=513.32$$

$$平差=\frac{泛平积差-泛立积差}{段日}=\frac{37.07-0.69}{14.82}=2.46$$

$$立差=泛立积差/段日^2=0.69/14.82^2=0.0031$$

计算中段日需取14.8182(88.909225/6)日。

授时历称二至后第x日太阳实行度与平行度之差$f(x)$为盈缩差。对于冬至前后的盈初缩末限盈缩差的算式是:

$$\begin{aligned}盈缩差\ f(x)&=x\times[定差-x\times(平差+x\times立差)]\\&=x\times[5133200-x\times(24600+31\times x)]\\&\quad\times10^{-8}度\end{aligned}$$

其中x为距冬至之日数。

这个三次差内插公式的推导过程最关键的一步是通过令$g(x)=f(x)/x$,将三



次差内插转化为二次差内插得出的。$f(x)/x$ 即为冬至后第 x 日的日平差。欲求冬至后第 x 日的日平差，先将 x 日数化为段数，x 日为冬至后 $x/14.82$ 段。根据二次差展开公式，代入上表中有关数值，得：

$$f(x)/x=513.32-\frac{x}{14.82}\times(37.07)-\frac{1}{2}\times$$

$$\frac{x}{14.82}\times\left(\frac{x}{14.82}-1\right)\times 1.38$$

$$=513.32-\frac{(37.07-0.69)x}{14.82}-\frac{0.69x^2}{14.82^2}$$

$$=513.32-2.46x-0.0031x^2$$

所以

$$f(x)=513.32x-2.46x^2-0.0031x^3\times 10^{-4}\text{度}$$

利用这个式子计算某日的盈缩积差 $f(x)$ 要做平方、立方、乘、减多次运算。为此，授时历专门计算编制了数表，称作"布立成"。表中列出了每日的盈缩积差，又叫盈积度。若 x 不是整数，设 $x=m+t$，m 为不大于 89 的整数，$0<t<1$，则 $f(x)=f(m)+t\Delta m$，$f(m)$ 为表内第 m 日的盈缩积差，Δm 为表中第 m 日的盈加分。

对于冬至前后盈初缩末历布立成方法如下：

加分立差＝6×立差＝6×0.0031＝0.0186

平立合差＝2×平差＋加分立差

＝2×2.46＋0.0186

＝4.9386

盈加分＝定差－平差－立差

＝513.32－2.46－0.0031

＝510.8569

这样得到的是初日之数。要推次日及以后逐日，皆以加分立差，累加平立合差，即得逐日平立合差。以平立合差减其日加分，为次日加分。其加分累计之和即得各日盈缩积。做法见表 10－2。

表 10－2 盈初缩末历布立成法

积日	盈缩积	盈加分	平立合差	加分立差
初日	0	510.8569	4.9386	0.0186
第 1 日	510.8569	505.9183	4.9572	0.0186
第 2 日	1016.7752	500.9611	4.9758	0.0186
…	…	…	…	…
第 88 日	24009.3568	5.0593	6.5754	0.0186
第 89 日	24014.4161			

这个表还是利用招差法来制定的。因为盈缩积分是 x 的三次函数，累次求差时，在一差$[\Delta'_n=f(n+1)-f(n)]$、二差$(\Delta''_n=\Delta'_{n+1}-\Delta'_n)$之后还有三差$(\Delta'''_n=\Delta''_{n+1}-\Delta''_n)$。授时历分别名为盈加分、平立合差和加分立差。现在用 α、β、γ 表示冬至时的盈加分、平立合差和加分立差。

令 $a=513.32, b=2.46, c=0.0031$，则

$$
\begin{aligned}
f(x)&=513.32x-2.46x^2-0.0031x^3\\
&=ax-bx^2-cx^3\\
&=x\alpha+\frac{x(x-1)}{1\times2}\beta+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\gamma\\
&=(\alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3})x+(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2})x^2+\frac{\gamma}{6}x^3
\end{aligned}
$$

由此即可得出：

$$
\begin{aligned}
\gamma&=-6c=-0.0186\\
\beta&=-2b-6c=-4.9386\\
\alpha&=a-b-c=510.8569
\end{aligned}
$$

冬至前后 88.91 日(盈初缩末限)内按日的盈缩差就可以 α、β、γ 三个差据上述方法依次加减造表。

(二)夏至前后缩初盈末历盈缩差算式

授时历自夏至点起将其前后各 93.71 日同样分成 6 段。每段各得 15.62 日。通过实测的日躔实行度与平行度相较，得出每段的积差。其推日平差、一差、二差的方法与盈初缩末历(冬至前后)同。得数如表 10－3。根据日平差、一差、二差的定义，夏至时一差应是 36.47－1.33＝35.14。日平差应是 451.92＋35.14＝487.06。表中补上了初日值。

泛平积＝第 1 段日平差＝451.92 分

泛平积差＝第 1 段一差－第 1 段二差

＝36.47－1.33＝35.14 分

泛立积差＝第 1 段二差之半＝0.6650 分

由此可得出：

定差＝泛平积差 35.14＋泛平积 451.92＝487.06 分

$$平差=\frac{泛平差-泛立积差}{段日}=\frac{35.14-0.665}{15.6187}=2.21\text{ 分}$$

表 10—3 夏至后各段积差、日平差、一差、二差值

	积日	积差	日平差	一差	二差
夏至时	0	0	487.06	35.14	1.33
第1段	15.62	7058.9904	451.92	36.47	1.33
第2段	31.24	12978.6580	415.45	37.80	1.33
第3段	46.86	17696.6790	377.65	39.13	1.33
第4段	62.48	21150.7296	338.52	40.46	1.33
第5段	78.10	23278.4860	298.06	41.79	
第6段	93.72	24017.6244	256.27		

立差＝泛立积差 0.665/$(15.6187)^2$＝0.0027 分

授时历缩初盈末历(夏至前、后)盈缩差算式为：

盈缩差 $f(x)$

$=x\times$[定差$-x\times$(平差$+x\times$立差)]

$=x\times[4870600-x\times(22100+x\times27)]\times10^{-8}$度

$=487.06x-2.21x^2-0.0027x^3\times10^{-4}$度

其中 x 为距夏至的日数。

布立成时，先要求出夏至初日的一差、二差和三差。

加分立差(三差)＝6×立差 0.0027＝0.0162 分

平立合差(二差)＝2×平差 2.21＋加分立差 0.0162

＝4.4362 分

加分(一差)＝定差 487.06－平差 2.21－立差 0.0027

＝484.8473 分

与盈初缩末历(冬至前、后)相同。以上所推皆为夏至初日之数。要推次日及以后逐日，皆以加分立差 0.0162 累加平立合差，为逐日平立合差。以平立合差减其日加分，为次日加分。而加分累积之和，即为逐日盈缩积。这样得出的太阳缩初盈末历(夏至前后)盈缩差立成如表 10—4。

所以，夏至日前、后的 x 日的盈缩积分数也可表示为：

$$盈缩积\ f(x)=484.8473x-4.4362\frac{x(x-1)}{1\times2}$$

$$-0.0162\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}$$

以上我们分别给出了授时历计算盈初缩末限(冬至前后)和缩初盈末限(夏至

前后)太阳盈缩差 $f(x)$ 的算式及布立成方法。授时历计算月行迟疾和五星盈缩都采用同样的计算和布立成法。为以后叙述简单,这里将方法概括一下。

表 10—4 缩初盈末历盈缩差立成

积日	盈缩积	加分	平立合差	加分立差
初日	0	484.8473	4.4362	0.0162
第 1 日	484.8473	480.4111	4.4524	0.0162
第 2 日	965.2584	475.9587	4.4686	0.0162
第 3 日	1441.2171	471.4901	4.4848	0.0162
…	…	…	…	…
第 93 日	24010.5261	2.9771	5.9428	0.0162
第 94 日	24013.5032			

首先,根据由实测得到的实行度与平行度之较,做出积差表,计算出定差 a、平差 b 和立差 c。

积差表由 6 栏数值组成:段次 i,积日 in,积差 $f(in)$,平差 $g(in)$,一差 Δg_i,二差 $\Delta^2 g_i$。

段次、积日由授时历给出(月行为积限);积差由观测得出;平差=其段积差/其段积日(积限),五星平差=其段积差/段积日;一差 Δg_i 由相邻平差相较得出,如 $\Delta g_1 = g(1n) - g(2n)$,$\Delta g_2 = g(2n) - g(3n)$;二差 $\Delta^2 g_i$ 由相邻一差相较得出,如 $\Delta^2 g_1 = \Delta g_2 - \Delta g_1$,为常数。设段日(段限)$=n$。则:

定差 $a = g(1n) + (\Delta g_1 - \Delta^2 g_1)$

平差 $b = [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - \Delta^2 g_1/2]/n$

立差 $c = (\Delta^2 g_1/2)n^2$

可以看出,平立定三差的数值全由表中第 1 段的平差 $g(1n)$、一差 Δg_1、二差 $\Delta^2 g_1$ 数据得出。

由平立定三差可得出日月五星盈缩(迟疾)差 $f(x)$ 的算式:

$$f(x) = ax - bx^2 - cx^3$$

其次,求出定、平、立(a、b、c)三差之后,即可布日月五星盈缩(迟疾)立成,给出每日(限)的盈缩(迟疾)积度 $f(x)$。由 $f(x) = ax - bx^2 - cx^3$,代人 $x = 1, 2, \cdots, n$,可得到盈缩(迟疾)积差立成如表 10—5。

这里的一差(加分)是相邻积差 $f(x)$ 之较,二差(平立合差)是相邻一差(加分)之较,三差(加分立差)是前后二差之较。

很容易看出,由于三差为常数,只要得出初日的加分、平立合差和加分立差,依次加减即可造成日月五星盈缩(迟疾)立成表。

表 10—5　盈缩(迟疾)积差立成构成

积日	按日的积差 $f(x)$	一差	二差	三差
		加分	平立合差	加分立差
初日	$f(0)=0$	$a-b-c$	$2b+6c$	$6c$
第 1 日	$f(1)=a-b-c$	$a-3b-7c$	$2b+12c$	$6c$
第 2 日	$f(2)=2a-4b-8c$	$a-5b-19c$	$2b+18c$	$6c$
第 3 日	$f(3)=3a-9b-27c$	$a-7b-37c$	$2b+24c$	$6c$
第 n 日	$f(n)=na-n^2b-n^3c$			

初日加分立差(三差)$=6c$

初日平立合差(二差)$=2b+6c$

初日加分(一差)$=a-b-c$

其中 a、b、c 即前面得出的定、平、立三差。以加分立差(常数 $6c$)累加平立合差就得次日及以后逐日的平立合差。以平立合差减其日加分得次日加分。加分累积之和即为次日盈缩积度。

太阳运行盈缩差改正,实际上计算的是地球椭圆运动的中心差。中心差＝真近点角 $v-$ 平近点角 M,即由椭圆运动产生的太阳真黄经 L 和平黄经 L_0 之差。它的大小与地球轨道的偏心率 e 有关。考虑到 e 的三次项,其公式为:

$$L=L_0+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M$$

$$+\frac{13}{12}e^3\sin 3M-\frac{1}{4}e^3\sin M$$

式中 M 为平近点角,其值为平黄经与近日点黄经之差。地球轨道偏心率很小,它的数值又随时间 t 有一定变化。它的高次项下降很快,所以中心差主要由 e 的一次、二次项决定。

授时历颁行时(1281),e 值约为 0.0170,由 e 的一次项产生的最大中心差系数为 7013″或 1°.948(1°56′53″)。而授时历给出的最大盈缩差为 2.4014 度,当 360°制的 2°.367 或 2°22′01″(8520″.6),显然偏大。在大衍历颁行时(724),e 值约为 0.0172,由 e 的一次项引起的最大中心差系数为 7107″.9 或 1°.9744 (1°58′28″)。而大衍历给出的最大中心差系数为 2°.388＝143′.3＝8597″.4。从这点来看,授时历精度约与大衍历相当。一般认为,约在公元前 2 世纪希腊天文学家依巴谷首先发现太阳的运动有疾徐。公元 2 世纪托勒密将中心差系数定为 143′。大衍历、授时历的数值与此相当。大衍历、授时历都选取冬至点为日行最疾、夏至为日行最徐之处。在大衍历颁行的开元十二年(724),地球轨道近日点约在冬至点前 8°.6。而授时历颁行的至元十八年(1281),近日点与冬至点相距仅差 0°.5。再加上授时历采

用三次差内插法，所以授时历计算日行盈缩改正比大衍历精度有所提高。

二、月行迟疾的计算

东汉蔡邕、刘洪等发现月亮运动有疾徐，不是均匀的。自刘洪的乾象历设月离表，以近点月为周期，逐日给出月亮实行度分。不足1日部分采用线性内插法求出。隋刘焯皇极历始创用二次等间距内插法计算月亮运动。授时历创建平立定三次差内插法使计算又前进了一大步。

授时历将一近点月分作4个"象"，每"象"又分为7段，每段又分成12限。这样，1象有7段84限，一近点月(转周)共28段336限。授时历取一转周为27.5546日。这样，1象为6.88865日，每段为0.984093日，每限是0.08200774日。

在近地点，月亮运行最疾，自近地点入转开始，每6.88865日为1象。授时历计算月行迟疾，不用日数，而用限数来表达，可以避免日的小数的麻烦。取84为初限，168为中限，336为周限。自近地点开始起算。根据入转日及分秒，入转日在转中(13.7773日)以下，为疾历；已上，减去转中，为迟历。授时历称0～84限为疾初限，85～168限为疾末限；自远地点开始，0～84限为迟初限，85～168限为迟末限。

与日行盈缩相似，根据实测，授时历给出自近地点开始1象(84限)7段各段末实行度与平行度之较(积差)和平差、一差、二差各值如表10－6。积差，以其段积限除之，为各段限平差。各段限平差与后段相减，为一差。置一差与后段一差相减为二差。因二差为常数，由一二差求法可补上初日限平差、一差、二差各值。段限数12。

表10－6 月行各段积差、限平差、一差、二差值

	积限	积差分	限平差	一差	二差
初日	0		[11.1100]	[0.3840]	[0.0936]
第1段	12	128.7120	10.7260	0.4776	0.0936
第2段	24	245.9616	10.2484	0.5712	0.0936
第3段	36	348.3792	9.6772	0.6648	0.0936
第4段	48	432.5952	9.0124	0.7584	0.0936
第5段	60	495.2400	8.2540	0.8520	0.0936
第6段	72	532.9440	7.4020	0.9456	0.0936
第7段	84	542.3376	6.4564		

根据前面所述，可得出：

泛平积 $= g(1n) = 10.7260$

泛平积差 $= \Delta g_1 - \Delta^2 g_1$



$=0.4776-0.0936$

$=0.3840$

泛立积差$=\frac{1}{2}\Delta^2 g_1=0.0468$

定差 $a=g(1n)+(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)$

$=11.1100$

平差 $b=[(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)-\Delta^2 g_1/2]/12$

$=(0.3840-0.0468)/12$

$=0.0281$

立差 $c=(\Delta^2 g_1/2)/n^2$

$=0.0468/144=0.000325$

月行迟疾积算式为：

$$f(x)=ax+bx^2+cx^3$$

其中 x 为月亮过近(或远)地点前后的限数，$x\leqslant 84$。

凡求月行迟疾，皆以入历日(疾、迟)乘 12.20 限，得数在 84 限以下为初限 x；以上转减 168 限，得数为末限 x。

迟疾差 $f(x)$

$=x\times$[定差$-x\times$(平差$+x\times$立差)]

$=11.110000x-0.0281x^2-0.000325x^3\times 10^{-2}$度

$=[11110000-(28100+325\times x)\times x]\times x\times 10^{-8}$度

授时历将一近点月(转周)平分为 4 象。从近地点开始的半周(疾历)速度减慢的情况，与从远地点开始的半周(迟历)速度加快的情况一样，故用同一算式推步，只所得积差有迟疾之别而已。

为便于计算，授时历同时也给出布太阴迟疾立成之法。由前已知，为此首先要求出初限的一差(损益分)、二差(平立合差)和三差(损益立差)：

损益立差$=6\times$立差 $0.000325=0.001950$

初限平立合差

$=2\times$平差 $0.0281+$损益立差 0.001950

$=0.058150$

初限损益分(加分定差)

$=$定差 $11.11-$平差 $0.0281-$立差 0.000325

$=11.081575$ 分

以损益立差累加之，即得各限平立合差。太阴迟疾立成与太阳盈缩立成稍有不同。太阴迟疾立成到 80 限时，二差(平立合差)积至 0.21415 分，即达到平立合

差之极大值。授时历给出 81 限下的平立合差为 0.017809 分，82 限下为 0.017808 分，83 限下为 0，是益分之终。故 83、84 限一差（损益分）数值相等。83 限的疾积度为 542.916616 分，84 限的疾积度是 542.934424 分。自 84 限起速度从平均值逐渐变慢，疾积度（超出平行运动之度）逐渐减少。益分自此转为损分。至 86 限，其平立合差亦为 0.21415 分。自此以损益立差累减之，即得每限平立合差。一直到第 167 限，损分、疾积度（积差）又回复到 11.081575 分。第 168 限为 336 限的中点，到达远地点，积差为 0。至末限与初限同。各限损益分，以其限平立合差益减损加，即得次限损益分。以损益分益分加、损分减其限积差，便是次限迟疾积差。太阴迟疾立成如表 10－7。

表 10—7　太阴迟疾立成

限数	日率	积差	损益分	平立合差
初限	0	0	11.081575	0.058150
1	0.0820	11.081575	11.023425	0.060100
2	0.1640	22.105000	10.963235	0.062050
3	0.2460	33.068325	10.901275	0.064000
4	0.3280	43.969600	10.837275	0.065950
80	6.5606	542.560000	0.267575	0.214150
81	6.6426	542.827575	0.053425	0.017809
82	6.7246	542.881000	0.035616	0.017808
83	6.8066	542.916616	0.017808	0
84	6.8886	542.934424	0.017808	0.017808
85	6.9706	542.916616	0.035616	0.017809
86	7.0526	542.881000	0.053425	0.21415
87	7.1346	542.827575	0.267575	0.21220
165	13.5313	33.068325	10.963325	0.06010
166	13.6133	22.105000	11.023425	0.05815
167	13.6952	11.081575	11.081575	
168 限	13.7773			

设 $x=n+s$ 限，n 为整数，s 为小数，则：

$$f(x)=f(n)+s\delta_n$$

δ_n 为 n 限的损益分。

由以上布立成看出，用 $f(x)=ax+bx^2+cx^3=[11110000-(28100+325\times x)\times x]\times x\times 10^{-8}$ 度计算迟疾差时，当 $83\leqslant x\leqslant 85$ 时所得结果，与立成表稍有差异。

《元史・历志・授时历经》还给出另一种太阴迟疾立成表，称作“迟疾转定及积度”。《明史・历志・大统历法推步》中也给出类似的数表。此表是从入转日开始



以日数来计算列出月球运动超过匀速运动的积差。从远地点开始则计算列出其不及匀速运动的度数。表按日给出自入转日起每日"疾"和"迟"的积度。据此数值可很容易计算任何时刻的迟疾差。表中也给出每日所对应的初末限数。它的构造原理与上相似,就不赘述了。

授时历月行迟疾差的数值由月在近点月的位置决定。积差最大值为 5.43 度,合 5°.3512(19264″.2)。而由现代月离理论知,最大中心差值可达 6°.5(23446″)。授时历的数值偏低。月亮运动最为复杂,中心差外,出差、二均差、周年差都会对月亮位置产生很大影响。中历只考虑中心差还是不够的。

第三节 黄赤道差、内外度及白道交周

一、黄赤道差、黄赤道内外度的计算

《元史·郭守敬传》谓,授时历有:

> 创法凡五事:一曰太阳盈缩。用四正定气立为升降限,依立招差求得每日行分初末极差积度,比古为密。二曰月行迟疾。古历皆用二十八限。今以万分日之八百二十分为一限,凡析为三百三十六限,依垛叠招差求得转分进退,其迟疾数逐时不同,盖前所未有。三曰黄赤道差。旧法以一百一度相减相乘,今依算术勾股弧矢方圜斜直所容,求到度率积差,差率与天道实吻合。四曰黄赤道内外度。据累年实测,内外极度二十三度九十分,以圜容方直矢接勾股为法,求每日去极,与所测相符。五曰白道交周。旧法黄道变推白道以斜求斜,今用立浑比量,得月与赤道正交距春秋二正黄赤道正交一十四度六十六分,拟以为法。逐推月每交二十八宿度分,于理为尽。

上节介绍了授时历用招差法推算日月每日运行的速度和盈缩迟疾的积度。本节将讨论授时历创立弧矢割圆法用来计算黄赤道差,黄赤道内外度和白道交周的问题。

描述天体在天球上的位置,天文学通常采用地平、赤道、黄道三种坐标系统。

地平坐标,取地平圈为基本平面,天顶作基本点。经过天顶、天体和天底的大圆叫地平经圈。它总与基本平面垂直。地平坐标系描述天体位置的两个坐标是:地平纬度(又称高度)和地平经度(又叫方位角)。天体的高度沿地平经圈量度,指地平经圈与基本平面(地平圈)交点到天体的角距。地平经度是子午圈和通过天体的地平经圈在天顶的张角。自午(南)向西量度。即自地平圈的南点向西到经圈与

地平圈交点的弧长。

在赤道坐标系中,基本平面是赤道面。而以南北天极为基本点。过北天极和天体的大圆称作赤经圈。沿赤经圈测量天体离赤道的角距离叫作赤纬。由赤道向北的赤纬为正,向南为负。赤经就是天体的赤经圈和春分点的时圈在天极的交角。也即沿赤道量度自春分点到天体赤经圈与赤道交点的弧长。以春分点为起点,向东量度。赤经、赤纬是描述天体位置的坐标。

黄道坐标以黄道面为基本平面。南北黄极为基本点。描述天体位置的坐标是黄经和黄纬。经过两个黄极和天体的大圆(与黄道面正交)称黄经圈。天体的黄纬是沿此圈与黄道平面的角距。向北黄极方向的黄纬为正,向南为负。黄经是经过天体的黄经圈和通过春分点的黄经圈在黄极处的交角。即由春分点沿黄道到通过天体的黄经圈与黄道交点的弧长。由春分点算起,向东测量,由 0°到 360°。

在斜交的赤道黄道上,春分、夏至、秋分、冬至四点的黄经赤经数值相同。在其他位置上,黄经赤经数值之间就有差数。由赤经求黄经,或反之,由黄经求赤经,需加上这个差值的改正。黄赤经的最大差值为 $\arcsin tg(\varepsilon/2)$。由黄赤交角 ε 决定,其值约当 2°.5。

自春分点至夏至点,开始时黄经增加稍快,黄经大于赤经。到赤经为 $45°-\frac{1}{2}\times 2°.5=43°.75$ 或黄经为 $45°+\frac{1}{2}\times 2°.5=46°.25$时,差数最大达到 2°.5。这以后,赤经增加稍快,差数减小,至夏至差数又变成 0,此时黄经、赤经都等于 90°。

夏至以后,赤经增加较快,待走到赤经等于 $135°+\frac{1}{2}\times 2°.5=136°.25$、黄经为 $135°-\frac{1}{2}\times 2°.5=133°.75$ 时,差值达极大值2°.5。这以后,黄经增长较快,差值逐渐减小。至秋分时其差为 0,黄经、赤经同为 180°。自秋分经冬至回到春分点的情况与此相同。

中国古代测量天体在星空的位置采用黄道度与赤道度来表示。它们分别沿黄道、赤道测量,但自冬至点(也可自夏至点)起算。这一点与天文学的黄经、赤经自春分点起算不同,其间有一个象限的差别。另外,中国古代不用上述的黄道坐标系。黄道度是自冬至点到通过天体、南北天极大圆(赤经圈)与黄道交点的弧长,沿黄道量度得出的。自交点沿赤经圈至赤道的弧长,称作赤道内外度。显然黄道度与黄经概念和数值是有差别的(除起算点外,数值也不相同)。同一天体,自冬至(夏至)点,沿黄道和沿赤道测量所得的黄道度与赤道度之差,就是黄赤道差。太阳在黄道上运行。对于太阳来说,赤道内外度即太阳的赤纬。由此可得出太阳的去极度。太阳的黄赤道差,即由太阳黄道度计算赤道度所加的订正值。



已知太阳黄道度求它的赤道度和赤道内外度，古代天文学家只能在浑天仪上直接量取，没有一定的计算方法。我国后汉四分历，已注意到黄赤道的进退差，得出进差最大为 3 度，退差最大是 4 度。张衡以篾量取，将进退各定为 3 度。隋刘焯皇极历，初次提出了计算黄赤道差的方法，进退各取 4 度为限。大衍历改以 5 度为进退极限。这以后，直到北宋姚舜辅的纪元历，都采用比较粗疏的经验公式推步。到授时历，创用弧矢割圆法来进行计算，始开辟了一条新路。这与西方采用的球面三角法可以说是不谋而合。授时历是应用古代传世的勾股算法和北宋沈括的会圆术来解决这个疑难的。

在图 10－1 中，A 为春分点，D 为夏至点。$\overset{\frown}{AD}$为黄道，$\overset{\frown}{AE}$为赤道，$\overset{\frown}{ED}$为黄赤交角。设太阳位于 B 点，则$\overset{\frown}{BD}$为黄道积度，$\overset{\frown}{CE}$为赤道积度，$\overset{\frown}{CB}$为赤道内外度。

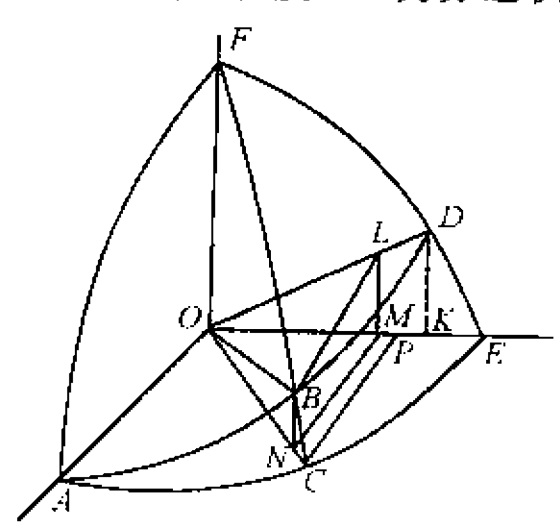


图 10－1 授时历用弧矢割圆术求黄赤道差及内外度

由《明史・历志・大统历法法原・弧矢割圆》知，授时历取周天 365.2575 度，以圆周率 3 除之，得周天直径 d121.7525 度，取作 $d=121.75$ 度。半径 $r=60.875$ 度。取用黄赤大距$\overset{\frown}{ED}$为 24 度（$s=\overset{\frown}{ED}=24$ 度）。自 D 作 $DK\perp OE$。

令$\overset{\frown}{DE}$之矢 $KE=v$，勾股形 OKD 之勾 $DK=p$，股 $OK=q$。则根据勾股算术，有：

$$p^2=r^2-(r-v)^2=dv-v^2$$

根据沈括会圆术，有：

$$s=p+v^2/d$$

从上二式中消去 p，得：

$$v^4-(d^2-2ds)v^2-d^3v+d^2s^2=0$$

将已知数值代入后，根据贾宪增乘开方法，求得上列四次方程的一个正根，$v=4.8482$ 度，由此得出：

$$q=r-v=56.0268\text{ 度}$$

$$p=\sqrt{dv-v^2}=23.8070\text{ 度}$$

如果根据授时历实测得出的 $s=23.90$ 度，化为 360°制，得黄赤交角 $\varepsilon=23°.5565$。周天 365.2575 度，以圆周率 3.1416 除，得周天径 $d=116.2648$ 度，半径 $r=58.1324$ 度。将这些数据代入，依照三角法计算得：

$$v=r(1-\cos\varepsilon)=4.8444\text{ 度}$$

$$q=r\cos\varepsilon=53.2880\text{ 度}$$

$$p=r\sin\varepsilon=23.2328\text{ 度}$$

从这里可以看出，授时历弧矢割圆法，取已知数周天直径 d 和黄赤大距 s 的近似值不够精密（d＝周天度/圆周率，圆周率取 3 太粗疏）。用沈括会圆术计算 v，又不够严格，所以得出的结果误差较大。

"求黄道各度下赤道积度和赤道内外度"，就是从已知的黄道积度$\overset{\frown}{BD}$弧度求$\overset{\frown}{CE}$弧（赤道积度）和$\overset{\frown}{CB}$弧的度数。

先从 B 作 $BL\perp OD$。用上述弧矢算法求得$\overset{\frown}{BD}$弧的矢 $LD=v_1$，OLB 勾股形的勾 $LB=p_1$，股 $OL=q_1$。

再从 L 作 $LM\perp OE$，从 B 作 $BN\perp OC$。连接 MN。不难证明，$MN=LB=p_1$。设 $p_2=BN$，$q_2=ON$，$v_2=NC$。因勾股形 OML 与 OKD 相似，所以

$$BN=LM=\frac{OL}{OD}\cdot DK\quad \text{或}\ p_2=q_1p/r$$

$$OM=\frac{OL}{OD}\cdot OK=\frac{q_1}{r}\cdot q$$

$$ON=\sqrt{OM^2+MN^2}$$

故

$$q_2=\sqrt{\left(\frac{qq_1}{r}\right)^2+p_1^2}$$

$$NC=OC-ON$$

或

$$v_2=r-q_2$$

因为 r、p、q、v、p_1、q_1、v_1 已知，所以可求出 v_2、p_2、q_2。在扇形面积 OBC 内，$\overset{\frown}{CB}$的矢 v_2 和勾 p_2 得出，用会圆术可求得赤道内外度$\overset{\frown}{CB}=p_2+v_2^2/d$

再从 C 作 $CP\perp OE$。勾股形 OPC 和 OMN 相似。设 $p_3=CP$，$q_3=OP$，$v_3=PE$，于是有：

$$CP=\frac{OC}{ON}\cdot MN\ \text{或}\ p_3=rp_1/q_2$$

$$OP=\frac{OC}{ON}\cdot OM\ \text{或}\ q_3=\frac{qq_1}{r}\cdot\frac{r}{q_2}=\frac{qq_1}{q_2}$$



$$PE=OE-OP=r-q_3 \text{ 或 } v_3=r-q_3$$

因此，在扇形 OCE 中，用会圆术可得赤道积度：

$$\widehat{CE}=p_3+v_3^2/d$$

这样，黄赤道差 $=\widehat{BD}-\widehat{CE}$。

授时历中勾、股、矢所表达的实际就是勾股八线中的正弦、余弦、正矢三线段。也就是在 $r=1$ 的单位圆中的三角函数中的正弦、余弦和正矢（1－余弦）。设以 λ 表示黄经 $\widehat{AB}$，α 表示赤经 $\widehat{AC}$，δ 表示太阳赤纬 $\widehat{CB}$，ϵ 表示黄赤交角。当分别以半径 r 除下列三式两端时，

$$p_2=q_1 p/r$$

$$p_3=rp_1/q_2=rp_1/\sqrt{\left(\frac{qq_1}{r}\right)^2+p_1^2}$$

$$q_3=qq_1/q_2=qq_1/\sqrt{\left(\frac{qq_1}{r}\right)^2+p_1^2}$$

可得：

$$\sin\delta=\sin\lambda\sin\epsilon$$

$$\cos\alpha=\cos\lambda/\sqrt{\sin^2\lambda\cos^2\varepsilon+\cos^2\lambda}$$

$$\sin\alpha=\sin\lambda\cos\epsilon/\sqrt{\sin^2\lambda\cos^2\varepsilon+\cos^2\lambda}$$

最后两式相除，便得：

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\lambda\cos\epsilon$$

因此可看出，授时历求赤道内外度和赤道积度两个算法，实际就是球面三角学中解正弧三角形的方法。

授时历只知用勾、股，而不能用正切。由弧度求弦、矢，计算很繁重，而得数很不准确。计算得出的 p、q、r、v 这几个数值都有一定误差，用它们求得的一系列数值及赤道内外度与黄赤道差也都有误差。潘鼐等将授时历经中"黄赤道率"表内积度之差及其误差，与按大衍历、纪元历求得相应误差加以比较得出，授时历的数据，误差比大衍历要小，但比纪元历要差。他们认为，这并非弧矢割圆术方法上的问题，乃是所用黄赤交角与圆周率数值以及会圆术的公式欠准确的缘故[①]。

关于"弧矢割圆"、"割圆求矢术"、求"黄赤道差"及"黄赤道内外度"的方法、推导、示意图可参看《明史·历志·大统历法法原》。授时历经步日躔中保存有"黄赤道率"表，给出黄道积度及相应的赤道积度，黄道度率、赤道度率，积差以及差率。在步中星中保存一份"黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分"表，给出据黄道积度

① 参考潘鼐，向英：《郭守敬》，上海人民出版社，1980年。

得出的赤道内外度、内外差、去极度、昼夜时刻等值。

二、白道交周的计算

《大统历法法原》说，白道交周是推白赤道正交，距黄赤道正交极数。

月亮在白道上运行。白道与黄道有约 5°9′的交角。授时历中采用 6 度，数值偏大。授时历称月亮的降交点为"正交"，月亮轨道的升交点为"中交"。相差 1 象限处，在黄道内外 6 度时，叫作"半交"。因此，当轨道降交点在春分点时，半交在黄道外 6 度，赤道内 18 度。当降交点在秋分点时，半交在黄道外 6 度，赤道外 30 度。当升交点在春分点时，半交在黄道内 6 度，赤道内 30 度。当升交点在秋分点时，半交在黄道内 6 度，赤道外 18 度。

上述 18 度与 30 度，化为 360°制分别为 17°.741 及 29°.569。若用精确黄白交角 5°9′及黄赤交角 23°32′来计算，这两个数值应为 18°.4 及 28°.7。可见授时历取值存在一定的误差。

根据大统历法法原的解释，白道交周就是指，当月球轨道的升交点（或降交点）正好位于冬至点（或夏至点）时，白道与赤道交点距春分点（或秋分点）为 14.66 度。这是距交的最大值。



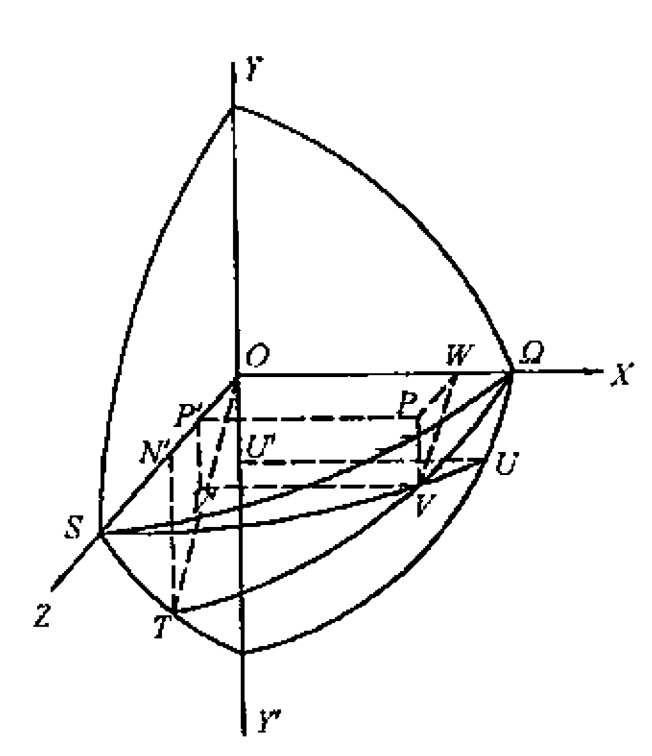


图 10－2　月轨降交点位于夏至点的白道交周

在图 10－2 中，设 Ω 为秋分点，S 为夏至点，$\widehat{\Omega T}$为赤道，$\widehat{\Omega S}$为黄道，$\widehat{SU}$为白道，V 为白道和赤道交点。现将球面投影到 $OY'Z$ 平面上，得白道距差图如图 10－3。黄道投影为 OS，赤道投影当 OT，白道投影是$\widehat{SV'U'}$。其中 V'、U'为 V、U 的投影。白道$\widehat{SVU}$的投影$\widehat{SV'U'}$应系椭圆曲线，近似地视作圆弧。图 10－3 中，过 S、V'、U'作一圆，圆心为 O'。



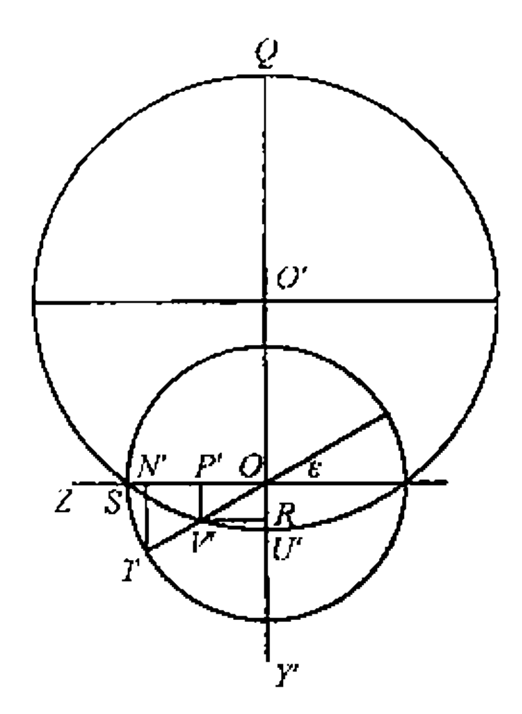


图 10－3　白道距差图

置实测白道出入黄道内外 6 度为 OU' 半弧弦，又为大圆弧矢。由前述弧矢割圆术周天径 d121.75 度，半径 $r=OS=60.875$ 度。$\widehat{ST}$为黄赤大距 23.90 度。

在勾股形 SQU' 中，根据勾股形相似定理，得出：

$$OS^2=OQ\times OU'$$

$$OQ=OS^2/OU'=60.875^2/6=617.628\text{ 度}$$

$$\text{大圆 }O'\text{直径}=OQ+OU'$$

$$=617.628+6$$

$$=623.628\text{ 度}$$

在 O 圆中，按会圆术和勾股算术，有：

$$\widehat{ST}=TN'+SN'^2/d$$

$$=TN'+SN'^2/121.75=23.90$$

$$d=TN'^2/SN'+SN'=121.75$$

解方程式，得：

$$TN'=23.710\text{ 度},SN'=4.807\text{ 度}$$

$$ON'=OS-SN'=56.068\text{ 度}$$

过 V' 作 $V'P'\perp OS$，$V'R\perp OU'$。令 $OR=x$，则：

$$RV'=OP',OR=V'P'=x$$

在勾股形 $QV'U'$ 中，有：

$$V'R^2=(QO+OR)(OU'-OR)$$

$$=(617.63+x)(6-x)$$

因勾股形 $ON'T$ 与 $OP'V'$ 相似，有：

$$OP'=ON'\cdot P'V'/TN'$$



或 $$V'R=ON'\cdot OR/TN'$$

$$V'R=56.068\times x/23.710=2.365x$$

所以

$$(617.63+x)(6-x)=(2.365x)^2$$
$$=5.593x^2$$

整理移项得出：

$$6.593x^2+611.63x-3705.78=0$$

取正根，得 $x=5.707$ 度。大统历法法原白道交周中取此值为 5.70 度，称作容阔。由此得出 $V'R$13.48 度，为容半长。由勾股算法及相似三角形，可算出 $OV'=14.63$ 度。

在图 10－2 的赤道平面 ΩTO 中，可知 $OV'=WV$，在赤道平面上，根据勾股形高定理，可得出：

$$WV^2=W\Omega\cdot(d-W\Omega)$$

$WV=OV'=14.63$，$d=121.75$，代入后整理得出：

$$W\Omega^2-121.75W\Omega+214.0369=0$$

解之，得：

$$W\Omega=1.784\text{ 度}$$

根据会圆术，有：

$$\overset{\frown}{V\Omega}=WV+W\Omega^2/d$$
$$=14.63+1.784^2/121.75$$
$$=14.63+0.03=14.66\text{ 度}$$

如根据前面得出的 $OR=V'P'=x=5.707$ 度计算，则得出 $OV'=14.655$ 度，$W\Omega=1.79$ 度，最后得出的 $\overset{\frown}{V\Omega}$ 为 14.68 度，相差 0.02 度。

$\overset{\frown}{V\Omega}$14.66 度，就是授时历得出的白赤道正交，距黄赤道正交极数。

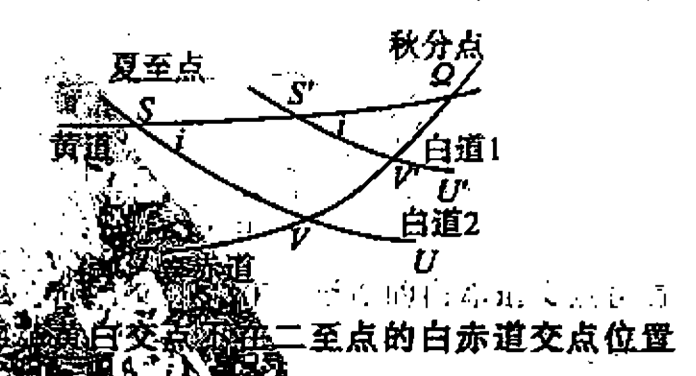


图 10—4 黄白交点不在二至点的白赤道交点位置

如果黄白交点不在二至点上，而是在二至点与二分点之间，如图 10—4 中 S'，斯时赤白交点 V' 到二分点的距离 $V'\Omega$ 显然小于 $V\Omega$，所以 $V\Omega$ 是赤白交点距黄赤交点（二分点）的最大距弧。当 S' 位于 S、Ω 之间时，称 SS' 为初限；若在 Ω 以东，则用



半周天减去 SS'，余数仍小于 1 象限，称为末限。在图 10－4 中，设 $S'U'$ 为观测时的白道，SS' 为初限，S' 在 $S\Omega$ 之间。

近似地将球面三角形 $SV\Omega$ 视作平面三角形。在 $S'V'\Omega$ 和 $SV\Omega$ 两三角形中，黄白交角 i 角相近，可视作相似形。故有：

$$VV'=V\Omega\times SS'/S\Omega$$
$$=(14.66/91.314375)\times \text{初末限}$$

$\widehat{VV'}$ 称作定差，于是有：

$$\widehat{V'\Omega}=\widehat{V\Omega}-\widehat{VV'}=14.66-\text{定差}$$
$$=14.66-\text{初末限}\times 14.66/91.314375$$

$\widehat{V'\Omega}$ 称为距差，乃观测时任意白道和赤道的交点与黄赤交点（春分点或秋分点）间的距弧。

白道赤道交角，也就是白道赤道两交点（正交、中交）间中点（又称半交）处的白道出入赤道内外度（距弧）。《元史·历志·步月离》给出计算它的经验公式：

月离赤道后半交白道出入赤道内外度分（白赤交角）

$=23.90$ 度 $\pm$ 定差度分 $(VV')\times 25/61$

月离黄道正交（即图中 S' 点）在冬至后宿度取减号，夏至后宿度用加号。月离赤道正交后（降交）为外，中交（升交）后为内。具体推步方法将在步月离术中再做介绍。

第四节　五星盈缩的计算及布立成

与日行盈缩、月行迟疾一样，授时历也用招差法计算五星运动的盈缩。

五星运动比较复杂。授时历把行星运动一周天 365.2575 度，等分成 4 个象限。只有火星例外。火星分作 4 象，其中盈初、缩末两象只用 2/3 象限，缩初、盈末两象各占 4/3 象限。即火星的盈初、缩末限合用 1/3 周天度，缩初、盈末限各用 1/3 周天度（121.7525 度）。再把木、土、水、金每一象限和火星的盈初、缩末、缩初、盈末限行度各分成 8 段。这样，木、土、水、金四星每段长 11.4143 日。为便于观测和计算取作 11.50 日。火星盈初缩末限每段长 7.6095 日，缩初盈末限每段长 15.2190625 日。出于同样理由分别取为 7.625 日和 15.25 日。根据实测给出五星各自积差表。

木星盈缩积差表如表 10－8（立差加，平差减）。

根据定义，可补上初日泛平差、泛平较、泛立较之值。

泛平差＝所测积差/该段积日

表 10－8　木星盈缩积差表

段次 i	积日 in	积差 $f(in)$	泛平差 $g(in)$	泛平较 Δg_i	泛立较 $\Delta^2 g_i$
初日			0.10897000	0.00329199	0.00062422
第 1 段	11.50	1.215297115	0.10567801	0.00391621	0.00062422
第 2 段	23	2.3405214	0.1017618	0.00454043	0.00062422
第 3 段	34.50	3.354137265	0.09722137	0.00516465	0.00062422
第 4 段	46	4.23460912	0.09205672	0.00578887	0.00062422
第 5 段	57.5	4.960401375	0.08626785	0.00641309	0.00062422
第 6 段	69	5.50997844	0.07985476	0.00703721	0.00062422
第 7 段	80.5	5.861804725	0.07281745	0.00766153	
第 8 段	92	5.99434464	0.06515592		

泛平较＝次段泛平差－本段泛平差

泛立较为次段泛平较与本段泛平较表列数值之差。

初段平立较$=\Delta g_1-\Delta^2 g_1$

$=0.00391621-0.00062422$

$=0.00329199$

定差 a ＝一段泛平差 $g(1n)+(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)$

$=0.10567801+0.00329199$

$=0.1089700$

平差 $b=[(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)-\Delta^2 g_1/2]/$段日 n(11.5 日)

$=[(0.00329199-0.00031211)]/11.5$

$=0.00025912$

立差 $c=(\Delta^2 g_1/2)/n^2=0.00000236$

由泛平较、泛立较定义知，表中泛平较 $\Delta g_i<0$，$\Delta^2 g_i>0$。故得出平差 b 减，立差 c 加。

火星缩初盈末积差表(见表 10－9，平差负减，立差加)中，取四次差 $\Delta^3 g_i$ 为 0 的 $\Delta^2 g_i$0.000395821 为泛立较。

较较$=\Delta^2 g_i-\Delta g_1$

$=0.00395821375-0.001326483125$

$=0.002631731$

定差 $a=g(1n)+$较较

$=0.29713127+0.00263173$

$=0.2997630$

平差 $b=$较较/段日 $n+[($泛立较$)/2]/$段日 n



$=0.00263173/15.25$

$+(0.0039582138/2)/15.25$

$=0.00030235$

立差 $c=$(泛立较 $\Delta^2 g_i/2)/n^2$

$=0.000851$

由泛平较、泛立较定义知，表中 $\Delta g_i<0$，泛平差前大后小，$\Delta^2 g_i$ 为正值，泛平较前小后大。所以立差 c 为加。平差应为 $b=[(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)-\Delta^2 g_1/2]$/段日 11.5。但这里 $\Delta g_1<\Delta^2 g_i$。所以 $b=[\Delta g_1-\frac{3}{2}\Delta^2 g_i]/n=\Delta g_1/n-\frac{3}{2}\Delta^2 g_i/n$。古代只做正数运算，反减之，而得 $b=\left(\frac{3}{2}\Delta^2 g_i-\Delta g_1\right)/n=[(\Delta^2 g_i-\Delta g_1)+\frac{1}{2}\Delta^2 g_i]/n=(\Delta^2 g_i-\Delta g_1)/n+\Delta^2 g_i/2n$。这样，平差 b 为负减。

表 10—9　火星缩初盈末积差表

段次 i	积日 in	积差 $f(in)$	泛平差 $g(in)$	泛平较 Δg_i	泛立较 $\Delta^2 g_i$
初日	0		0.2997630	0.00263173	0.00395821
第1段	15.25	4.53125186	0.29713127	0.00132648	0.00135770
第2段	30.5	9.10296145	0.29845775	0.00268418	0.00655873
第3段	45.75	13.53167090	0.29578355	0.00924291	0.00395821
第4段	61.0	17.47897904	0.28654064	0.01320112	0.00395821
第5段	76.25	20.84366307	0.27333951	0.01715934	0.00395821
第6段	91.50	23.43133624	0.25618018	0.02111755	0.00395821
第7段	106.75	25.09243528	0.23506263	0.02507577	
第8段	122.0	25.61837472	0.20998686		

火星盈初缩末积差表（见表 10—10，立差减，平差减）中，泛平较前多后少，应加泛立较。

初日下平立较 $=\Delta g_1+\Delta^2 g_1$

$=0.061398473+0.001319792$

$=0.062718265$

$=\Delta g_1-(-\Delta^2 g_1)$

表 10—10 火星盈初缩末积差表

段次	积日	积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	7.625	6.26825123	0.822065735	0.06139847	0.001319792
第 2 段	15.25	11.60017574	0.76066726	0.06007868	0.001319792
第 3 段	22.875	16.02596379	0.70058858	0.05875889	0.001319792
第 4 段	30.50	19.66901362	0.64182969	0.05743910	0.001319792
第 5 段	38.125	22.27989148	0.58439060	0.05611930	0.001319792
第 6 段	45.75	24.16822860	0.52827129	0.05479951	0.001319792
第 7 段	53.375	25.33155625	0.47347178	0.05347972	
第 8 段	61.00	25.61951566	0.419992060		

定差＝$g(1n)$＋初日下平立较

$=g(1n)+(\Delta g_1+\Delta^2 g_1)$

$=0.822065735+0.062718265$

$=0.884784$

平差＝(初日下平立较＋$\frac{1}{2}$泛立较)/段日 n

$=\left[\Delta g_1-(-\Delta^2 g_1)-\left(-\frac{1}{2}\Delta^2 g_1\right)/2\right]/7.625$

$=(0.062718265+0.001319792/2)/7.625$

$=0.00831189$

立差＝$\frac{1}{2}\Delta^2 g_1/n^2=(-\Delta^2 g_1)/(2\times 7.625^2)$

$=0.00001135$

泛平较值是负数($\Delta g_1<0$)，故平差为减。泛平较数值前大后小，所以泛立较值也是负数。即 $\Delta^2 g_1<0$，故立差 c 也为减。

土星盈历积差表(见表 10－11，立差加，平差减)中，泛平差前大后小，泛平较前小后大，泛平较数值大于 1.5×泛平较，故平差减，立差加。

初日平立较＝第 1 段泛平较－泛立较

$=\Delta g_1-\Delta^2 g_1=0.00509180$

定差＝初日平立较＋第 1 段泛平差

$=g(1n)+(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)$

$=0.151461$

平差＝(初日平立较－0.5×泛立较)/段日 n

表 10－11 土星盈历、缩历积差表

段次	积日	盈历积差	泛平差	泛平较	泛立较	缩历积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	11.50	1.68324583	0.14636920	0.00584033	0.000748535	1.24197427	0.10799776	0.00305273	0.000875495
第 2 段	23.0	3.23216401	0.14052887	0.00658887	0.000748535	2.41373569	0.10494503	0.00392823	0.000875495
第 3 段	34.5	4.62093009	0.13394000	0.00733740	0.000748535	3.48507969	0.10101680	0.00480372	0.000875495
第 4 段	46.0	5.82371960	0.12660260	0.00808594	0.000748535	4.42580168	0.09621308	0.00567922	0.000875495
第 5 段	57.5	6.81470867	0.11851666	0.00883447	0.000748535	5.20569709	0.09053286	0.00655471	0.000875495
第 6 段	69.0	7.56807111	0.10968219	0.00958301	0.000748535	5.79456135	0.08397915	0.00743031	0.000875495
第 7 段	80.5	8.05798419	0.10009918	0.01033154		6.16241100	0.07654894	0.00830571	
第 8 段	92.0	8.25862288	0.08976764			6.27837808	0.06824324		

$=[(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)-0.5\times\Delta^2 g_1]/11.50$

$=0.00041022$

立差$=0.5\times$泛立较$/n^2=0.00000283$

土星缩历积差表(立差加,平差减)也列于表10－11,与盈历相同,泛平差数值前大后小,泛平较数值为减。泛平较数值前小后大,故泛立较数值为加。

$|\Delta g_1|>1.5\times\Delta^2 g_1$,平差为减,立差为加。

平立较＝第1段泛平较Δg_1－第1段泛立较$\Delta^2 g_1$

$=0.00217724$

定差$a=g(1n)+(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)$

$=0.110175$

平差$b=[(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)-0.5\times\Delta^2 g_1]/n$

$=0.00015126$

立差$c=0.5\times\Delta^2 g_1/n^2=0.00000331$

金星盈缩积差表(表10－12,立差加,平差减)与土星盈缩积差表相似,泛平差前多后少,泛平较数值为负值,故平差为减;泛平较数值(绝对值)前少后多,泛立较数值为正,故立差为加。

表10－12 金星盈缩积差表

段次	积日	积差	泛平差	泛平较	泛立较
第1段	11.5	0.40213410	0.03496818	0.00055976	0.000372945
第2段	23	0.79139366	0.03440842	0.00093271	0.000372945
第3段	34.5	1.15491208	0.03347571	0.00130655	0.000372945
第4段	46	1.74982276	0.03217006	0.00167860	0.000372945
第5段	57.5	1.75325909	0.03049146	0.00205154	0.000372945
第6段	69	1.96235448	0.02843992	0.00242449	0.000372945
第7段	80.5	2.09424232	0.02601543	0.00279743	
第8段	92	2.13605600	0.023218		

平立较$=\Delta g_1-\Delta^2 g_1=0.000186818$

定差$a=0.035155=\Delta g_1-\Delta^2 g_1+g(1n)$

平差$b=[(\Delta g_1-\Delta^2 g_1)-0.5\times\Delta^2 g_1]/11.5$

$=0.00000003$

立差$c=0.5\times\Delta^2 g_1/11.5^2=0.00000141$

水星与土、金相似,泛平差前多后少,平差为减,立差为加。水星盈缩积差表见表10－13。

表 10—13 水星盈缩积差表

段次	积日	积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	11.5	0.44084735	0.03833455	0.00080839	0.000372945
第 2 段	23	0.86310168	0.03752616	0.00118134	0.000372945
第 3 段	34.5	1.25389638	0.03634482	0.00155428	0.000372945
第 4 段	46	1.60036484	0.03479054	0.00192723	0.000372945
第 5 段	57.5	1.88963104	0.03286331	0.00230017	0.000372945
第 6 段	69	2.10885666	0.03056314	0.00267312	0.000372945
第 7 段	80.5	2.24529211	0.02789002	0.00304606	
第 8 段	92	2.28564432	0.02484396		

平立较＝0.0004354475

定差 a＝0.038770

平差 b＝0.00002165

立差 c＝0.00000141

以上根据授时历五星实测得出的积差表，经计算给出了水、火、木、金、土五星盈缩的平立定三差数值。根据 $F(x)=ax+bx^2+cx^3$，即可计算五星运动盈缩差。

《元史・历志・步五星》说，置各星立差(c)，以初末限(x)乘之，去加减平差(b)，所得又以初末限乘之，去加减定差(a)，再以初末限 x 乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即所求盈缩差 $F(x)$。

$$F(x)=x\times[\text{定差 } a\pm x\times(\text{平差 } b\pm x\times\text{立差 } c)]$$

《元史・历志・步五星》给出的五星平立定三差值与我们上面推出的完全相同。只是为了便于整数运算，元史历志步五星术的三差数值各乘了 10^8。故所得结果需要"满亿为度"，即需要乘 10^{-8} 后，才能得到以度为单位表示的盈缩差。

还有一点需要注意的，元史及上面推导给出的平差、立差的加减号，是供元史所书盈缩差公式使用的。与采用 $F(x)=ax+bx^2+cx^3$ 公式计算的 b、c 正负符号有时是不同的。

授时历用招差法计算日月五星盈缩迟疾的内插方法与牛顿向前插值公式一样。

$$f(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots$$

其中 $\Delta y_0=y_1-y_0$，$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$

授时历中有 $f(x)/x=g(x)$，$g(x)$为平差。$\Delta g_0=g(1n)-g(0)$，$\Delta^2 g_0=\Delta g_1-$

Δg_0，三次差为 0。

令 $x=tn$，i 为段次，n 是段长，$t\in[0,i]$。则 x 日的段数$=\frac{x}{n}$。以 $g(x)$ 作 $f(x)$ 代入上式，有：

$$
\begin{aligned}
g(x_0+x)&=g(0)+\frac{x}{n}\Delta g_0+\frac{1}{2}\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)\Delta^2 g_0\\
&=g(0)+\frac{x}{n}\Delta g_0+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{n^2}-\frac{x}{n}\right)\Delta^2 g_0\\
&=g(0)+\left(\frac{\Delta g_0}{n}-\frac{\Delta^2 g_0}{2n}\right)x+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 g_0}{n^2}x^2\\
&=g(1n)-\Delta g_0+\left(\frac{\Delta g_0}{n}-\frac{\Delta^2 g_0}{2n}\right)x+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 g_0}{n^2}x^2\\
&=g(1n)-(\Delta g_1-\Delta^2 g_0)\\
&\quad+\frac{x}{n}\left(\Delta g_1-\Delta^2 g_0-\frac{1}{2}\Delta^2 g_0\right)+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 g_0}{n^2}x^2\\
&=a+bx+cx^2
\end{aligned}
$$

其中

$$a=g(1n)-(\Delta g_1-\Delta^2 g_0)$$

$$b=\left[(\Delta g_1-\Delta^2 g_0)-\frac{1}{2}\Delta^2 g_0\right]/n$$

$$c=\frac{1}{2}\Delta^2 g_0/n^2$$

平差 $g(1n)$ 总是正数，一次差 Δg、二次差 $\Delta^2 g$ 有正有负。二次差为常数。因此，定差 a 总是正数，平差 b、立差 c 可正可负。由下式计算盈缩差：

$$\text{盈缩差 } f(x)=ax+bx^2+cx^3$$

下面据此再重新计算五星的平(b)立(c)定(a)三差。这里代数运算与上述历表全用正数不同。

木星：泛平较 $\Delta g_i<0$，泛立较 $\Delta^2 g_i<0$。

$$
\begin{aligned}
a&=g(1n)-(\Delta g_1-\Delta^2 g_0)\\
&=0.10567801-(-0.00391621+0.00062422)\\
&=0.10897\\
b&=(\Delta g_1-1.5\times\Delta^2 g_0)/n\\
&=(-0.00391621+1.5\times 0.00062422)/11.5\\
&=-0.00025912\\
c&=0.5\times\Delta^2 g_0/n^2=-0.00000236
\end{aligned}
$$

火星缩初盈末历：泛平较 $\Delta g_i<0$，泛立较 $\Delta^2 g_i<0$。因 $\Delta g_1>0$，$\Delta^2 g_i>\Delta g_1$，术



用较较，相当于取 $\Delta^2 g_0=0.00395821$。

$$a=g(1n)-(\Delta g_1-\Delta^2 g_0)$$
$$=0.29713127-(0.00132648-0.00395821)$$
$$=0.2997630$$
$$b=(\Delta g_1-1.5\times\Delta^2 g_0)/n$$
$$=(0.00132648-1.5\times0.00395821)/15.25$$
$$=-0.00030235$$
$$c=0.5\times\Delta^2 g_0/n^2=0.00000851$$

火星缩初盈末历 $\Delta^3 g_0$、$\Delta^3 g_1$ 不为 0，所以历术用特殊方法处理。

火星盈初缩末历：泛平较 $\Delta g_i<0$，泛立较 $\Delta^2 g_i>0$。

$$a=g(1n)-(\Delta g_1-\Delta^2 g_0)$$
$$=0.822065735-(-0.06139847-0.001319792)$$
$$=0.884784$$
$$b=(\Delta g_1-\Delta^2 g_0-0.5\times\Delta^2 g_0)/n$$
$$=(-0.06139847-1.5\times0.001319792)/7.625$$
$$=-0.00831189$$
$$c=0.5\times\Delta^2 g_0/n^2=0.00001135$$

土星盈历：泛平较 $\Delta g_i<0$，泛立较 $\Delta^2 g_i<0$。

$$a=0.14636920-(-0.00584033+0.000748535)$$
$$=0.151461$$
$$b=(\Delta g_1-1.5\times\Delta^2 g_0)/n$$
$$=-0.00041022$$
$$c=0.5\times\Delta^2 g_0/n^2=-0.00000283$$

土星缩历：泛平较 $\Delta g_i<0$，泛立较 $\Delta^2 g_i<0$。

$$a=0.110175$$
$$b=-0.00015126$$
$$c=-0.00000331$$

金星盈缩历：泛平较、泛立较皆小于 0。

$$a=0.035155$$
$$b=-0.00000003$$
$$c=-0.00000141$$

水星盈缩历：泛平较、泛立较全为负数。

$$a=0.038770$$

$$b=-0.00002165$$

$$c=-0.00000141$$

可以看出，平立定三差数值相同。但由于采用公式不同，立差 c 的符号大多相反。所得盈缩差结果完全一致。

求出了五星盈缩的平立定三差后，就可以利用上述的 $f(x)$、$F(x)$ 公式，计算任一 x 的盈缩差了。但这样做，要经过多次加减、乘方的运算。为了简便，可以计算列出每日五星的盈缩积差的数表。这就是布五星立成。

由 $f(x)=ax+bx^2+cx^3$ 知道，要计算每日的盈缩差，只要将 $x=1,2,3\cdots$ 代入上式即可。根据差分的定义，知一次差（加分）$\Delta_0=f(1)-f(0)$，$\Delta_1=f(2)-f(1)$，…，$\Delta_n=f(n+1)-f(n)$；二次差 $\Delta_0^2=\Delta_1-\Delta_0$，$\Delta_1^2=\Delta_2-\Delta_1$，…；三次差 $\Delta_0^3=\Delta_1^2-\Delta_0^2$，$\Delta_1^3=\Delta_2^2-\Delta_1^2$，…，可以得出与表 10－5 完全类似的五星盈缩积差立成。因所用 $f(x)=ax+bx^2+cx^3$，与表 10－5 $f(x)=ax-bx^2-cx^3$ 不同，立成中积差、加分（一次差）各项系数符号皆为正号。如 $x=n$ 日的积差 $f(n)=na+n^2b+n^3c$ 等与表 10－5 稍异。以 $x=3$ 为例，$f(3)=3a+9b+27c$，加分为 $a+7b+37c$；而在表 10－5 中，$f(3)=3a-9b-27c$，加分是 $a-7b-37c$。

立成中，三次差（加分立差）其值 $6c$ 已为常数。因此，知道了 a、b、c 定平立三差后，即可求出初日的一次差（加分）$A=a+b+c$，二次差（平立合差）$B=2b+6c$，三次差（加分立差）$C=6c$。以加分立差 C，加平立合差 B，即得次日的平立合差；B 累加 C，即得逐日平立合差。以初日平立合差加初日加分，得次日（1 日）加分。每日的平立合差加其日加分，即得次日加分。其加分累积之，得次日盈缩积差。即 $f(n)=\sum_{0}^{n-1}$加分。

求出了五星的定平立三差 a、b、c 后，即可根据 $A=a+b+c$，$B=2b+6c$，$C=6c$ 得出初日的各次差。这样，只要根据 a、b、c 的数值，只用加减法，就可得出五星盈缩立成表。

根据五星盈缩立成，可以很容易得出五星盈缩差。如 x 不是整数，设 $x=m+t$，m 为整数，$0<t<1$，则 $f(x)=f(m)+t\Delta m$，$f(m)$ 为表内第 m 日的盈缩积差，Δm 为表内第 m 日的加分值。

现以木星为例，用上述方法，布木星盈缩立成如表 10－14。

$$a=0.10897$$

$$b=-0.00025912$$

$$c=-0.00000236$$

$$A=0.10870852$$



$$B=-0.00053240$$

$$C=-0.00001416$$

表 10－14 木星盈缩立成(日)

积日	盈缩积度	加分	平立合差	加分立差
0		0.10870852	－0.00053240	－0.00001416
1	0.10870852	0.10817612	－0.00054656	－0.00001416
2	0.21688464	0.10762956	－0.00056072	－0.00001416
3	0.32451420	0.10706884	－0.00057488	－0.00001416
4	0.43158304	0.10649396	－0.00058904	－0.00001416

古代不用负数运算，定平立三差皆为正值。运算中加减有时与上述不同。因此布立成时有：

$$A=a-b-c, B=2b+6c, C=6c$$

A、B、C 为初日加分、平立合差和加分立差。

加分立差为常数，每日相同。

次日(1 日)平立合差$=B+C$

2 日平立合差$=B+2C$

3 日平立合差$=B+3C$

累加，得每日平立合差。

次日(1 日)加分＝初日加分 A－初日平立合差 B

2 日加分＝1 日加分$(A-B)$－1 日平立合差$(B+C)$

$=A-2B-C$

3 日加分＝2 日加分$(A-2B-C)$－2 日平立合差$(B+2C)$

$=A-3B-3C$

$(n+1)$日加分＝n 日加分－n 日平立合差。加分累积之，即盈缩积分 $f(x)$。

$$f(n+1)=\sum_{0}^{n}\text{加分}$$

这样得到的五星盈缩立成与前数值(表 10－14)相同，而没有负数出现。

《元史·历志·授时历经·步五星》中，介绍了根据五星平合及诸段入历度(距近日点的角度)求盈缩差的两种方法。

其一，根据五星入历度的盈缩初末限 x，由

$$F(x)=x[\text{定差}\pm x(\text{平差}\pm x\times\text{定差})]$$

计算得出。

其二，利用五星盈缩立成，线性内插得到。方法是：置盈缩历 x，以历策(15.2190625 度)除之，为策数 m，不尽为策余 t(不足一策的度数)。以立成表 m 策

条下的损益率与 t 相乘，再以历策除之，得数，益加损减 m 策条下的盈缩积，即得所求盈缩差。

这里说的五星盈缩立成表，《授时历经》中没有刊出。它保存在《明史·历志·大统历法·立成》中。是表与我们上面根据定平立三差计算得出的五星盈缩立成不同。它比较简单，将周天分为 24 历策，盈历、缩历各 12 历策。历策 15.2190625 度。木、火、土、金、水五星各有一份盈缩立成表。另外还有一份五星同用的“五星盈缩入历度率立成”，给出每一历策起始的度数。五星盈缩立成包含 5 栏：策次，损益率，盈缩积，行定度，行积度。虽名曰立成，但与前述“五星盈缩积差表”类似，其“损益率”或“盈缩积”（即积差）为实测校核得出。表 10－15 以木星盈缩立成为例，略做说明。

水、金、火、木、土五星和地球一样，在椭圆轨道上绕日公转。在近日点，运行速度最快。就木星而言，从近日点开始的一个历策，比平行 15.2190625 度多行 1.59008481度，所以初策的行定度为 15.2190625＋1.59008481＝16.80914731 度。比平行多行的 1.59008481 度，称作益率，相当于前面推导的立成表中的加分。以后速度逐渐变缓。6 策（1 个象限）后等于平行速度。这一象限称作盈初限。它超过按匀速所多行的度数，即盈积度为5.99298028度，将近 6 度。以后继续减慢，又行 1 象限（6 策）到达远日点，速度最慢。在远日点前后各一历策（盈历的第 11 策，缩历的初策），木星运行比匀速运动少行 1.59008481 度，所以行定度为 15.2190625－1.59008481＝13.62897769 度。比平行少行的度数，称作盈历的损率、缩历的益率。从近日点到远日点的半周叫盈历（远日点至近日点的半周称缩历）。从等速运动到远日点这一象限，称作盈末限。前一段（盈初限）所多行的近 6 度盈积度，因这段木星速度不及平均数而被抵消掉。故缩历开始时，即远日点时盈缩积度又等于 0。



从远日点开始，速度渐增。木星运行一象限，刚好速度等于平均数。这一段称作缩初限。在这一象限，木星速度不足平均数，比匀速运动 91.314375 度少行的度数，即缩积度亦为5.99298028度。以后星行超过平均速度，少行之度渐渐被补回来。到达近日点时，正好补完。这一段称作缩末限。

由此看出，五星盈缩立成中，损益率是该历策内，行星实行比等速运行 15.2190625度多走或少走的度数。盈缩积是这一历策开始时行星累计比匀速运动多走或少走的积度，其数值为其前各历策损益率的代数和（益加损减）。亦即以每策的损益率，益加损减其策盈缩积得次策的盈缩积。行定度是每策行星实际运行的度数。其值盈历为各策损益率，益加损减平行度 15.2190625 度；缩历为各策损益率，益减损加平行度 15.2190625 度。即各策行定度＝历策±损益率（度）。行积度即行定度的驯积，是行星在该策结束时累计实际运行的度数。即



表 10－15　木星盈缩立成(历策)

历表	损益率度	盈积度	行定度	行积度	损益率度	缩积度	行定度	行积度
初	益 1.59008481	0	16.80914731	16.80914731	益 1.59008481	0	13.62897769	196.25772969
1	1.42013561	1.59008481	16.63919811	33.44834542	1.42013561	1.59008481	13.79892689	210.05665458
2	1.20027188	3.01022042	16.41933438	49.86767980	1.20027188	3.01022042	14.01879062	224.07544520
3	0.93049362	4.21049230	16.14955612	66.01723590	0.93049362	4.21049230	14.28856888	238.36401408
4	0.61080083	5.14098592	15.82986333	81.84709925	0.61080083	5.14098592	14.60826167	252.97227575
5	0.24119352	5.75178676	15.46025602	97.30735527	0.24119352	5.75178676	14.97786898	267.95014473
6	损 0.24119352	5.99298028	14.97786898	112.28522425	损 0.24119352	5.99298028	15.46025602	283.41040075
7	0.61080083	5.75178676	14.60826167	126.89348591	0.61080083	5.75178676	15.82986333	299.24026408
8	0.93049362	5.14098592	14.28856888	141.18205480	0.93049362	5.14098592	16.14955612	315.38982020
9	1.20027188	4.21049230	14.01879062	155.20084542	1.20027188	4.21049230	16.41933438	331.80915458
10	1.42013561	3.01022042	13.79892689	168.99977231	1.42013561	3.01022042	16.63919811	348.44835269
11	1.59008481	1.59008481	13.62897769	182.62875000	1.59008481	1.59008481	16.80914731	365.25750000

$$n\text{策的行积度}=\sum_{0}^{n}\text{行定度}$$
$$=(n-1)\text{策行积度}+n\text{策行定度}$$

五星盈缩立成中，损益率或盈缩积由实测校验得出后，其他数值皆可由此导出。

有了五星盈缩立成表，根据上述方法，就可以内插得出任一入历度 x 的盈缩差。

在后面介绍步五星术时，将说明采用定平立三差算式 $F(x)$ 计算和根据五星盈缩立成得出的盈缩差，数值并不完全相同。笔者考查得出，其间可有十余分（百分为度）的差别。

为配合五星盈缩立成，大统历法还给出五星盈缩入历度率立成（五星通用），如表 10—16，实际上，这是将半周平分 12 历策，每策起始的度数。

表 10—16　五星盈缩入历度率

历　策	度　率	历　策	度　率
1	15.21906250	7	105.53343750
2	30.43812500	8	121.75250000
3	45.65718750	9	136.97156250
4	60.87625000	10	152.19062500
5	76.09531250	11	167.40968750
6	91.31437500		

五大行星与地球一样绕日公转。授时历计算五星盈缩差，实际上就是椭圆运动的中心差。它由轨道的偏心率 e 的大小决定。只考虑 e 的一次差，将授时历给出的最大盈缩差与由 e 得出的中心差比较，如表 10—17 所示。

由表看出，木星较为准确。土星稍疏，水、金、火三星误差很大。

表 10—17　授时历盈缩差与中心差比较

	最大盈缩积			e_c	e_0	中心差	
		(°)	(″)			(″)	(°)
木星	5.99298	5.9068	21264.5	0.0515	0.048	19801.44	5.5004
火星	25.61978	25.2515	90905.4	0.2204	0.093	38365.29	10.6570
土星	8.25524	8.1366	29291.7	0.0710	0.055	22689.15	6.3025
金星	2.13632	2.1056	7580.2	0.0184	0.0067	2763.95	0.7678
水星	2.28615	2.2533	8111.9	0.0197	0.2056	84816.17	23.5600



第五节　步气朔、步日躔及太阳过宫

一、步气朔闰

(一)基本法数

至元十八年岁次辛巳(1281)为元。
日周 10000。
日 10000 分。
日 100 刻。
刻 100 分。
分 100 秒。
秒 100 微。
岁实＝岁周＝365.2425 日＝3652425 分。
半岁周＝岁周/2＝182.62125 日。
通余＝通盈分＝岁实－360＝5.2425 日＝52425 分。
朔实＝朔策＝29.530593 日。
望策＝朔策/2＝14.7652965 日。
弦策＝朔策/4＝7.38264825 日。
朔虚＝30 日－朔策＝0.469407 日＝4694.07 分。
通闰＝岁实－12×朔策＝10.875384 日。
气策＝岁实/24＝15.2184375 日。
气盈＝气策－15＝0.2184375 日＝2184.375 分。
没限＝日周分－气盈分＝7815.625 分＝0.7815625 日。
周天分 3652575 分。
周天度 365.2575 度。
半周天＝周天度/2＝182.62875 度。
周天象限＝周天度/4＝91.314375 度。
岁差＝周天－岁周＝365.2575－365.2425＝0.0150＝1 分 50 秒。

盈初缩末限 88.909225 日：冬至至春正 88.909225 日称盈初限，秋正至冬至 88.909225 日谓缩末限。这两限内太阳皆行象限度。

缩初盈末限 93.712025 日：春正至夏至，夏至到秋分各93.712025日，分别称盈末限、缩初限。在此期间太阳亦皆行象限度。

转终＝近点月＝27.5546 日＝275546 分。

转中＝转终/2＝13.7773 日。

转差＝朔实－转终＝1.975993 日。

月平行度＝13.36875 度。

纪法 60。

限法 820。

周限＝转终分/限法≈336。

中限＝周限/2＝168。

初限＝周限/4＝84。

上弦 91.314375 度。

望 182.62875 度。

下弦 273.943125 度。

气应 55.0600 日:实测得出至元辛巳(1281)岁前冬至为己未日子正夜半后 6 刻,距甲子日子正夜半为 55.0600 日。

闰应 20.2050 日:实测计算得出至元辛巳岁前冬至距天正月平朔时刻为 20.1850日。至元三十一年(1294)改定为20.2050日。

转应 13.0205 日:测算得出至元辛巳岁前冬至距其前月过近地点 13.1904 日。至元三十一年改定为 13.0205 日。

交应 26.0388 日:测算得出至元辛巳岁前冬至距其前月过降交点26.018786 日。至元三十一年改定为 26.0388 日。

周应 315.1075 度:授时历规定太阳所在赤道宿度的起算点为虚宿 6 度。实测得出至元辛巳岁前冬至加时太阳在赤道箕宿 10 度。由授时历二十八宿赤道宿度,虚 6 度至箕 10 度积315.1075度。

(二)气朔闰的推步方法

授时历书中历日依据定朔确定,而二十四节气采用平气注历。因此,闰月、月大小、日躔过宫等都要结合考查定朔时分来判定。

推天正冬至:

所求年距元年数＝所求年－至元辛巳(1281)

中积＝距元实足年数×岁实

通积＝中积＋气应 55.0600

所求年年前冬至＝[通积/纪法 60]$_R$。通积用纪法 60 去之,不尽,所得余数(日及小数),其日命甲子算外(1 日为乙丑,2 日为丙寅……),即为所求年年前冬至日



辰及分。

将所得天正冬至日分,以气策 15.2184375 累加之,日数满纪法 60 去之,得各气日辰及分秒。如元至正二十五年(1365),距元 84,中积日 30680.3700,通积 30735.4300,得天正冬至 15.4300,为己卯日 43 刻。累加气策,得年内各气如表10－18所示。

表 10－18 至正二十五年二十四气大小余

冬至 15.4300	小寒 30.6484	大寒 45.8669	立春 1.0853
雨水 16.3037	惊蛰 31.5222	春分 46.7406	清明 1.9591
谷雨 17.1775	立夏 32.3959	小满 47.6144	芒种 2.8328
夏至 18.0572	小暑 33.2697	大暑 48.4881	立秋 3.7066
处暑 18.9250	白露 34.1434	秋分 49.3619	寒露 4.5803
霜降 19.7987	立冬 35.0172	小雪 50.2356	大雪 5.4541
冬至 20.6725	小寒 35.8909	大寒 51.1094	立春 6.3278

定朔推步程序如下。

1. 推天正经朔及各月平朔

闰积＝中积＋闰应 20.2050

闰余＝$[闰积/朔实]_R$

闰积满朔实,去之,不尽,所余为闰余,即冬至平月龄,冬至距经朔的日数及分。

天正经朔日分＝冬至日分－闰余

天正经朔日分累加朔实,满纪法去之,得各月经朔。

2. 推天正及各月经朔入盈缩历

冬至后为盈历,夏至后为缩历。即其盈缩可由各经朔日辰在冬至、夏至前后位置判定。天正经朔总在冬至前,将半岁周(182.62125),以闰余日分减之,即得天正经朔人缩历。依次递加朔实,满半岁周去之,得各月人盈缩历。

3. 求盈缩差(太阳运动中心差改正)

视各经朔入历,盈历在盈初缩末限 88.909225 下,为初限 x,以上,反减半岁周 182.62125,余为末限 x;缩历,在缩初盈末限 93.712025 下,为初限 x,以上,反减半岁周,余为末限 x。

盈初缩末历计算公式:

盈缩差＝$[5133200-(31\times x+24600)\times x]\times x\times 10^{-8}$度

缩初盈末历计算公式:

盈缩差＝$[4870600-(27\times x+22100)\times x]\times x\times 10^{-8}$度

也可采用"太阳盈初缩末限立成"、"太阳缩初盈末限立成"得出。

4. 推天正及各月经朔入转

天正经朔入转日分

$=[(中积+转应\ 13.0205-闰余)/转终\ 27.5546]_R$

天正经朔入转日分依次累加转差 1.975993 日，满转终27.5546日去之，得各月入转日分。入转日分即距其前近地点的日及小数。

5. 求天正及各月经朔入迟疾历

天正及各月经朔入转日分在转中 13.7773 以下，为疾历；以上，减去转中，为迟历。

6. 求迟疾差(月亮运动改正)

将迟疾历日分，以 12.20 限乘之，得数在初限 84 以下为初限 x；以上，反减中限 168，所余为末限 x。计算迟疾差公式：

$$迟疾差=[11110000-(325\times x+28100)\times x]\times x\times 10^{-8}度$$

7. 求加减差及各月定朔

所得盈缩差、迟疾差，同名相加，异名相减(盈迟、缩疾为同名，盈疾、缩迟为异名)。以限法 820 乘之。以所入迟疾限下行度除之，即为加减差。以得数加减各月经朔即得定朔日分。盈迟为加，缩疾为减。

迟疾限下行度=月平行度±该限损益分

损减益加。损益分即"太阴迟疾立成"中的一差(损益分)。损益分益加损减月平行度，即得出疾历行度或迟历行度。

各月经朔以弦策累加之，得各月经弦望，用上述相同步法求出加减差，可得各月定弦望。

置闰和闰月的位置：

月内无中气者，为闰月。闰月的位置由闰余确定。

闰余为冬至的月龄，即冬至距合朔的日分。回归年比 12 朔望月长 10.875384 日，称岁(通)闰。

闰准=朔实一岁闰=18.655209 日

月闰=岁闰 10.875384/12

=2×气策一朔实

=0.906282 日

当某年闰余大于闰准时，这年就为闰年 13 月。将天正冬至闰余分按月累加月闰 0.906282 日，加到某月，其值大于朔实时，该月即为闰月。

如万历五年(1577)，距元 296 年。闰余 20.4840，大于闰准 18.655209，是年有闰。应闰何月呢？将闰余按月递加月闰0.906282日，得十二月 21.3923，正月



22.2966，二月23.2029，三月24.1091，四月25.0154，五月25.9217，六月26.8280，七月27.7343，八月28.6406，九月29.5468。九月其和大于朔实29.530593，故此月为闰月。该年应闰八月。

由此看出，根据闰余、闰准，可以很简单地判定何年应该置闰以及闰月的位置。而不必排查何月没有中气。授时历由于采用定朔平气注历。有时置闰以及闰月位置需考查定朔时分才能最终判定。

现以元至正二十五年(1365)为例。这年天正经朔日分为57.1411，闰余18.28889小于闰准。是年(自天正至次年天正月)似当不闰。但经计算，天正定朔为57.1411－0.4697＝56.6714日，有减差0.4697日。这样，冬至到天正定朔时距(真月龄)，即定闰余为18.7586(18.28889＋0.4697)大于闰准。根据定朔，当是闰年。依次累加月闰，得出是年当闰十月。

(三)元至正二十五年(1365)定朔推步实例

距元84，中积30680.3700，通积30735.4300，天正冬至15.4300。

$$闰余=[(中积+闰应)/朔实]_R=18.28889$$

$$\begin{aligned}天正经朔&=冬至日分-闰余\\&=75.4300-18.2889\\&=57.1411\end{aligned}$$

各月定朔计算列于表10－19中。

为节省篇幅，表中八到十二月只列出结果。

授时历计算得出的是元大都(北京)视时。实朔是用现代天文方法计算得到的东8时区区时，即通常说的“北京时间”。它是东经120°的地方平时。它们之间的关系如下：

$$\begin{aligned}视时&=北京时间-(8^h-7^h.76)-均时差Z\\&=北京时间-14^m.4-Z\end{aligned}$$

式中，

$$均时差Z=平时-视时$$

将实朔化为元大都视时后，比较看出，授时历计算得出的定朔，与视时平均约有2^m.5的误差(天正月至闰十月)。其中最大误差为40分钟。

二、步日躔与太阳过宫

授时历步日躔包括三方面的计算：①根据太阳入历，推出太阳运动的盈缩差；②求四正及每日太阳黄道、赤道位置；③计算太阳入十二次即太阳过宫的时刻。

表 10—19　至正二十五年定朔计算

	天正月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月
经朔	57.14111	26.67171	56.20230	25.74289	55.26349	24.79408	54.32467	23.85526	58.38586
盈缩历	缩末	盈初	盈初	盈初	盈末	盈末	盈末	缩初	缩初
	18.28889	11.24171	40.77230	70.30289	82.78776	53.25717	23.72658	5.80401	35.33461
盈缩差	−0.8546	0.5455	1.6630	2.2852	2.3644	1.9263	1.0276	−0.2752	−1.4332
迟疾历	疾初	疾末	疾末	疾末	迟初	迟初	迟初	迟末	迟末
	6.8318	8.8078	10.7838	12.7598	0.9585	2.9345	4.9105	6.8865	8.8624
迟疾历限	83.3480	60.5449	36.4378	12.3306	11.6934	35.8005	59.9076	83.9852	59.8781
迟疾差	−5.4261	−4.9752	−3.5199	−1.3211	1.2555	3.4682	4.9485	5.4234	4.9472
迟疾行度	1.0965	1.0549	1.0187	0.9937	0.9929	1.0174	1.0531	1.0965	1.1394
加减差	−0.4697	0.3443	−0.1495	0.0796	0.2990	0.4348	0.4653	0.3850	0.2529
定朔	庚申 16:07	庚寅 7:52	庚申 1:16	己丑 19:59	己未 13:30	己丑 5:30	戊午 18:58	戊子 5:46	丁巳 15:20
实朔	11.24, 16:37	12.24, 7:55	1:20	19:47	13:44	5:42	19:05	6:10	15:41
实一定	30^m	3^m	4^m	-12^m	14^m	12^m	7^m	24^m	21^m
	八月	九月	十月	闰十月	十一月	十二月			
定朔	丁亥 0:11	丙辰 8:51	乙酉 17:50	乙卯 4:09	甲申 16:18	甲寅 6:16			
实朔	0:30	9:13	18:25	4:37	16:22	6:00			
实一定	19^m	22^m	35^m	28^m	4^m	-16^m			



前面介绍了计算太阳盈缩差的方法和算式。授时历计算太阳过宫、入十二次时刻的方法比较巧妙。有些类似现今天文年历由太阳黄经逆内插求各节气时刻的做法。推算步骤较多且比较复杂。

(一)推日躔黄道入十二次时刻及太阳位置

1. 推天正冬至赤道黄道日度

通积＝中积＋周应 315.1075

通积，满周天度去之，不尽，所余度数，命起赤道虚宿 6 度外，去之，至不满宿，即得天正冬至加时日躔赤道宿度及分秒。虚 6 度到尾末共 305.1075 度。故授时历测定的周应 315.1075 度，即为元至元十八年辛巳岁前冬至日太阳位于箕宿 10 度。因为尾宿之后就是箕宿，所以有：

天正冬至日躔赤道箕宿度分

$$=\left[\frac{\text{中积}+\text{周应}}{\text{周天度 }365.2575}\right]_R-305.1075\text{ 度}$$

冬至加时赤道日度，以“黄赤道率”立成表中，与之相应的(略小)至后赤道积度减之，所余以黄道率乘之，再以赤道率除之，得数，加对应的立成中黄道积度，即所求年天正冬至加时黄道日度及分秒。即根据得出的冬至赤道日度，查“黄赤道率”立成表。由冬至赤道日度，线性内插得到对应的黄道日度。

2. 求四正加时黄道日度

黄赤道差＝冬至赤道日度－冬至黄道日度

四正定象度＝(本年黄赤道差－次年黄赤道差)/ 4

＋气象限(岁周/4)

春正定气＝天正冬至日分＋盈初缩末限，岁前冬至日分即为冬至定气

夏正定气＝春正定气＋缩初盈末限

春正定气过纪法 60 去之。冬夏二至为盈缩之端，故即以冬至、夏至恒气(平气)作为定气。

秋正定气＝夏至日分(即定气)＋缩初盈末限

次年冬至定气＝秋正定气＋盈初缩末限

四正定气皆去纪法，其值在 60 以内。四正定气日分亦可由下式得出：

四正定气日分＝四正恒气日分±盈缩差

(盈缩差命为日分，盈加缩减)

四正相距日

＝次正定气大余＋60－前正定气大余

＝四正定气日距后正定气日的日数

四正加时黄道积度

=冬至加时黄道日度+n×四正定象度

n=0,1,2,3,4。n=4 为次年冬至黄道日度。四正黄道积度,满黄道宿次去之,各得四正定气加时黄道度分,即四正加时黄道日度。

3. 求四正及每日夜半黄道日度

四正加时减分=四正定气小余×其日行度

四正夜半积度=四正加时黄道积度-四正加时减分

冬至日行 1.051085 度。春正距夏正 93 日者,日行 0.999703 度;距 94 日者行 1 度。夏正日行 0.951516 度。秋正距冬正 88 日者,行 1.000505 度;距 89 日者行 1 度。四正黄道夜半积度,满黄道宿度去之,即得四正夜半黄道宿度。

四正夜半相距度

=次正夜半黄道积度-前正夜半黄道积度

=前后二正定气夜半日度之差

四正行度加减日差

=(相距度-累计相距日之行定度)/相距日

=(相距度-相距日下行积度)/相距日

相距度多者,即从相距度内减去行积度者为加;相距度少者,即从行积度内减去相距度者为减。

秋正距冬至、冬至距春正 88 日,行积度为 90.4009 度;89 日者行积度为 91.4014度。春正距夏至、夏至距秋正 93 日者,行积度 90.5990 度;94 日行积度 91.5987度。

每日行定度=四正后每日行度±日差

每日行度=日平行 1 度±该日损益分

也可由立成查出。

置四正夜半日度,以行定度每日加之,满黄道宿度去之,即得每日子正夜半日度。

4. 推日躔黄道入十二次时刻

由四正夜半日度及每日子正夜半黄道日度,可以根据黄道十二次宿度判定何日为入次日。入次日子正黄道日度略小于十二次宿度,其明日子正夜半日度略大于所入次宿度。

入次时刻(日的小数)

$$=\frac{(\text{入次宿度}-\text{入次日子正夜半日度})}{\text{其日行定度}}$$

其日行定度可由立成查出,即为日平行 1 度±该日损益分。其数值亦等于入次日



夜半日度与明日夜半日度相减之余。由日的小数可化为时分秒或时辰刻分数。

(二)黄赤道宿度积度钤和黄道十二次宿度

1. 赤道宿度

角 12.10	亢 9.20	氐 16.30	房 5.60
心 6.50	尾 19.10	箕 10.40	斗 25.20
牛 7.20	女 11.35	虚 8.9575	危 15.40
室 17.10	壁 8.60	奎 16.60	娄 11.80
胃 15.60	昴 11.30	毕 17.40	觜 0.05
参 11.10	井 33.30	鬼 2.20	柳 13.30
星 6.30	张 17.25	翼 18.75	轸 17.30

2. 黄道宿度

角 12.87	亢 9.56	氐 16.40	房 5.48
心 6.27	尾 17.95	箕 9.59	斗 23.47
牛 6.90	女 11.12	虚 9.0075	危 15.95
室 18.32	壁 9.34	奎 17.87	娄 12.36
胃 15.81	昴 11.08	毕 16.50	觜 0.05
参 10.28	井 31.03	鬼 2.11	柳 13.00
星 6.31	张 17.79	翼 20.09	轸 18.75

3. 黄道积度钤

箕 9.59	斗 33.06	牛 39.96	女 51.08
虚 60.0875	危 76.0375	室 94.3575	壁 103.6975
奎 121.5675	娄 133.9275	胃 149.7375	昴 160.8175
毕 177.3175	觜 177.3675	参 187.6475	井 218.6775
鬼 220.7875	柳 233.7875	星 240.0975	张 257.8875
翼 277.9775	轸 296.7275	角 309.5975	亢 319.1575
氐 335.7775	房 341.0375	心 347.3075	尾 365.2575

4. 赤道积度钤

箕 10.40	斗 35.60	牛 42.80	女 54.15
虚 63.1075	危 78.5075	室 95.6075	壁 104.2075
奎 120.8075	娄 132.6075	胃 148.2075	昴 159.5075
毕 176.9075	觜 176.9575	参 188.0575	井 211.3575
鬼 223.5575	柳 236.8575	星 243.1575	张 260.4075
翼 279.1575	轸 296.4575	角 308.5575	亢 317.7575

氐 334.0575　房 339.6575　心 346.1575　尾 365.2575

5. 黄道十二次宿度

危 12.6491 度	入娵訾次	辰在亥
奎 1.7363 度	入降娄次	辰在戌
胃 3.7456 度	入大梁次	辰在酉
毕 6.8805 度	入实沈次	辰在申
井 8.3494 度	入鹑首次	辰在未
柳 3.8680 度	入鹑火次	辰在午
张 15.2606 度	入鹑尾次	辰在巳
轸 10.0797 度	入寿星次	辰在辰
氐 1.1452 度	入大火次	辰在卯
尾 3.0115 度	入析木次	辰在寅
斗 3.7685 度	入星纪次	辰在丑
女 2.0638 度	入玄枵次	辰在子

(三)出土授时历历书残页和传世大统历书中日躔黄道入十二次时刻记载及其计算

在内蒙古黑城出土有元授时历书残页五种。中国古历有很多传世，考古发掘和敦煌发现的也不少。但元代历书始终未见。元授时历书残页的出土使我们得见元代历书的内容和形式，并使得授时历推步的一些问题得到解决。我们根据残历的历日和历注记载，考订确认了这五种残历的年代。

五件残历中，有三件保存有日躔十二次的日期时刻。历书一，笔者考证系至正十年的历书，记有"(五月)十五日戊辰酉正二刻[后日躔鹑首之次]"；历书二，我们认证是至正二十五年，残历记载，"(七月)一日丁巳午初初刻[日躔鹑火之次]"；历书三，考订为大德十一年，记有，"(正月)十二日丁丑[□□□□后日躔娵訾之次]。"

清时宪历，采用西洋之法，以中气为日躔入十二宫时刻，如日躔冬至即入星纪丑宫之类。在《大清乾隆六十年岁次乙卯时宪书》中，正月月首注记"二十九日壬子亥正一刻后日躔娵訾之次"。二十九日壬子亥正一刻就是交雨水正月中气的时刻。《大清同治十三年岁次甲戌时宪书》四月月首记载，"六日戊寅未正三刻后日躔实沈之次"，此即四月交小满中气的时刻。因此，历书推步中，求出二十四节气的时刻，即知日躔入十二次及在十二次中的时刻和位置。

中国古历十二次大抵皆依星宿而定，如奎娄为降娄，心为大火，朱鸟七宿为鹑首、鹑火、鹑尾，等等。故宫有一定之宿，宿有常居之宫，由来尚矣。唐以后历法始



用岁差，然亦天自为天，岁自为岁，宫与星仍旧不易。十二次沿恒星天进行分划、测定；而二十四气则由岁实（回归年）二十四等分而得。由于岁差的原因，春分点、冬至点在星空的位置不断西移。至迟在西汉三统历时期，十二次已是均匀划分，并用它描述太阳运动，与二十四气联系了起来。十二次与二十四气的关系为："日至其初为节，至其中为中，斗建下为十二辰，视其建而知其次。"由于汉人不识岁差，又以赤道测定；历代拘泥于宫星不易，观点、方法各异，测定结果不一；并未能按春分点、冬至点位置变化，及时调整十二次的星宿位置、关系。所以三统历以后，直到授时历、大统历，古历二十四气与十二次并未保持固定的对应关系。历书中日躔十二次日期时刻既非交中气的时刻，也不是交节气的日子。故授时历步日躔术专门介绍计算太阳过宫的方法。

我们依据元史历志步日躔术，计算了黑城授时残历大德十一年（1307）正月、至正十年（1350）五月、至正二十五年（1365）七月及万历五年（1577）日躔娵訾、玄枵次的时刻。所得结果与残历及传世明万历历书记载完全一致。以此为例来介绍具体的推步过程。计算步骤、结果列于表10－20。

第六节　步月离、定差距差定限度

一、推定朔弦望加时日月宿度

如经朔盈缩历，在盈历，入盈历日及分即为经朔加时中积；如在缩历，入缩历日及分加半岁周为中积。

定朔弦望入历

＝经朔弦望入盈缩历日分±加减差

定朔弦望入历，如在盈历，入盈历日分即为定朔弦望中积；如在缩历，入缩历日分加半岁周为中积。以盈缩历日分计算盈缩差，并命日为度，则有：

加时定积度＝定朔弦望加时中积±盈缩差

以冬至加时日躔黄道宿度（冬至黄道日度）与加时定积度相加，各得定朔、弦望加时日度。

合朔时，日月同度。所以定朔时日度便是定朔加时月度。两弦时日月黄道经度相差周天象限度，望时日月相距半周天度。所以有：

定弦望月行定积度＝弦望度＋定积度

同样，以冬至加时日躔黄道宿度与定弦望月行定积度相加，各得定弦、定望加时黄道月度。

表 10－20　授时、大统历书日躔计算

	大德十一年 正月	至正十年 五月	至正二十五年 七月	万历五年 正月	万历五年 十二月
年前冬至	11.3650	57.7925	15.4300	46.8400	46.8400
赤道日度	箕 9.6100	箕 8.9650	箕 8.7400	箕 5.5600	箕 5.5600
黄道日度	箕 8.8608	箕 8.2642	箕 8.0561	箕 5.1204	箕 5.1204
四正定气	冬至 11.3650	夏至 59.4137	夏至 18.0512	冬至 46.8400	年终冬至 52.0825
四正相距日	冬至距春正 89 日	夏至距秋正 94 日	夏至距秋正 94 日	冬至距春正 89 日	冬至距春正 89 日
四正黄道日度	8.8608	190.8861	190.6780	5.1204	5.1066
四正加时减分	0.38365	0.39364	0.04872	0.88290	0.08660
四正夜半日度	8.4772	190.4925	190.6293	4.2375	5.0200
相距度	91.4204	91.5787	90.5960	91.4448	90.4061
日　差	＋0.0002124	－0.0002130	－0.0000323	＋0.0004883	＋0.0000593
四正夜半日度	8.4772	190.4925	190.6293	4.2375	5.0200
盈缩积度	64.1631	4.7620	33.5776	68.2272	36.4820
日差积	62×0.000212	－5×0.000213	－35×0.0000323	66×0.0004883	35×0.0000593
三项和	72.6534	195.2534	224.2058	72.4969	41.5041
减交宫积铃	虚 60.0875	参 187.6475	鬼 220.7875	虚 60.0875	牛 39.9600
入宫夜半日度	亥宫危 12.5659	未宫井 7.6059	午宫柳 3.4183	亥宫危 12.4094	子宫女 1.5441
十二次交宫界	危 12.6491	井 8.3494	柳 3.8680	危 12.6491	女 2.0638
差	0.0832	0.7435	0.4497	0.2397	0.5197
日下太阳行度	1.0170	0.9538	0.9680	1.0145	1.0327
商	0.0818 日	0.7795 日	0.4646 日	0.2363 日	0.5033 日
入宫时分	1:57.8	18:42.5	11:09	5:40	12:04.7
	11＋62＝73	59＋5＝64	18＋35＝53	46＋66＝112	52＋35＝87
日辰时刻	丁丑日丑初四刻	戊辰日酉正二刻	丁巳日午初初刻	丙辰日卯初二刻	辛卯日午正初刻
日躔	亥宫娵訾	未宫鹑首	午宫鹑火	亥宫娵訾	子宫玄枵



二、推定朔弦望加时赤道月度

朔弦望入盈缩历日是以冬至夏至为始点。定积度为距冬至加时黄道积度。这一步就是将黄道积度化为赤道积度。可根据弧矢割圆法进行计算，也可用“黄赤道率”立成用线性内插求得。

取定朔弦望加时黄道月行定积度，满象限去之，以立成表列相应黄道积度减之，余数以赤道率乘之，黄道率除之，用同行赤道积度及所去象限相加，得定朔弦望赤道加时定积度。与冬至加时赤道日度相加，各为定朔、弦、望加时赤道月度及分秒。

查表时要注意，象限以下以及半周以上，去之，为至后；过象限及3象，去之，为分后。

三、求正交日辰

置中积，加交应26.0388，减闰余，得数满交终27.212224，累去之，所余为天正经朔交泛。即

$$天正经朔交泛分=\left[\frac{中积分+交应-闰余分}{交\quad 终}\right]_R$$

$$天正经朔后平交日=交终日-天正经朔交泛$$

如推次月，累减交差日2.318369日，得次月朔后平交日。交泛日分即经朔入交日及分。故

$$朔后平交日=交终日分-经朔人交日及分$$

如朔后平交日，不够减交差者，加交终减之，其交仍在本月，为重交月朔后平交日。每岁必有重交之月。

$$朔后平交入转=经朔入转+朔后平交日$$

在转中以下为疾历；以上，减去转中为迟历。如推次月，累减交转差0.342376日（朔交差2.318369－朔转差1.975993），即得。如不及减，加转中减之。

置平交入转迟疾历，按步气朔内，推迟疾限及迟疾差，为平交入限迟疾差。

$$平交加减定差=\frac{平交入限迟疾差\times 日率820}{所入迟疾限下行度}$$

迟历为加，疾历为减。

$$正交日辰=(经朔+朔后平交日)\pm 平交定差$$

其日命甲子算外，即得正交日辰。如推次月，累加交终，满纪法去之。如遇重交月，再加交终。

四、推正交距冬至加时黄道积度及宿次

距后度＝朔后平交日×月平行度 13.36875

各月正交距冬至加时黄道积度＝经朔加时中积＋距后度

加冬至加时黄道日度，以黄道积度钤减之，至不满宿次，即得正交月离——正交加时月离黄道宿度及分秒。

如推次月，累减月平交朔差 1.463102 度（天周 365.2575－交终度 363.7934196）。遇重交月，同次朔。

五、求定差距差及月离赤道正交宿度

正交距冬至加时黄道积度，在半岁周以下，为冬至后；以上，减去半岁周，余为夏至后。在冬夏二至后的度分，在气象限以下，为初限；以上，用减半岁周，为末限。

推次月，若本月初限，则累减月平交朔差，余为次月初限；不及减者，反减月平交朔差，余为次月末限。若本月末限，则累加月平交朔差，为次月末限，至满气象限。以减半岁周，余为次月初限。

$$定差度=\frac{极差\ 14.66\ 度\times 初末限}{象限\ 91.314375}$$

距差度＝极差 14.66 度－定差度

定限度＝98 度±24×定差/14.66 度

正交在冬至后为减，夏至后为加。距差为任意时刻白道与赤道交点距二分点的度数。当月球轨道的升（降）交点正好位于冬至（夏至）点时，那时赤白交点离二分点的弧距（距差）最大，为 14.66 度，称作极差。其他时候，白赤交点离二分点的距差都小于极差 14.66 度，其差值就是定差度。

取冬至赤道日度，累加气象限度，各得春分、夏至、秋分积度。根据赤道积度钤，满赤道宿次去之，得四正赤道宿度及分秒。

月离赤道正交宿度＝春秋二正赤道宿度±距差

正交在冬至后，取春正赤道积度±距差，初限加、末限减；正交在夏至后，置秋正赤道积度±距差，初限减、末限加。得数，满赤道积度钤去之，即为月离赤道正交宿度。

六、求月离赤道正交后半交白道出入赤道内外度（白道赤道交角）

正交后赤道积度＝春秋二正赤道所当宿度全度

－月离赤道正交宿度

《明史·历志》与此类似，记载为：



正交后赤道积度＝白赤正交所入某宿赤道全度
　　　　一月道与赤道正交宿度

正交后积度，以赤道各宿全度累加之，满气象限去之，为半交后；又去之，为中交后；再满去之，为半交后。根据各交积度，在半象限以下为初限；以上，用减象限，所余为末限。

月离赤道后半交白道出入赤道内外度(白赤交角)＝23.90度±25×各交定差度分/61。月离黄道正交在冬至后宿度为减，夏至后宿度为加。月离赤道正交后为外，中交后为内。

知道了白赤交角及每日月离赤道交后初末限，就可求出每日月离白道去极度分。进而可求每交月离白道积度及宿次，定朔弦望加时月离白道宿度。由定弦朔望加时及夜半晨昏人转，可得夜半、晨昏月度及每日晨昏月离白道宿次。

第七节　步交会术、日月食推步

一、步交食

(一)基本法数和用数

交终日 27.212224。

交终日(分)272122.24。

交中日 13.606112。

交终度 363.7934 度。

交中度 181.8967 度。

交望 14.7652965 日。

正交度 357.64 度。

中交度 188.05 度。

交差 2.318369 日。

交应 26.0388 日。

前准 166.3968 度。

后准 15.50 度。

日食阳历限 6 度。

定法 60。

日食阴历限 8 度。

定法 80。

月食限 13.05 度。

定法 87。

阳食限：如定朔入交小于 0.60 日，大于 25.60 日，或在 13.10 日～15.20 日之间者，皆入食限。

阴食限：如定望入交，小于 1.20 日，大于 26.05 日，或在12.40～14.80 日之间，皆入食限。

又，若定朔小余在日出前或日入后 0.082 日以上者，日食在夜；定望小余在日入前、日出后 0.082 日以上者，月食在昼。皆不必入算。

步交食用数：经朔望，盈缩历，盈缩差，迟疾历，迟疾差，加减差，定朔望，日出分，日入分，半昼分，入交泛分，岁前冬至加时黄道日度宿次。

日出分＝晨分＋250 分

日入分＝昏分－250 分

半昼分＝日入分－5000 分＝昏分－5250 分

日周 100 刻 10000 分。

月平行度 13.36875 度。

日率分 8.20 分，1 限 0.082 日，1 日 12.20 限。

定入迟疾历＝经朔望入迟疾历±加减差

迟疾定限＝定入迟疾历×日转限 12.20

定限行度＝疾迟行度－率法（日行分）8.20 分

定日月食限：

阳历入交：0.579592 日，以下，日月皆食，以上，月食，日不食；大于 26.05304 日，日月皆食；在 13.0265 至 14.7653 日之间，日月皆食；在 12.446928 日至 13.0265日之间，月食。

阴历入交：在 1.159184 日以上，日月皆不食，以下，月食，日不食；大于 26.05304日，日月皆食；12.44 至 13.0265 日，月食；13.0265 至 14.7653 日；日月皆食。

又，定朔小余小于 0.125 日或大于 0.875 日，日不食；定望小余在 0.30 至 0.70 日之间月不食。

（二）日月食推步方法

1. 求定朔望加时入交

天正经朔入交泛日



$=[($中积日＋交应 26.0388－闰余$)/$交终 27.212224$]_R$

次朔望入交泛日

$=[($天正经朔入交泛日＋$n\times$交望日$)/$交终日$]_R$

式中 n 为不大于 24 的整数。

食月入交泛日＝$[($天正经朔望入交泛日

＋交差×所距月数$)/$交终日$]_R$

经朔望夜半入交＝各经朔望入交泛日－经朔望小余

得数，大月加 2 日，小月加 1 日，余再加 0.787776 日，即为次朔夜半入交。累加 1 日，满交终日（27.212224 日）去之，即每日夜半入交泛日。大月 30 日，小月 29 日，内减交终27.212224日，为2.787776日或 1.787776 日。

定朔望加时入交＝经朔望入交泛日±定朔望加减差。

2.求日月食食甚定分（辰刻）

交常度＝有食之经朔望入交泛日分×月平行度。

交定度＝交常度±朔望下盈缩差。盈加、缩减。不及减者，加交终减之。

日食正交中交限度：交定度小于 7 度，大于 342 度，食在正交；交定度在 175 度至 202 度之间，食在正交。不在限内不食。

中前分＝半日周 5000 分－定朔小余分。中前＝半日（0.50）－定朔小余。定朔小余不足半日周时用此式，在半日以上时用：

中后分＝定朔小余分－半日周 5000 分。

中后＝定朔小余－半日。

定望分小于 2500 分时，卯前分＝定望小余分。

定望分在 2500 分以上，不足半日周时，卯后分＝半日周－定望小余分。

定望分不足 7500，用酉前分；以上，用酉后分。

酉前分＝定望小余分－半日周。

酉后分＝日周 10000 分－定望小余分。

时差分＝（半日周 5000 分－中前中后分）×中前中后分/9600。时差日＝（半日－中前中后）×中前中后/0.96。中前为减，中后为加。月食时差分＝$($卯酉前后分$)^2/47800$。月食时差（日）＝$($卯酉前后$)^2/4.78$。子前为减，子后为加。大统历不用月食时差分。

日食食甚定分＝定朔小余分±时差分。月食食甚定分＝定望小余分±时差分。日食中前为减，中后为加；月食子前为减，子后为加。食甚定分化为时刻，即食甚辰刻。大统历即以定望分为食甚分。

日食距午定分＝中前中后分＋时差分。

3. 求日月食甚入盈缩历及日行定度

日月食甚入盈缩历日分＝经朔望入盈缩历日分＋食甚日（定朔望大余）＋食甚定分－经朔望日分（经朔望大小余）。

食甚入盈缩历定度＝食甚入盈缩历日分±盈缩差。盈加缩减。

盈缩差可根据前述日躔盈缩差算式，直接计算得出。也可由“太阳盈初缩末限立成”、“太阳缩初盈末限立成”，查出食甚入盈缩历日条下“盈缩加分”、“盈缩积度”，线性内插得出。

盈缩差＝食甚入盈缩历小余（小数部分，即食甚入盈缩历日大小余－食甚入盈缩历大余）×盈缩加分＋盈缩积度。

4. 求日食南北差、东西差、正交中交限度

食甚入盈缩历定度不足象限 91.310625，为初限；大于象限，则用减半岁周 182.62125 为末限。

南北泛差＝4.46－（初末限度）^{2}/1870。

南北定差＝南北泛差－南北泛差×距午分/半昼分。如泛差不及减者，则反减之。

盈初缩末历食在正交为减，中交为加；缩初盈末历，食在正交为加，中交为减。如系泛差反减而得者，则其加减反是。

半昼分可由“食甚入盈缩历定度初末限”，查“黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分”（《元史・历志・授时历经》），或“黄道每度昼夜刻立成”（《明史・历志・大统历法・法原》）得出。需要注意的是，这两个表所载的昼夜刻分，乃元大都（北京）晷漏时分。也可由“日月食甚入盈缩历日分”，查《明史・历志・大统历法立成》所载“冬夏二至后晨昏分立成”（只载冬夏至后积日、晨分、昏分）得出。另《古今律历考》卷四十六“历法刻漏”（大统）立成表中，也刊有“冬夏至后积日、晨分、日出分、半昼分、日入分及昏分”等数值。要记住的是，这两个表所载乃南京应天府的晷刻时分。

对于南京、北京以外地区，要计算准确的日出入时刻和昼夜刻分，可以根据本章第十节步中星中介绍的“句股测望”、“里差刻漏和求黄道每度昼夜刻”方法计算并编制立成表。

东西泛差＝（半岁周 182.62125－食甚入盈缩历定度）×食甚入盈缩历定度/1870。

东西定差＝东西泛差×距午分/2500。得数若大于东西泛差，则，东西定差＝2×东西泛差－东西泛差×距午分/2500。盈历中前、缩历中后者，正交减，中交加；盈历中后、缩历中前者，正交加，中交减。倍泛差减之者，加减不变。

换言之，即盈历，中前者，交前阴历减，阳历加；交后阴历加，阳历减；中后者，交



前阴历加，阳历减；交后阴历减，阳历加。

缩历，中前者，交前阴历加，阳历减；交后阴历减，阳历加；中后者，交前阴历减，阳历加；交后阴历加，阳历减。

日食正交、中交定限度分＝正交(357.64)、中交度(188.05)±南北定差±东西定差。

5. 求日月食入阴阳历去交前后度

日食交定度在中交定限度以下，阳历交前度＝中交定限度－交定度。交定度在中交定限度以上，阴历交后度＝交定度－中交定限度。交定度在正交定限度以下，阴历交前度＝正交定限度－交定度。交定度在正交定限度以上，阳历交后度＝交定度－正交定限度。交定度若小于 7 度，阳历交后度＝交定度＋交终度－正交正限度。

月食入阴阳历度：

若交定度小于交中度 181.8967 度，入阳历度＝交定度。交定度大于交中度，入阴历度＝交定度－交中度。

月食交前交后度：

若入阴阳历小于后准 15.5 度，交后度＝入阴阳历度。如入阴阳历度大于前准 166.3968 度，交前度＝交中 181.8967－入阴阳历度。入阴阳历度若小于前准，或大于后准，月不食。

6. 推日月食分秒

日食分秒＝(阴、阳历食限－阴、阳历去交前后度)/阴、阳历定法。不及减者，不食。阳历日食分秒＝(日食阳历限 6 度－阳历交前交后度)/日食阳历定法 60。阴历日食分秒＝(阴食限 8 度－阴历交前交后度)/日食阴历定法 80。

月食分秒＝(月食限 13.05 度－去交前后度)/月食定法 87。不及减者，不食。

7. 求日月食定用及三限五限辰刻

日食定用分＝$[(20-\text{日食分秒})\times\text{日食分秒}]^{\frac{1}{2}}\times 5740$/入定限行度。日食定用分(日分)＝$[(20-\text{日食分秒})\times\text{日食分秒}]^{\frac{1}{2}}\times 57.40$/定限行度。月食定用分＝$[(30-\text{月食分秒})\times\text{月食分秒}]^{\frac{1}{2}}\times 5740$/定限行度。月食定用分(日分)＝$[(30-\text{月食分秒})\times\text{月食分秒}]^{\frac{1}{2}}\times 57.40$/定限行度。月食定用分中 5740 分，大统历作 4920 分(6×820)。

日月食初亏分＝食甚定分－定用分。日月食食甚分＝食甚定分。日月食复圆分＝食甚定分＋定用分。化为时分，即得日月食三限辰刻。

月全食既分＝月食分秒－10 分。月食 10 分以上者，为月全食，用初亏、食既、食甚、生光、复圆五限推算。既内分(授时历)＝$[(10-\text{既分})\times\text{既分}]^{\frac{1}{2}}\times 5740$/定限

行度。既内分(大统历)＝[(10－既分)×既分]$^{\frac{1}{2}}$×4920/定限行度。既内分(古今律历考)＝[(既食分 15－既分)×既分]$^{\frac{1}{2}}$×4920/定限行度。既外分＝月食定用分－既内分。

月食初亏分＝食甚定分－定用分＝食甚定分－既内分－既外分。食既分＝食甚定分－既内分＝初亏＋既外分。食甚分＝食甚定分＝食既分＋既内分。生光分＝食甚定分＋既内分。复圆分＝生光分＋既外分。化为时分，为月全食五限辰刻。

8. 日月食起复方位

日食，食在阳历，初起西南，甚于正南，复于东南；食在阴历，起于西北，甚于正北，复于东北；食 8 分以上，起于正西，复于正东。

月食，食在阳历，初起东北，甚于正北，复于西北；食在阴历，初起东南，甚于正南，复于西南；食 8 分以上，初起正东，复于正西。

方位皆据南子午圈而言。

9. 日月带食出入所见食分

日食，初亏、食甚在日出之前，为晨刻带食；食甚、复圆在日入以后，为昏刻带食。月食，初亏、食甚在日入以前，为昏刻带食；食甚、复圆在日出之后，为晨刻带食。

带食差＝日出入分－食甚分。视晨、昏，日、月食而定。不及减者，反减。

日月出入带食所见分秒＝日月食分秒－带食差×日月食分秒/定用分。食甚在昼，晨为渐进，昏为已退；食甚在夜，晨为已退，昏为渐进。

月全食带食出入所见之分＝既分－(带食差－既内分)×10/既外分。不及减者，为月带食既出入。

10. 推月食入更点

更法＝2×晨分/5。点法＝更法/5＝2×晨分/25。月食五限辰刻，如在晨分以下，有更点，以上，无更点；在昏分以后，有更点，其前，无更点。

夜半前更点＝(月食三限五限－昏分)/更法。夜半后更点＝(月食三限五限＋晨分)/更法。得数，为更数。不满更法为初更。余数，以点法收之，为点数。

11. 求日月食甚黄道宿次

日食盈历定积度＝食甚入盈缩历定度。日食缩历定积度＝食甚入缩历定度＋半岁周。月食盈历定积度＝食甚入盈历定度＋半周天。月食缩历定积度＝食甚入缩历定度－75 秒。望时日月相距半周天度 182.62875，与半岁周 182.62125，相差 75 秒。授时加大统减(依日度前后)。

日食食甚黄道日度＝岁前冬至加时黄道日度＋定积度。满黄道宿度积度钤去



之，至不满宿次，即食甚日躔黄道宿次。

月食食甚月离黄道度＝岁前冬至加时黄道日度＋定积度。满黄道积度钤去之，至不满宿次，即食甚月离黄道宿度。减箕，余为入斗宿度；减斗，余为入牛宿度，等等。

二、日月食推步实例及精度

(一)元至元大德年间的三次日食预报和观测

《元史》记载，成宗大德三年八月己酉朔日食(1299 年 8 月 27 日)，“时在巳。依历，日食二分有奇。至其时不食”。六年六月癸亥朔日食(1302 年 6 月 26 日)，“时在戌。依历，日食五十七秒，众以涉交既浅，且复近浊，欲匿不报。独齐履谦以状闻。及其时，果食”(《元史·传五十九》)。大德六年六月癸亥朔，“日有食之。太史院失于推策。诏中书议罪以闻”(《元史·成宗纪》)。

《元史·天文志》记有，元世祖至元二十九年正月甲午朔，“日食，有物渐侵入日中，不能既。日体如金环然，左右有珥，上有抱气”。这是迄今所知，中外最早的一次日环食细致的观测实录。

现以这三次日食为例，用前面介绍的授时历步日食法，推算它们发生的时间和食分，看看与元史记载的预报、观测是否一致。并与现代计算比较，讨论其精度。推步考查结果列于表 10－21。

由表 10－21 看出，元史记载与我们用授时历日食法推步得到的加时和食分基本是一致的。大德六年六月癸亥朔日食，元史说，“依历，日食五十七秒”，计算的食分(115 秒)稍大，可能与推算中取舍的位数有关。推步时取元大都半昼分。

现代计算表明，大德三年八月己酉朔日食，食分仅为 0.02，时届午初，日光正烈，目视不易觉察。所以元史上说，“至其时未食。”大德六年六月癸亥朔日食，太阳地平高度较低，大气吸收很大，食分 2 分有奇，日食清晰可见。匿而不报，显然不妥。故“诏中书议罪”。

大德三年(1299)、六年(1302)距授时历元至元辛巳(1281)仅 18、21 年。授时历步日食，食分有 2 分左右、食甚时刻有近 30 分钟的误差。由于食分有差，故初亏、复圆时刻失天更多。

至元二十九年正月甲午朔日食，授时历推算食分为 7 分 17 秒(0.72)，与天有 0.24 的误差。天文志所载为实测记录，与现代天文计算得食分 0.96 的日环食完全吻合。食甚时刻授时历失天 20 分钟。

表 10—21 元初三次日食的推步

		大德三年八月己酉		大德六年六月癸亥		至元二十九年正月甲午	
		1299 年	8 月 27 日	1302 年	6 月 26 日	1292 年	1 月 21 日
距元积年		18		21		11	
中积		6574.365		7670.0925		4017.6675	
通积		6629.425		7725.1525		4072.7275	
冬至		29.4250		45.1525		52.7275	
闰余		9.2478		12.3433		21.71185	
天正经朔		20.1772		32.8092		31.0156	
盈缩历		173.3735	缩末	170.2779	缩末	160.9094	缩末
迟疾历		6.3656	迟	10.5909	疾	13.5591	疾
交泛		5.7978		9.9408		21.9616	
食月经朔		45.9526		59.5233		30.0768	
盈缩历		73.9063	缩初	11.7496	缩初	37.3493	盈初
盈缩差		−2.28355	缩	−0.54133	缩	1.5579	盈
迟疾历		10.3723	疾	10.6455	迟	3.7338	迟
迟疾限		126.5418	疾	129.8755	迟	45.5528	迟初
迟疾差		−3.89144	疾	3.64711	迟	4.1706	
加减差		−0.49385		0.2174		0.4556	
食月定朔		45.4587		59.7408		30.5324	
交泛		26.6632		26.1694		26.5983	
定入迟疾历						4.18943	
限						51.1111	迟
定限行度		0.9433		1.0893		0.9580	
半昼分		0.2683		0.3081		0.2050	
交常度		356.4537		349.8522		355.5866	
交定度		354.1701		349.3109		357.1445	正交
中前中后		0.0413	中前	0.2408	中后	0.0324	中后
时差		0.01973		0.065		0.01578	



续表

		大德三年八月己酉		大德六年六月癸亥		至元二十九年正月甲午	
		1299 年	8 月 27 日	1302 年	6 月 26 日	1292 年	1 月 21 日
食甚定分		0.4390		0.8058		0.54818	
距午定分		0.0610		0 3058		0.0482	
食甚入盈缩历		73.3927	缩初	12.0321	缩初	37.8207	盈初
盈缩差		−2.2775		−0.5536		1.57276	
食甚入盈缩历行定度		71.1152		11.4785		39.39346	
南北泛差		1.7555		4.3895		3.6301	
南北定差		1.3564		0.0328		2.7766	减
东西泛差		4.2405		1.0505		3.01724	
东西定差		1.0347		1.285	减	0.5817	加
日食入正交中交定限度		360.0311		356.388		355.4451	
入阴阳历去交前后度		5.861	阴历交前	7.0771	阴历交前	1.6994	阳历交后
日食分秒		0.0267	2.67 分	0.0115	1.15 分	0.07168	7.17 分
定用分		0.04139		0.02453		0.05746	
初亏		0.3976	9:32.5 巳Ⅰ2		18:45 酉Ⅱ3	0.4907	11:47 午Ⅰ3
食甚		0.4390	10:32 巳Ⅱ2		19:20 戌Ⅰ1	0.5482	13:09 未Ⅰ0
复圆		0.4804	11:32 午Ⅰ2		19:56 戌Ⅰ3	0.6056	14:32 未Ⅱ2
食类		日环食		日偏食		日环食	
均时差		−0°.33	1ᵐ.32	0°.64	2ᵐ.60	3°.61	14ᵐ.44
北京食分		0.02		0.24		0.96	
初亏	平时 视时					11:32	11:03
食甚	平时 视时	11:27	11:14	19:28	19:11	13:18	12:49
复圆	平时 视时					14:55	14:26

(二)盈缩、迟疾、加减差及迟疾行度的计算

授时历于日月五星盈缩，皆以垛积招差立算，法既简单，又较合天。其术前已述及。日月食推步中，不时要计算盈缩、迟疾、加减差及疾迟行度。这里介绍在手边没有太阳盈缩、太阴迟疾立成表的情况下，怎样用简单的方法直接得到它们。

太阳盈缩、太阴迟疾布立成法如表 10—22 所示。

表 10—22　太阳盈缩、太阴迟疾布立成法

积日	盈端积差(度)	盈缩加分	平立合差	加分立差
限数	迟疾积差(度)	损益分	平立合差	损益立差
初		A	B	C
1	A	$A+B$	$B+C$	C
2	$2A+B$	$A+2B+C$	$B+2C$	C
3	$3A+3B+C$	$A+3B+3C$	$B+3C$	C
4	$4A+6B+4C$	$A+4B+6C$	$B+4C$	C
5	$5A+10B+10C$	$A+5B+10C$	$B+5C$	C
6	$6A+15B+20C$	$A+6B+15C$	$B+6C$	C
S	$SA+\frac{S(S-1)}{2}B+\frac{S(S-1)(S-2)}{6}C$	$A+SB+\frac{S(S-1)}{2}C$	$B+SC$	C

计算太阳盈缩，视日辰在冬至、夏至前后位置判定。冬至后为盈历，夏至后为缩历。盈初缩末限为 88.909225 日，缩初盈末限是 93.712025 日。入盈历者，在盈初缩末历以下，为初限，以上，反减半岁周 182.62125 日，余为末限；入缩历者，在缩初盈末限以下为初限，以上，反减半岁周为末限。

计算月行迟疾，视所求日辰入转日分(距近地点日数)而定。入转日分小于转中 13.7773 日，为疾历；大于转中，则减去转中为迟历。将迟疾历日及分，以 12.20 限(1 日的限数)乘之，得数(迟疾限)小于等于 84，为初限；大于 84，则反减中限 168，余为末限。

对于太阳盈初缩末历(即冬至前后各 88.909 日以内)，立成表中的 A、B、C 数值为(分)：



$C=6\times$立差$=6\times 0.000031=0.000186$

$B=2\times$平差$+C=2\times 0.0246+C=0.049386$

$A=$定差$-$平差$-$立差

$=5.1332-0.0246-0.000031$

$=5.108569$

太阳缩初盈末历（夏至前后各 93.712 日以内），A、B、C 数值（分）为：

$C=6\times$立差$=6\times 0.000027=0.000162$

$B=2\times$平差 $0.0221+C=0.044362$

$A=$定差 $4.8706-$平差 $0.0221-$立差 0.000027

$=4.848473$

太阴迟疾立成中，A、B、C 数值（度）为：

$C=6\times$立差 $0.00000325=0.00001950$

$B=2\times$平差 $0.000281+C=0.0005815$

$A=$定差 $0.1111-$平差 $0.000281-$立差 0.00000325

$=0.11081575$

知道了初日的加分（损益）立差 C、平立合差 B 及盈缩加分（初限损益分）A，则可以很容易求出第 S 日（限）的盈缩加分（损分益分）、盈缩积度（太阴为迟疾积度）。

第 S 日盈缩加分$=$初日盈缩加分 $A-[S\times$平立合差 $B+S(S-1)\times$加分立差 $C/2]$

太阳第 S 日盈缩积差

$$=SA-[S(S-1)B/2+S(S-1)(S-2)C/6]=\sum_{0}^{S-1}\text{盈缩加分}$$

再由线性内插得出所求入历日分的太阳盈缩差。

盈缩差$=$入盈缩历日分去大余（定朔望或食甚入盈缩历日小数部分）$\times$盈缩加分$+$盈缩积度。

若太阴入迟疾历初末限数为 S 限，其损益分、迟疾差为：

第 S 限损益分定积$=SB+S(S-1)C/2$

第 S 限损益分$=$初限损益分 $A-$第 S 限损益分定积

$=A-[SB+S(S-1)C/2]$

第 S 限迟疾积度$=S\cdot A-[S(S-1)B/2+S(S-1)(S-2)C/6]$

$$=\sum_{0}^{S-1}\text{损益分}$$

迟疾差$=$入迟疾历初末限 S 限的小数部分$\times S$ 限的损益分$+S$ 限的迟疾积度

授时历盈缩、迟疾招差，皆以初末一象限为法。初日盈缩加分、损分益分俱为

最大之值。亦即盈缩加分、损益分都是前多后少。二差(平立合差)、三差(加分立差、损益立差),由后减前得出,所以皆为负数。而立成表中列出的 ABC 及各项数值俱为正数。故盈缩加分、盈缩积差、损益分、迟疾积度算式中出现减号。

月平行度 13.36875 度,太阴限平行度为 1.0962 度。太阳日平行 1 度,太阳限行 0.082 度(8.20 分)。

太阴所入迟疾限下行度=初限疾迟行度±所入迟疾初末限 S 损益分定积。迟加、疾减。也可表示为:

疾历 S 限行度 =月每限平行度 1.096+S 限损益分

迟历初末 S 限行度=月每限平行度 1.096−S 限损益分

$$加减差=\frac{(盈缩差\pm迟疾差)\times 0.082}{所入迟疾初末限下行度}$$

同名相从,异名相消。盈迟、缩疾为同名,盈疾、缩迟乃异名。所得加减差,盈迟为加,缩疾为减。盈疾、缩迟加减从大者。

定入迟疾历=迟疾历±加减差

迟疾定限=定入迟疾历×日转限 12.20

定限行度=定限下迟疾行度−太阳限行分 0.082

迟疾差又法:

入迟疾历日分内减日率(整限数×0.0820085),得日的小数 t,则:

迟疾差(度)

=迟疾积度+日的小数 t×损益分/8.20

=迟疾积度+日的小数 t×损益度/0.082

有条件的读者,当然最好用盈缩差、迟疾差算式直接计算。

太阳盈初缩末历(初末限为 x 日):

$$盈缩差=[5133200-(31x+24600)x]x$$

太阳缩初盈末历:

$$盈缩差=[4870600-(27x+22100)x]x$$

月亮运行迟疾差(初末限数为 x):

$$迟疾差=[11110000-(325x+28100)x]x$$

皆满亿为度。

用公式计算与用内插得出的迟疾差,有时在"秒"数位会出现不同,盈缩差有时会在"微"数位稍有差别。

日食食甚时,太阳圆面视直径中被月球遮住的部分称食分。现代天文以太阳视直径为单位来度量。月食食分是食甚时,月球视直径进入本影的部分与月球视直径之比,以月球视直径为单位。授时历、大统历,以分秒表示日月食食分。将日



月视直径当作 10 分。10 分以上即为全食。授时历分秒俱为百进制。度百分、分百秒。因此,食分表示为小数形式与现代正好差 1 位。食分为 0.867 的日食,授时历称作 8 分 67 秒,表示为 0.0867。

(三)明末的四次日食预报及观测

历法疏密,验在交食。明代中叶,弘治、正德年间,推算日月食起复,屡有舛误。部分官员在酝酿改历之事。至万历中,西洋新法传入。李之藻、徐光启奏上西洋历法,略言台监推算日月交食时刻亏分之谬,而力荐由传教士协助,乞敕礼部开局,共理历事。因此,明末这一段时期,文献上记载了多次日食的推步和台官测候的结果。在其中,我们选取了四次进行推步,并与历史所述做了比较。

①正德九年八月辛卯日食(1514 年 8 月 20 日),"历官报食八分六十七秒。而闽广之地遂至食既"(《明史·历志》)。

②隆庆六年六月乙卯朔日食(1572 年 7 月 10 日),"自卯正三刻至巳初三刻,所不尽分余"(《明神宗实录》)。"台官候得初亏卯正三刻,复圆巳初三刻,约食八分。大统推得见食八分二十一秒,初亏卯初二刻,食甚辰初初刻,复圆辰正二刻(李天经《古今交食考》)。

③万历二十四年闰八月乙丑朔(1596 年 9 月 22 日)日食,大统历推初亏巳正二刻,食几既(《明史·历志》),"巳正二刻初亏正西,午初四刻食九分余"(《明神宗实录》);李天经《古今交食考》载,"台官测得初亏巳正二刻,食甚午初四刻,复圆午正四刻,约食八分余。"

④万历三十八年十一月壬寅朔(1610 年 12 月 15 日)"日食,约七分余,在尾宿度。初亏未正三刻,申半,日入未复"(《明神宗实录》)。谈迁《国榷》说,"日食,初,钦天监奏,日食七分有余,未正一刻初亏,申初二刻食甚,酉初二刻复圆。春官正戈谦亨等又称未正三刻初亏,约食七分有奇。于是兵部职方员外郎驳之,谓亲验日晷,申初二刻略亏西南,申正二刻食甚,且不止七分五十余秒。盖历官前后俱误也。"李天经《古今交食考》谓,"大统推得未正一刻初亏,申初三刻食甚,酉初初刻复圆。台官测得,初亏未正三刻,食甚申正初刻,至申正四刻日已入,未见复圆。查应天府是日日入申正四刻。若顺天则在申正二刻五分,是复圆时日已入三刻有奇。"

四次日食大统历和现代方法计算结果列于表 10－23。表中用(表 10－21 中已用)Ⅰ、Ⅱ表示辰刻制中的初、正,以节省文字。如"卯初二刻"表示为"卯Ⅰ 2","巳正三刻"为"巳Ⅱ3"等。前已说过,授时历、大统历以分秒表示日月食的食分,分秒皆为百进制。大于 10 分为全食,小于 10 分为偏食。如月食食分 12 分 56 秒,是月全食。可写成 12.56 分,也可标为 0.1256 度。

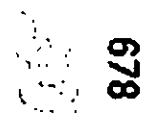
表 10－23 明末四次日食大统历推步过程和现代计算结果

	正德九年八月辛卯 1514 年 8 月 20 日	隆庆六年六月乙卯 1572 年 7 月 10 日	万历二十四年闰八月乙丑 1596 年 9 月 22 日	万历三十八年十一月壬寅 1610 年 12 月 15 日
距元积年(实足)	233	291	315	330
中积	85101.5025	106285.5675	115051.3875	120530.0250
通积	85156.5625	106340.6275	115106.4475	120585.0850
冬至	16.56252	20.6275	26.4475	45.0850
闰余	14.5385	25.1683	20.4022	6.3494
天正经朔	2.0240	55.4592	6.0453	38.7356
盈缩历	168.0828 缩末	157.4530 缩末	162.2191 缩末	176.2719 缩末
迟疾历	11.3797 疾	22.8821 迟	3.5508 疾	12.8757 疾
交泛	20 3784	22.7033	3.7411	26.7743
食月经朔	27.7994	51.7039	1.3513	38.7356
盈缩历	68.6156 缩初	28.4552 缩初	92.2825 缩初	176.2719 缩末
盈缩差	2.2143	1.2007	2.4004	0.3003
迟疾历	1.6091 疾	11.13546 疾	9.53346 迟	12.8757 疾
迟疾限	19.6305 疾初	135.85256 疾末 32.1474	116.3082 迟末 51.6918	157.0837 疾末 10.9163
迟疾差	2.0481	3.1732	4.5432	1.1751
加减差	－0.2930 缩疾同名相从	－0.3538 缩疾同名相从	＋0.1524	－0.1219 缩疾同名相从



续表

	正德九年八月辛卯 1514年8月20日	隆庆六年六月乙卯 1572年7月10日	万历二十四年闰八月乙丑 1596年9月22日	万历三十八年十一月壬寅 1610年12月15日
食月定朔	27.50634	51.3501	1.5037	38.6137
交泛	14.0315	14.0380	26.9247	26.7743
定入迟疾历	1.3160　疾	10.7817　疾	9.6859　迟	12.7538　疾
限	16.0553	131.5364 疾末 36.4636	118.16805 迟末 49.8320	155.5962
定限行度	1.1135	0.9367	1.0737	0.9117
半昼分(应天府)	0.2667	0.2882	0.2511	0.2072
交常度	187.5835	187.6702	359.9502	357.9389
交定度	185.3692　中交	186.4694　中交	357.5498　正交	357.6386　正交
中前中后	0.00634　中后	0 1499　中前	0.0037　中后	0.1137　中后
时差	0.00326	0.05467	0.0019	0.04575
食甚定分	0.50960	0.29543	0.50565	0.65945
距午定分	0.0096	0.20457	0.00565	0.15945
食甚人盈缩历	68.3258　缩初	28.0467　缩初	92.43488　缩初	176.1957　缩末　6.4256
盈缩差	2.2100	1.1862　缩减	2.4006	0.3038
食甚人盈缩历定度	66.1158	26.86046	90.0343	175.8919　缩末　6.72935
南北泛差	2.1224	4.0742	0.1251	4.4358



续表

	正德九年八月辛卯 1514年8月20日	隆庆六年六月乙卯 1572年7月10日	万历二十四年闰八月乙丑 1596年9月22日	万历三十八年十一月壬寅 1610年12月15日
南北定差	2.0460减	1.1818减	0.1223加	1.02225减
东西泛差	4.1192	2.2373	4.4577	0.6329
东西定差	0.1582加	1.8310减	0.1007减	0.4035减
日食入正交中交定限度	186.1622中交	185.0372中交	357.6617正交	356 2143正交
入阴阳历去交前后度	0.7930阳历交前	1.4322阴历交后	0.1118阴历交前	1.4243阳历交后
日食分秒	0.0867 8分67秒	0.0821 8分21秒	0.0986 9分86秒	0.0763 7分63秒
定用分	0.0511	0.0603	0.0535	0.0612
初亏时刻	0.4585 11:00午Ⅰ0	0.2351 5:39卯Ⅰ2	0.4522 10:51巳Ⅱ3	0.5983 14:22未Ⅱ1
食甚时刻	0.5096 12:14午Ⅱ0	0.2954 7:05辰Ⅰ0	0.5056 12:08午Ⅱ0	0.6595 15:50申Ⅰ3
复圆时刻	0.5607 13:27未Ⅰ1	0.3557 8:32辰Ⅱ2	0.5591 13:25未Ⅰ1	0.7207 17:18酉Ⅰ1
食类	日全食	日环食	日全食	日环食
均时差Z	0°.09 0m.36	1°.34 5m.36	−1°.87 −7m.48	−1°.04 −4m.16
北京食分	0.70	0.91	0.94	0.61
初亏时分平时,视时	10:42 10:27	7:00 6:40	9:58 9:51	14:46 14:36
食甚时分平时,视时	11:58 11:43	8:16 7:56	11:17 11:10	16:14 16:04
复圆时分平时,视时	13:14 12:59	9:44 9:24	12:36 12:29	17:28 17:18



将推步结果与文献记载比较可以看出，我们的推步与明末文献所书的“大统推得”的食分和三限时刻完全一致。如正德九年八月辛卯日食，“历官报食八分六十七秒”；隆庆六年六月乙卯日食，“大统推得初亏卯初二刻，食甚辰初初刻，复圆辰正二刻，见食八分二十一秒”，等等。万历二十四年闰八月乙丑日食，邢云路上书云：“大统历推初亏巳正二刻，食几既。”但在邢云路所著《古今律历考》中，他自己用大统历推得的初亏时刻为巳正三刻。我们用大统推步所得与《古今律历考》三限时刻相同，食分 9 分 86 秒，也确属“食几既”。不知是否明史记载的邢云路上书中的巳正二刻为三刻之误。万历三十八年十一月壬寅日食，明末文献所记三限时刻有三种大统推算的结果，食分均为七分有奇。我们用大统推得的三限时刻基本上与《古今交食考》记载的相合，食分七分有奇也与所记一致。

授时历集古历之大成，是中国制的最完善的优秀历法，行用了 364 年，也最长久。交食是检验历法最方便、可靠的依据。交食的推步也一直受到历代的重视。前面以 7 次元明日食记载来反复说明授时历的步交食方法。这些实例证明复原的授时历、大统历步交食法确与其时颁行历法的推步方法一致，对其精度也有所了解。

明朝的这 4 次日食，除正德九年八月日食外，文献中均有详细的观测记录。

隆庆六年六月日食，“自卯正三刻至巳初三刻，所不尽分余”。“台官测得初亏卯正三刻，复圆巳初三刻，约食八分。”卯正三刻当北京视时 $6^h31^m \sim 6^h46^m$，巳初三刻为 $9^h31^m \sim 9^h46^m$。与现代方法计算比较，初亏时间合，复圆时刻实测稍迟几分钟，食分实测与计算相当或稍小。万历二十四年闰八月日食记录的实测时刻，初亏为巳正二刻（约当 $10^h17^m \sim 10^h31^m$），食甚午初四刻（当 $11^h46^m \sim 12^h$），复圆午正四刻（当 $12^h46^m \sim 13^h$）。食分实测一作八分余，一作九分余。食分实测与现代计算基本一致或略小，三限时刻皆有约近半小时的误差。万历三十八年十一月日食，实测未正三刻初亏（当 $14^h31^m \sim 14^h46^m$），申正初刻（$16^h \sim 16^h02^m$）食甚，日带食而没，未见复圆，食七分余。初亏、食甚时刻与现代计算一致，实测食分稍大。

纪时日食观测记录是研究地球自转长期变化的极其有用的材料。上述三限时刻中实测与现代计算之间的差异问题，笔者及其他作者在有关地球转速变化研究文章中将做深入分析考查，有兴趣的读者可以参看。

从以上 7 次元明日食的推算和实测结果比较中，可以看出，授时历步日食结果与真实天象，就北京地区见食而言，食分约有一至二分的误差，食甚时刻平均约差半小时（通常在 10^m 至 60^m 之间）。但是值得注意的是，授时历、大统历行用的这 364 年间，步日食的精确度，看不出随行用年代的延续而有明显降低的趋势。尽管

明代大统历推算北京见食情况而一直采用南京应天府的晷漏半昼分时刻，情况仍然如此。

(四)授时历大统历月食推步实例

《明史》记载，景泰元年正月月食，监官误推，致失救护。成化十五年十一月戊戌望月食，监推又误。弘治中，月食屡不应，日食亦舛。明代中叶，成化以后，交食往往不验，议改历者纷纷。中国古代不太重视月食。但从明史所述，可知，在检验历法疏密方面，月食推步和观测也有着举足轻重的作用。

下面以元明四次月食为例，进一步介绍授时历、大统历推步月食的具体过程。元代月食选取至正五年乙酉岁八月十六日丁卯夜望月食(1345 年 9 月 12 日)，出于《黑城出土文书》(载《文物》1987 年 7 期，图版四)。明代三食，其一选取万历三十三年乙巳岁二月十七日辛酉月食(1605 年 4 月 4 日)，事载《国榷》、《湖北蕲州志》。另外两次选取明史记载的验历月食。一为景泰元年正月辛卯，卯正三刻月食(1450 年 1 月 28 日)。史称监官误推辰初初刻，致失救护。下法司，论徒。诏宥之。又一为崇祯五年九月十五日(1632 年 10 月 28 日)月食，监推初亏在卯初一刻，徐光启等推在卯初三刻，回回科推在辰初初刻。三法异同，致奉诘问。至期测候，阴云不见，无可证验。

表 10—24 列出用大统历步月食法推步和用现代方法计算这四次月食的结果，并讨论大统术推步的疏密。

元至正月食与现代计算，食分相差 0.288，食甚时刻相差 26 分钟。明万历月食食分差 0.159，食甚时刻失天 49 分钟。元食时刻偏早，明食稍迟。

根据《明史》记载，景泰元年正月辛卯月食，钦天监推当辰初初刻，我们用大统历推步比这早 1 分钟。崇祯五年九月十五日月食，监推初亏在卯初一刻，与我们以大统推步所得相合。景泰月食与现代计算比较看出，大统食分仅小 0.06，食甚时刻约迟 36 分钟。崇祯月食，大统推算，食分略大 0.09，食甚略早约 13 分。授时历制定于七百多年前，行用了 364 年。由此看出，对于步日月交食来说，食分和食相时刻如此的精度，对于古代历法，应该说还是比较精密的。徐光启推得崇祯五年九月十五日月食，初亏应在卯初三刻。与现代计算完全一致，说明西洋新法步交食确又比授时历高出一截。



表 10－24 元、明四次月食授时历、大统历推步程序和现代计算结果

	至正五年八月十六丁卯 1345 年 9 月 12 日	万历三十三年二月十六 1605 年 4 月 3～4 日	景泰元年正月辛卯 1450 年 1 月 28 日	崇祯五年九月十五 1632 年 10 月 28 日
距元	64	324	169	351
中积	23375.52	118338.57	61725.9825	128000.1175
通积	23430.58	118393.63	61781.0425	128055 1775
冬至	30.58	13.63	41.0425	35.1775
闰余	7.4953	0.1583	27.2481	28.0183
天正经朔	23.0847	13.4717	13.7944	7.1592
盈缩历	175.1259 缩末	182.4629 缩末		
迟疾历	0.9671 迟	4.4253 疾	17.0055	1.1205 疾
交泛	18.7630	18.4884	7.4492	1.3507
食月经朔	48.8600	42.0635	12.8556	31.9958
盈缩历	75.6587 缩初	88.4335 盈初	31.8131 盈初	114.1970 缩末 68.4243
迟疾历	4.9737 疾	10.3532 疾	20.9575 迟 7.1802	9.0792 迟
交泛	12.41614	25.4435	12.0860	26.8528
食月望交泛	27.18144	12.9966	26.8513	14.4058
食月经望	3.6253	56.8288	27.6209	46.7611
盈缩历	90.42424 缩初	103.1988 盈末 79.4225	46.5784 盈初	128.9623 缩末 53.659
盈缩差	－2.3976	2.3390	1.8259	－1.9982
迟疾历	5.9617 迟	11.3412 迟	8.1682 疾	10.0672 疾
迟疾限	72.7327 迟初	138.3626 迟末 29.6374	99.6520	122.82 疾末 45.18
迟疾差	5.3436	2.9684	－5.2431	－4.1462
加减差	0.22426 加	0.3681 加	－0.2620	－0.4887
食月定望	3.8489	57.1969	27.3589	46.2724
日出分	0.2476	0.2408		
日晨分	0.2226	0.2158		
定入迟疾历	6.1860 迟	11.7093 迟	7.9062 疾	9.5785 疾
迟疾限	75.4692	142.8534	96.4556	116.8577
定限行度	1.0002	1.1047	0.9932	0.9580

续表

	至正五年八月十六丁卯 1345 年 9 月 12 日	万历三十三年二月十六 1605 年 4 月 3～4 日	景泰元年正月辛卯 1450 年 1 月 28 日	崇祯五年九月十五 1632 年 10 月 28 日
交常度	363.3818	173.7483	358.9683	192.5875
交定度	360.9843	176.0866	360.7943	190.5893
卯酉前后	0.1504 酉后	0.1969 卯前	0.1411 卯后	0.2276 卯后
时差	0.004732	0.00811	0.0042	0.0108
食甚定分	0.8449	0.2050	0.3631	0.2832
食甚入盈缩历	90.6436 缩初	103.575 盈末 79.0462	46.3206 盈初	53.1811 缩末
盈缩差	2.3980	2.3358	1.8191	1.9875
食甚入盈缩历定度	88.24563	105.9108	48.1397	51.1936
月食入阴阳历	阴历	阳历	阴历	阴历
去交前后度	2.8091 交前	5.8101 交前	3.0000 交前	8.6926 交后
月食分秒	0.1177	0.0832	0.1155	0.0501
定用分	0.0721	0.0598	0.0723	0.0575
初亏	0.7728 18:33 酉Ⅱ 2	0.1452 3:29 寅Ⅰ 2	0.291 6:59	0.226 5:25 卯Ⅰ1
食甚	0.8449 20:17 戌Ⅱ1	0.2050 4:55 寅Ⅱ 3	0.363 8:43	0.283 6:48 卯Ⅱ 3
复圆	0.9170 22:00 亥Ⅱ 0	0.2648 6:21 卯Ⅱ1	0.435 10:27	0.341 8:11 辰Ⅱ 0
既内分	0.0129			
既外分	0.0592			
食既	0.8320 19:58 戌Ⅰ 4			
生光	0.8578 20:35 戌Ⅱ 2			
食类	月全食	月偏食	月全食	月偏食
均时差 平一视	$-1^{\circ}.7$ $-6^{m}.8$	$0^{\circ}.8$ $3^{m}.2$	$3^{\circ}.8$ $15^{m}.2$	$-4^{\circ}.0$ $-16^{m}.0$
食分	1.465	0.991	1.217	0.409
北京初亏	19:00 平 18:52 视	2:50 平 2:32 视	6:51 平 6:21 视	5:46 平 5:48 视
食既	20:04 平 19:56 视			
食甚	20:51 平 20:43 视	4:24 平 4:06 视	8:37 平 8:07 视	6:59 平 7:01 视
生光	21:37 平 21:29 视			
复圆	22:41 平 22:33 视	5:58 平 5:40 视	10:24 平 9:54 视	8:12 平 8:14 视



第八节　步五星术

一、基本法数和五星动态表

授时历不用上元积年，历法推步依据精密观测得出的历元七应。七应与岁实、朔实、岁差及二十八宿距度等历法常数不同，它是与历元有关的7项天文实测数据，作为日月交食、五星推步的初始条件，也就是计算的起点。

七应中，气应是指历元冬至（至元十八年辛巳岁前冬至1280年12月14日）的干支、时刻为己未日六刻（55.0600日）。闰应为历元冬至的平月龄，即历元冬至距天正经朔的日分，20.2050日。冬至干支时刻内减闰余即得出天正经朔的大余小余。气应、闰应是步气朔的基本起始条件，也是授时历各项推步的基础。周应是历元冬至时刻太阳所在的赤道位置箕宿10度（黄道箕9度），与赤道虚宿6度之间的赤道积度315.1075度。在步日躔中要用到。转应指历元冬至时刻与其前月过近地点的时距为13.0205日，即给出历元月轨近地点的位置。这是步月离，计算月行迟疾差必需的起始条件。朔望日而又当日月处在黄白交点附近时才会发生日月食。所以步交食中，必须计算朔望入交。交应26.0388日，为历元冬至时刻与其前月过降交点之间的时距，是计算食月朔望入交的基本数据。

步五星中，要计算行星运行的盈缩，必须要确定行星的某些特定位置，以及在这些位置时，行星与轨道近日点的角距离。授时历选取星日黄道经度相合作为这种特定位置。合应指历元冬至与其前五星平合（历元平合）之间的时距。历应与合应配合，给出五星历元平合时的平近点角（历元平合与近日点的距度），又称历元平合的入历度。授时历给出的历应数值是时距，它与合应的关系为：

历应＝合应＋历元平合入历度×度率

表示成度为：

历元平合入历度＝（历应－合应）/度率

度率为五星行天1度所需的时日分。

合应，历应，五星各不相同。有了合应、历应，就可以计算得出任意的五星平合位置和平合入历度。

授时历步五星基本数据：

历度365.2575度。

历中$=\frac{1}{2}$历度$=182.62875$度。

历策$=\frac{1}{24}$历度$=15.2190625$度。

周率(日):五星会合周期。

历率(日):五星恒星周期。

度率:五星行天1度所需的日数,也为五星恒星周期(恒星年)。历率/度率=历度。

伏见:日星相距目视可见的最小角距。

五星盈缩立差、平差、定差。

周率、历率、度率、伏见、合应及历应,五星皆不相同。其值如表10—25所示。

表10—25 五星周率、历率、度率、合应、历应值

	木星	火星	土星	金星	水星
周率	398.88	779.9290	378.0916	583.9026	115.8760
历率	4331.2965	686.9580	10747.8846	365.2575	365.2575
度率	11.8582	1.88075	29.4255	1.0	1.0
合应	117.9726	56.7545	17.5643	571.6330	70.0437
历应	1899.9481	547.2938	5224.0561	11.9639	205.5161
伏见	13	19	18	10.5	16.5;19

表10—26以木星为例,介绍五星动态表的形式。

表10—26 木星动态表

段日	段日	平度	限度	初行率
合伏	16.86	3.86	2.93	0.23
晨疾初	28	6.11	4.64	0.22
晨疾末	28	5.51	4.19	0.21
晨迟初	28	4.31	3.28	0.18
晨迟末	28	1.91	1.45	0.12
晨留	24			
晨退	46.58	4.88125	0.32875	
夕退	46.58	4.88125	0.32875	0.16
夕留	24			
夕迟初	28	1.91	1.45	
夕迟末	28	4.31	3.28	0.12
夕疾初	28	5.51	4.19	0.18
夕疾末	28	6.11	4.64	0.21
夕伏	16.86	3.86	2.93	0.22



二、五星周期数据、合应历应的精度

实测得出的七应是授时历给出的历元7项基本天文数据，为日月交食五星推步的基础。它的精度直接影响到推步结果的疏密。这里，有必要考查一下五星合应和历应的精度。

前已说过，合应是历元冬至时刻与其前五星平合（水、金上合）时刻间的时距。太阳平均日行1度。因此合应值实际上也是五星平合与冬至点之间的角距（中国历度）。冬至点的黄经为270°。将五星合应值乘以360/365.2575，化为360°制，与冬至点黄经270°相减，即为授时历给出的历元五星平合的黄经度。我们根据现代方法计算了水、金、火、木、土五星在授时历元时对应的实合的黄经和时刻，与授时历的比较列于表10－27中。

表10－27　授时历元五星平合、实合的比较

		水星	金星	火星	木星	土星
授时	平合黄经	201°.0	66°.6	214°.1	153°.7	252°.7
	平台时刻	2188856.016	2188354.427	2188869.306	2188808.087	2188908.496
计算	实合黄经	196°.8	71°.6	197°.5	155°.6	253°.7
	实合时刻	2188853.625	2188358.925	2188854.375	2188811.825	2188910.125
	黄经差	4°.2	－5°.0	16°.6	－1°.9	－1°.0
	时刻差	2.391日	－4.498日	14.931日	－3.738日	－1.629日
授时	最大盈缩	2°.25	2°.10	25°.24	5°.91	6°.2～8°.1
实	最大中心差	23°.68	0°.78	10°.70	5°.53	6°.40

从授时历五星最大盈缩差看出，郭守敬等测定的五星平合位置是比较准确的。外行星中，火星的轨道偏心率最大，相对平运动盈缩改正也最大。我们计算给出的是实合位置，授时历测定得到的是火星的平合位置。测算误差、中心差改正以及其他摄动因素加到一起，16°.6的黄经差是不足为奇的。水金二星，附日而行。它们的轨道运动，目视观测不易确定。它们的相对误差稍大，也是可以理解的。

授时历历议、历经，大统历法原、立成、推步中均未对历应做详细说明。气、闰、

周、转、交、合六应都有比较明确的天文意义。历应与它们不同，天文意义不是那么直接、明显。理解它似乎稍微要绕点弯子。顾名思义，历应似指历元冬至距五星过近日点的时间间隔，或为冬至点与五星近日点的角距（冬至点的平近点角），即冬至点的入历度。对于水金二星，确是如此。金星历应 11.9639 度，就是冬至点与金星近日点间之角距离，即冬至点的平近点角或称作冬至点的入历度。水星历应 205.5161度，与此相同，就是冬至点距水星近日点的角度。这个角度是水星、金星历元平合（授时历历元冬至前的平合）入历度（平合与近日点的角距或平合的近点角）与合应（历元平合与冬至点间的角距）相加之和。

授时历给出的历应值是日分，它的确切的天文意义是，行星自近日点走到历元平合所需的日分加上平合与历元冬至间的时距（合应）。用数学算式表达，就是：

历应（日分）＝合应（日分）＋历元平合入历度×度率

合应亦即平合与冬至点的距度。金水二星度率 10000，即授时历认为日行 1 度。由此式看出，历应就是历元平合入历度与合应（平合与冬至点的角距离）之和。亦即冬至点与行星近日点间的角度。

对于火、木、土三星，虽历元平合入历度与合应相加，其和并不等于历应值，但其和表示冬至点与行星近日点间的角距，这是没有疑义的。

冬至点的黄经为 270°。历应、合应值，授时历经中已给出。历元平合入历度可由下式求出：

历元平合入历度＝（历应－合应）/度率

将历元平合入历度与合应相加，其和化为 360°制，与冬至黄经 270°相减，就可得出授时历测定给出的历元五星近日点黄经值。与我们用现代方法计算得出其时近日点实黄经比较结果如表 10－28 所示。

表 10－28　授时历历元五星近日点黄经的精度(°)

		水星	金星	火星	木星	土星
授时历	历元平合入历度	133.52	－551.61	257.07	148.11	174.39
	冬至点近日点角距	202.56	11.79	313.0	264.38	191.70
	近日点黄经	67.44	258.21	317.0	5.62	78.30
是时近日点真黄经		66.28	121.43	322.83	2.79	78.98
授时历测算误差		1.16	136.78	－5.83	2.83	0.68

可以看出，授时历测得的近日点黄经比较准确。五星中，金星的轨道偏心率最小，几近圆形。盈缩差改正小，中心差最大只有 0°.8。附日而行。根据盈缩差间接得出近日点位置，有较大困难，所以它的误差最大。



授时历的制定，遍考汉以后著名历法四十余家。步五星的基本数据也大多参照比对了金赵知微的重修大明历和耶律楚材的西征庚午元历，而做了些微调整与修改。这几部历法给出的五星会合周期、恒星周期是比较准确的。各历稍有不同，互有短长。表10－29中将授时历数值列出，并与现代得出的数值做了比较。

表10－29　授时历五星的会合周期、恒星周期

	会合周期(日)			恒星周期(日)		
	授时	今测	相差	授时	今测	相差
水星	115.876	115.88	0	365.258	87.969	
金星	583.903	583.92	－0.02	365.258	224.701	
火星	779.929	779.94	－0.01	686.958	686.980	－0.022
木星	398.880	398.88	0	4331.296	4332.589	－1.293
土星	378.092	378.09	0	10747.88	10759.20	－11.32

行星绕日公转一周所需的时间，称为公转周期或恒星周期。行星连续两次合(内行星上合)或两次冲的时间间隔叫作会合周期。行星的冲、合，不仅决定于行星本身的运动，而且和我们地球的运动也有关系。所以离地球越近的行星，例如金星、火星，它们的会合周期越长。

会合周期、恒星周期是现代天文术语。中国古历没有这些名称。称会合周期为"一见"、"一复"、"一终日数"等。古历中有五星"行天一周"、"一周于天"的说法。在授时历、大统历中用历率、度率来表示。在金元历法给出五星行天一周数值以前，古历的这个数值，实际上可以根据行星的日平行率、"一日星行"计算得出。天文书中这样说，恒星周期就是以恒星作为标准点，行星与某一恒星两次同一黄经的时间间隔。据此定义，中国古历五星行天一周的数值就是恒星周期。但要指出，中国古历以五星行天一周所表示的"恒星周期"与现代天文学的恒星周期并非同一概念。后者是指行星绕日公转的时间，或对太阳上的观测者而言，行星从恒星间的某点再回到同一点所需的时间。而中国古历认为日月星辰诸天皆绕地旋转，当然谈不到公转周期问题。作为五星行天一周的"恒星周期"，中国古历是对地球上的观测者而言的，指行星从恒星某点再回到同一点的时间。这对于火、木、土外行星问题不大，对于水星、金星内行星，就完全是两回事了。

金、水二星附日而行。虽然在每个会合周期，金、水二星都有一段时间在天空自东向西逆行。但观测它们的运动会发现，金、水二星的黄经变化与太阳差不多，基本上一年一个周期，从0°到360°。水星一年有3.15个会合周期，会出现3次逆行。逆行弧约14°，历时约23日，加留需时30日至40日。速度有快有慢，但大抵

黄经从0°变到360°，需时一年。金星8年中有5个会合周期。8年中会出现5次逆行阶段。出现逆行的前后时期，金星的黄经从0°增加到360°，大约需历时400日。金星逆行弧约16°，逆行时间约42日，加上前后留需时60～70日。金星处顺行中间时期，其黄经从0°增加到360°，大约只需时300日。黄经周期变化长段、短段并非相间发生，有时长段会相连。平均说来，8年中，金星的黄经变化经历5个长段，3个短段，共历黄经从0°到360°，8个周期。也是大约一年一个周期，从0°到360°。即，从地球上看，水星、金星从恒星间某点出发，行天一周，再回到起始位置，平均说来，需要一年。因此，很自然的，古人认为金星、水星运动，和太阳一样，日行1度，岁行1周。所以自古，直到授时历、大统历，一直把金星、水星的"恒星周期"视作1年。从古历"行天一周"的含义来看，古人对金、水二星的观测还是很细致准确的。不应该把水、金二星的"日行一度，岁行一周"的"恒星周期"，与今天天文测定的87.969日、224.701日的公转周期、恒星周期等同起来。

三、五星推步

从地球上看，五星都在黄道附近运动，速度有疾有徐，主要做自西向东方向的运动(顺行)，但有时会朝相反方向即向西运动(逆行)。顺行、逆行转换前后，行星在天空有一段时间似乎不动(留)。留以后，行星开始朝相反方向运动。行星运动呈现的顺逆留迟疾现象，实际上是五星轨道运动和地球绕日运动的综合结果。从太阳上看，行星运动并非如此，总是自西向东顺行，只速度稍许变化而已。可能有的读者对逆行有些不解。行星绕太阳旋转，它们在轨道上的速度同它们与太阳的距离有关。行星轨道速度所产生的离心力永远总和太阳的引力平衡。所以距日越远，行星的速度就越小。水、金、火、木、土五星的公转速度分别为(千米/秒)：

水星 47.9　　金星 35.0　　地球 29.8

火星 24.1　　木星 13.1　　土星 9.6

如果某一时间，地球与火星同处太阳一侧，它们的运动方向一致。由于外行星速度较地球为慢，所以落后，形成逆行。对于木、土二星，同一道理。当它们与地球同在太阳一侧，也就是当它们处在冲附近时，从地球上看，它们在星空间是在做从东向西的逆行。至于水星、金星，它们是内行星，比地球更接近太阳，有着比地球更大的速度。当它们与地球同处太阳一侧时，或当它们经过太阳和地球之间即下合附近时，地球上的观测者会发现，在下合以前，行星位于太阳东边，下合时日星相合，而下合后，行星跑到了太阳的西边。在这期间行星在作自东向西的逆向运动。

授时历与其前诸历一样，都是通过五星会合运动动态表来计算行星位置，确定见伏的日辰时刻。首先，根据五星的平位置，求出入历度，计算五星轨道运动的盈



缩差，得出会合运动动态表各段的行星位置和时刻；其次，根据得出的各段定积日分，计算日行盈缩，进行地球轨道运动改正，得到定见定伏的日辰时刻及定合行星所躔的黄道宿次和度分。

1. 推天正冬至后五星平合及诸段中积中星

中积＝积年×岁实 365.2425

前合＝$[$(中积＋合应)/周率$]_R$

后合＝周率－前合

其星天正冬至后平合中积＝后合(日)

其星天正冬至后平合中星＝后合(度)

平合中积日为平合距天正冬至的时距，中星为冬至点与平合的角距离。

各段中积＝后合中积＋其前诸段段日之和($\sum_{1}^{n-1}$段日)

各段中星＝后合中星＋其前诸段平度之和

＝后合中星＋$\sum_{1}^{n-1}$平度

n 指所求之段数。段日、平度由五星动态表查出。各段中积为各段初日距天正冬至的平时距，各段中星为各段初行星所在的平位置距冬至点的角度。所求段以前诸段中有退段者，则退段之平度求和时应相减(即退段之平度为负值)。

2. 推五星平合和诸段入历度及盈缩差

平合入历度＝$[$(中积＋历应＋后合)/历率$]_R$/度率

平合后各动态段的入历度

＝平合入历度＋其前诸段限度之和＝平合入历度＋$\sum_{1}^{n-1}$限度

诸段限度数值由五星动态表查出。

入历度小于历中 182.62875 度，为盈历；大于历中，则入历度内减去历中，余数为入缩历。

盈缩历其数值小于周天象限度 91.314375 度，为初限；大于周天象限度，则反减历中为末限。即，末限＝历中－盈缩历(大于 91.314375)。

火星，情况特殊。盈历在 60.87625 度以下，为初限；以上，用减历中，余为末限。即，末限＝历中－盈历(大于 60.87625 度)。缩历，在 121.7525 度以下，为初限；以上，用减历中，余为末限，即，缩历末限＝历中－缩历(大于 121.7525 度)。

盈缩差＝[定差±(平差±立差×初末限)×初末限]

×初末限

五星盈缩平差、立差、定差见基本法数。

除算式推步外，盈缩差也可由五星盈缩立成内插得出，做法如下：

置盈缩历，以历策15.2190625除之，为策数，不尽为策余。即：盈缩历/历策＝策数＋策余/历策。策余＝[盈缩历/历策]$_R$。盈缩差＝策数条下盈缩积±策余×损益率/历策，益加损减。所得盈缩差与算式计算不尽相同。

3. 推平合诸段定积日、加时定日和所在月日

平合诸段定积日＝各段中积±盈缩差，盈加缩减。满岁周去之。如中积不及减者，加岁周减之。本段若无盈缩差，借前段差加减之。

平合诸段加时日辰(定日)＝[(诸段定积日＋天正冬至日分)/纪法]$_R$。置定积日，以岁前冬至日分加之，满纪法(60)去之，至不满纪法。余数，命甲子算外(甲子为0)，即为定日(合伏诸段初日日辰)。(平合及诸段定积＋天正闰余)/朔策＝平合及诸段月数＋入月以来日数/朔策。其月数，命天正十一月算外。余数即其段入月经朔日数及分秒。

平合及诸段月数＝Int[(平合及诸段定积＋天正闰余)/朔策]。入月以来日数＝[(平合及诸段定积＋天正闰余)/朔策]$_R$。

这样，就得出了合伏及诸段初日所在的月日。据其月定朔干支，与加时定日(合伏及诸段初日日辰)相距，即得合伏及各段所在定朔月日。

$$入月经朔干支=\left[\frac{天正经朔+月数\times朔策}{纪数\ 60}\right]_R$$

4. 推各段定星、各段加时所在宿度、各段初日晨前夜半定星

诸段定星＝各段中星±盈缩差。金星用2×盈缩差，水星用3×盈缩差，盈加、缩减。盈缩差依推定积日法求得。

诸段加时定星＝诸段定星＋天正冬至黄道日度。以黄道宿钤累减之，如不及减者，即为其星其段加时所躔黄道宿度。如减箕，余入斗；减斗，余入牛；等等。如其段原无中星度，则段下亦无定星及加时定星度分。

加减定分＝定日小余×其段初行率。顺段为减分，退段为加分。

诸段初日晨前夜半定星＝加时定星±加减定分。以黄道积度钤累减之，得夜半宿次。其留段即用加时定星，为夜半定星。

5. 求五星每日晨前夜半星行宿次

日率＝次段定日(日辰)－其段定日(日辰)。次段不及减，加纪法减之。

度率＝次段夜半定星－其段夜半定星。次段不及减，加周天365.2575度减之。凡近留之段，皆用留段加时定星，与本段夜半定星相减。如星度逆者(逆行段)，以后段减前段即各得度率。

其段平行度分＝度率/日率。

其段泛差＝后段平行分－前段平行分。凡五星之伏段及近留之迟段及退段，皆无泛差。



增减差＝2×泛差/10。

初日末日行分＝本段平行分±增减差。本段平行分与次段平行分相较，前多后少者，加为初日行分，减为末日行分；前少后多者，减为初日行分，加为末日行分。

总差＝2×增减差。

日差＝总差/（日率－1）。初日行分多，为减差；末日行分多，为加差。合伏段（前伏）末日行分＝后段初日行分＋后段日差/2；后伏（晨伏、夕伏）初日行分＝前段（本段之前）末日行分＋前段日差/2；伏段增减差＝伏段平行分－初日末日行分；近留之前迟段（木火晨迟末，土之晨迟，金之夕迟末，水之夕迟）初日行分＝前段末日行分－2×前段日差；近后留之迟段（木火夕迟初，土之夕迟，金之晨迟初，水之晨迟）末日行分＝后段初日行分－2×后段日差；前后近留之迟段增减差＝初日末日行分－迟段平行分。因五星之伏段及近留之迟段及退段，皆无泛差。所以前后伏、迟、退段之增减差，需另外求出。

木火土三星退行段增减差＝0.6×平行分

金星前后退伏段增减差＝3×平行分/20

前退段末日行分＝后段初日行分－后段日差

后退段初日行分＝前段末日行分－前段日差

增减差＝初日末日行分－本段平行分

水星退行段增减差＝平行分/2

以上五星伏段、近留之迟段及退段，亦有：

初日末日行分＝平行分∓增减差

前多后少时，加为初、减为末日行分；前少后多时，减为初、加为末日行分。

总差＝2×增减差

日差＝总差/（日率－1）

每日行分＝其段初日行分±日差。后少则损之，后多则益之。并递次损益，则得其段逐日行度。即其段内每日（如第 n 日）行度为：每日行度分＝其段初日行分±$(n-1)$×日差。

每日晨前夜半星行宿次＝其段初日晨前夜半宿次±每日行度分秒。顺加退减。且满黄道宿次去之。亦即有：次日宿次＝其段初日夜半宿次±初日行分；每日行分＝初日行分±日差；每日夜半宿次＝次日宿次±每日行分。每日行分皆顺加退减。

第 n 日晨前夜半星行宿次＝其段初日晨前夜半宿次±$(n-1)$日每日行度之和。第 n 日的行度＝初日行度±$\sum_{1}^{n-1}$日差。

6. **求五星平合见伏入盈缩历**

五星其段定积日及分秒(若满岁周则去之,余在次年天正冬至后),如小于半岁周 182.62125 日,为入盈历;大于半岁周,去之,为入缩历。即定积日在冬至到夏至之间,为入盈历;在夏至到冬至之间为入缩历。

盈缩历各在初限以下,为初限;以上,反减半岁周,余为末限。即得五星平合见伏入盈缩历日及分秒。这样,可计算得出太阳盈缩差和行度、积度。

7. **求五星平合见伏行差**

行差=其段初日太阳行分-初日星行分

金、水二星顺行时:

行差=其段初日星行分-是日太阳行分

金、水二星退行、退合段:

行差=其段初日星行分+太阳行分

其中,水星在夕伏晨见时:

行差=其段初日太阳行分

8. **求五星定合定见定伏泛积及定积定星**

木、火、土三星定合见伏泛积日=平合、晨疾、夕伏定积日。

$$金星定合伏见泛积日=定积\pm\frac{其段盈缩差}{其段行差}$$

$$水星定合泛积日=定积\pm\frac{2\times其段盈缩差度}{其段行差}$$

平合夕见晨伏段,皆盈减、缩加;在退合夕伏晨见段,皆盈加、缩减。

木、火、土三星距合差日=其段初日太阳盈缩积/平合行差。

木、火、土三星距合差度=距合差日-太阳盈缩积。

木、火、土三星定合定积日分=其星定合泛积±距合差日。

木、火、土三星定合定星度分=其星定合泛积±距合差度。皆盈减、缩加。

金、水二星顺合退合者:距合差日=其日太阳盈缩积/平合退合行差。距合差度=距合差日±太阳盈缩积。顺加、退减。

金水星顺合定合定积日分=其星定合泛积±距合差日;金水星顺合定合定星度分=其星定合泛积±距合差度;金水星退定合定积日分=其星退定合泛积±距合差日;金水退定合定星度分=其星退定合泛积±距合差度。顺合者皆盈加缩减;退合者,盈减缩加距合差日,而盈加缩减距合差度。

以天正冬至日分加其星定合定积日分,满旬周 60,去之,命甲子算外(甲子为初日,不计入),即得定合日辰及分秒。

定合日辰=$[(天正冬至日分+其星定合定积日分)/60]_R$。



以天正冬至加时黄道日度，加其星定合定星度，满黄道宿次，去之，即得定合所躔黄道宿度。

定合所躔黄道宿度＝天正冬至加时黄道日度＋其星定合定星度。以黄道宿钤累减之，如不及减者，即为定合所躔黄道宿次。

9. 径求五星合伏定日

木、火、土三星，以夜半黄道日度，减其星夜半黄道宿次，余在其日太阳行分之下，为其日伏合。

金、水二星，以其星夜半黄道宿次，减夜半黄道日度，余在其日金、水二星行分以下者，为其日伏合。金、水二星伏退合者，查太阳和金星、水星黄道位置比较接近的几天。如其日太阳夜半黄道宿次，未到金、水二星宿度，而次日太阳行过金星、水星宿度。金、水二星因退行，则其日为定合伏退定日。

10. 求木、火、土三星定见伏定积日

各置其星定见定伏泛积日，晨加夕减象限日 91.3106 日，如在半岁周 182.62125 日以下，命为 A，自相乘；以上，反减岁周，其余亦命为 A，亦自相乘，积满 75，除之为分，满百为度，不满，退除为秒。以其星伏见度乘之，15 除之，所得，以其段行差除之，为日，不满，退除为分秒。见加伏减泛积，为其星定见伏定积日及分秒。加命如前，即得定见定伏日辰及分秒。即，令：

$$k=\text{象限日}\pm\text{其星定见定伏泛积}$$

晨加夕减。若 $k<$ 半岁周 182.62125 日，则取 $A=k$，若 $k>$ 半岁周，则令 $A=$ 岁周 $365.2425-k$。

木、火、土三星定见伏定积日＝定见定伏泛积±(其星见伏度/15)×(A^2/75)/其段行差。见加、伏减。

定见定伏日辰＝$[(\text{天正冬至加时日分}+\text{其星定见伏定积日})/60]_R$。即，以天正冬至日分秒，加其星定见伏定积日及分秒，满旬周去之，命甲子算外，得定见伏日辰及分秒。

11. 求金、水二星定见伏定积日

常积＝其星定见定伏泛积日±其段初日太阳盈缩积/伏见其日行差。夕见晨伏，盈加缩减；晨见夕伏，盈减缩加。

常积如小于半岁周，为冬至后，大于半岁周，去之，余为夏至后。所得为冬至后，夏至后常积数。二至后常积各在 91.3106 日以下，命为 c，自相乘；以上，则令 $c=$ 半岁周182.62125－二至后常积，亦自相乘。

冬至后晨、夏至后夕定见定伏定积日＝常积(原数)±(其星见伏度/15)×(c^2/18)/行差；冬至后夕、夏至后晨定见定伏定积日＝常积(原数)±(其星见伏度/15)

$\times(c^2/75)$/行差。在晨见夕伏者，冬至后加之，夏至后减之；夕见晨伏者，冬至后减之，夏至后加之。

定见定伏日辰＝[(天正冬至加时＋金水二星定见定伏定积日)/60]$_R$。命甲子算外。

授时历步五星术和宋金各历如崇天、观天、纪元、重修大明、庚午元历等大致相同，仅加入合应、历应及平立定三差而已。诸历中，纪元历、重修大明历比较完备。授时历多采用之。其关于五星运动周期和数据也大致和耶律楚材庚午元历相同。清梅文鼎说，五星之迟疾逆留，汉以前无言之者，汉以后语焉而不详。虽授时历号为精密，而于此未有精测。至西历乃能言之。有的学者也指出，授时历推算五星位置比较繁琐，而结果不及回回天文学的精密。由在下节的计算实例中可看出，与西法相比，中国古历步五星术相对来说进步、发展比较迟缓。但授时历步五星尚较准确。

大统历沿用授时历步五星术，略有改易。其推五星交宫时刻和五星伏见，方法稍有不同。

12. 大统历推五星顺逆交宫时刻

逐日审视五星细行(约当现今五星星历表)，与黄道十二宫界宿次同名、度分又相近者以相减。视其余分，在本日行分以下者，为交宫之日。

顺行交宫宫度差＝十二宫某宫界度分－本日夜半星行宿次；退行交宫度分差＝本日夜半星行宿次度分－某一宫界度分。

交宫时刻＝顺行、退行交宫度分差×日周/本日星行分。

13. 大统历推五星伏见

凡取伏见，伏者要在伏见度以下，见者要在以上。

晨见晨伏其日晨昏伏见度＝其日太阳行度－各星行度；夕见夕伏其日晨昏伏见度＝其日各星行度－太阳行度。

晨昏伏见分＝(次日伏见度－本日伏见度)/4。

晨伏见度＝本日伏见度±伏见分。

夕伏见度＝本日伏见度±3×伏见分。视本日伏见度较次日伏见度为多者减，少者加。根据五星伏见度，在其上下选取伏见日期。

第九节　五星推步实例及其精度

授时历五星推步汲取了纪元历、重修大明历、庚午元历的基本方法和数据，不用积年日法，测算给出了合应、历应，并用平立定三差法改进了五星盈缩的计算。那么，授时历计算五星运动和位置到底精确度如何呢？



《明史·历志》云，崇祯七年(1634)，李天经预推五星凌犯会合行度，言“闰八月二十四(1634 年 10 月 15 日)木犯积尸气。九月初四(10 月 25 日)昏初，火土同度。初七(10 月 28 日)卯正，金土同度。十一(11 月 1 日)昏初，金火同度。旧法推火土同度在初七，是后天三日。金火同度在初三(10 月 24 日)，是先天八日。”八年(1635)，“天经推水星伏见及木星所在之度，皆与大统各殊，而新法为合。又推八月二十七(1635 年 10 月 7 日)寅正二刻，木、火、月三曜同在张六度，而大统推木在张四度，火、月张三度。至期，果同在张六度。”

崇祯八年(1635)八月二十七日，大统历和新法推算的木、火、月位置相差 2～3 度。授时历五星度率数据就是平均运动 1 度所需的日分。从而可知 1 日平均运行的度分。金星平均日行 1 度，火星 0.53 度，土星很慢，平均日行仅 0.034 度。这样，分析可知崇祯七年(1634)九月，新法、旧法(大统历)推算的五星位置也有约 2～3度的差别。《明史》记载，五星运动的推算，以“新法为合”。由此，可得出，授时历、大统历推步五星有约 2～3 度误差的定量概念。

但，新法推算的五星位置是否确实合天，我们用现代天文方法对上述明史记载进行了计算、考查，结果如表 10－30 所示。

表 10－30　崇祯七年八年日月五星实位置

年月日	时分	日(°)	月(°)	水(°)	金(°)	火(°)	木(°)	土(°)
1634.10.15	6 47	201.6	123.8	187.9	242.5	249.7	122.0	257.4
	18 47	202.1	129.8	188.7	243.1	250.1	122.0	257.4
1634.10.22	18 47	209.1	213.3	200.4	251.3	255.3	122.7	258.0
1634.10.25	18 47	212.1	251.3	205.5	254.8	257.5	123.0	258.3
1634.10.28	6 47	214.6	284.4	209.6	257.7	259.3	123.2	258.5
1634.11.1	18 47	219.1	347.7	217.0	262.9	262.7	123.5	259.0
1635.10.7	4 36	193.3	147.0	186.5	178.8	147.1	147.4	267.3

太阳系天体(日月五星彗流等)走近恒星或相互接近在七寸以内(约当今 1°)或光芒相及者，称作凌犯。积尸气又名鬼星团，在鬼宿一东，黄经约相差 1°.6 之处。鬼宿正当黄道。在 1634 年，鬼宿一的黄经为 120°.64，积尸气黄经若当 122°.25。由我们的计算可以看出，自崇祯七年闰八月二十四(1634 年 10 月 15 日)至九月初一(10 月 22 日)夜，木星的黄经自 122°.0 到 122°.7，在积尸气东西 0°.4 以内。李天经的新法计算是合天的。《明史》谓，“天经又言，臣于闰八月二十五日夜及九月初一夜，同礼臣陈六韐等，用窥管测，见积尸为数十小星团聚，木与积尸，共纳管中。盖窥管圆径寸许，两星相距三十分内者，方得同见”。由上面的计算还可看出，李天经用新法推算得出九月初四(10 月 25 日)昏初，火土同度；初七(10 月 28 日)卯正，金土同度；十一(11 月 1 日)昏初，金火同度等与真实天象全都相符。

鬼宿一距黄道很近，黄纬不到1度。在崇祯七八年间，它的黄经为120°.6。鬼宿黄道距度为2.11度，柳13度，星6.31度。即自鬼宿一到张宿一的黄道距度为21.42度。鬼宿一距张宿6度黄道距度为27.42度，化为360°制为27°.02，以鬼宿一的黄经与它相加，得到张6度的黄经为147.6度。现在来看前面的计算结果，在崇祯八年八月二十七日（1635年10月7日）寅正二刻，木、火、月三曜确都位在张5～6度；与李天经用新法推步所得结果一致。所以史称，“至期，果同在张六度。”

至此，我们可以确知，西洋新法步五星与天相合，这比大统历有了质的飞跃。授时历是13世纪中国自己制订的历法，行用了300余年。大统历沿用它来计算明末的五星位置，也仅只有2～3度左右的误差，亦属不易。

下面，我们以授时历步五星法来推算元大德三年、四年（1299—1300）和万历二十七年、二十八年（1599～1600）间的木星运动。以此为例，进一步说明推步方法并考查所得木星位置和在会合周期各动态运动的精确性。

大德三年己亥（1299）木星历：

积年18。

中积＝积年18×岁实365.2425＝6574.365。

天正冬至＝[（中积＋气应55.06）/60]$_R$＝29.4250癸巳。

闰余＝[（中积＋闰应20.205）/朔策]$_R$＝9.2478。

天正经朔＝冬至－闰余＝20.1772（甲申）。

冬至赤道日度＝[（中积＋周应315.1075）/周天365.2575]$_R$＝314.8375（虚6至尾末共305.1075度）＝箕9.7300。

冬至黄道日度＝8＋（9.73－8.67923）÷1.0812＝箕8.9718。

合伏：

前合＝[（中积＋合应）/周率]$_R$＝310.2576。

后合＝周率－前合＝88.6224。

天正冬至后平合中积：88.6224日。

天正冬至后平合中星：88.6224度。

平合入历度＝[（中积＋历应＋后合）/历率]$_R$/度率＝356.8534。

缩末限8.4041。

盈缩差0.8961（缩）。

合伏定积日：平合中积±盈缩差＝87.7263。

定日（去纪）：合定积＋冬至日分＝57.1513（辛酉）。

合伏定星：平合中星±盈缩差＝87.7263度。

加时定星：合伏定星＋冬至黄道日度＝96.6981。



合伏入月日：入二月十日(8.3823 日)。

入月经朔干支日辰 48.7690。

加减定分：定日小余×初行率 0.23=0.0348 度。

晨前夜半定星 96.6633(顺减)。

二月辛酉夜半木星度：壁 2.3058 度。

晨疾初：

中积：平合中积+合伏段日=105.4824。

中星：平合中星+合伏平度=92.4824。

入历度：平合入历度+合伏限度=359.7834。

盈缩初末限 5.4741(缩末)。

盈缩差 0.5884(缩)。

定积：中积±盈缩差=105.4824−0.5884=104.8940。

定日(去纪 60)：定积+冬至日分=14.3190 戊寅。

定星：中星±盈缩差=92.4824−0.5884=91.8940。

加时定星：定星+冬至黄道日度=100.8658。

加减定分：定日小余×晨疾初初行率=0.0702。

晨前夜半定星 100.7956(顺减)。

二月戊寅夜半木星度：壁 6.4381 度。

晨疾末：

中积：晨疾初中积+晨疾初段日=133.4824。

中星：晨疾初中星+晨疾初平度=98.5924。

入历度：晨疾初入历度+晨疾初限度=364.4234。

盈缩限 0.8341(缩末)。

盈缩差 0.0907(缩)。

定积：中积±盈缩差=133.3917。

定日：定积+冬至日分=42.8167(去纪)丙午。

定星：中星±盈缩差=98.5924−0.0907=98.5017。

加时定星：定星+冬至黄道日度=107.4735。

所入月日：(定积+闰余)/朔策。入三月二十五。

入月经朔(去纪)：$[(20.1772+4\times29.530593)\div60]_R=18.2996$ 壬午。

加减定分：定日小余×初行率 0.21=0.1715。

晨前夜半定星 107.3020(顺减)。

三月丙午夜半木星宿度：奎 3.6045 度。

晨迟初：

中积 161.4824。

中星 104.1024。

入历度 368.6134。

盈缩历 3.3559(盈初历)。

盈缩差 0.3627(盈)。

定积：中积±盈缩差＝161.8451(盈加)。

定日：定积＋冬至日分＝11.2701(去纪)乙亥。

定星：中星±盈缩差＝104.4651。

加时定星：中星＋冬至黄道日度＝113.4369 度。

所入月日：入四月二十五日(23.4399)。

入月经朔 47.8302(辛亥)。

加减定分：定日小余×初行率 0.18＝0.0486。

晨前夜半定星：113.3883 度。

四月乙亥夜半木星宿度：奎 9.6908 度。

晨迟末：

中积 189.4824。

中星 108.4124。

入历度 371.8934。

盈缩历 6.6359(盈初)。

盈缩差 0.7110(盈)。

定积：中积±盈缩差＝190.1934(盈加)。

定日(去纪)39.6184(癸卯)。

定星：中星±盈缩差＝108.4124＋0.7110＝109.1234。

加时定星 118.0952。

所入月日：五月二十三日(22.2576)。

入月经朔 17.3608(辛巳)。

加减定分：定日小余×初行率 0.12≒0.0742。

晨前夜半定星 118.0210 度。

五月癸卯夜半木星宿度：奎 14.3235 度。

晨留：

中积 217.4824。

中星 110.3224。



入历度 373.3434。

盈缩历 8.0859(盈初历)。

盈缩差 0.8629(盈)。

定积:中积±盈缩差=218.3453(盈加)。

定日 7.7703(辛未)。

定星:中星±盈缩差=111.1853(盈加)。

加时定星 120.1571 度。

所入月日:六月二十二日(20.8789)。

入月经朔 46.8914(庚戌)。

晨前夜半定星 120.1571 留段加时定星即夜半定星。

六月辛未夜半木星宿度:奎 16.4596 度。

晨退:

中积 241.4824。

盈缩差 0.8629:本段无差,借前段差加减之。

定积:中积±盈缩差=242.3453(盈加)。

定日 31.7703(乙未)。

所入月日:七月十六日(15.3484)。

入月经朔 16.4219(庚辰)。

晨前夜半定星 120.1571(度)。

七月乙未夜半木星宿度:奎 16.4596 度。

夕退:

中积 288.0624。

中星 105.44115。

入历度 373.67215。

盈缩历 8.41465(盈初)。

盈缩差 0.8972(盈)。

定积 288.9596(盈加)。

定日 18.3846(壬午)。

定星 106.3384 度。

加时定星 115.3102 度。

所入月日:九月初四日(2.9015)。

入月经朔 15.4831(己卯)。

加减定分:定日小余×初行率 0.16=0.0615。

晨前夜半定星 115.3717 度(退加)。

九月壬午夜半木星宿度:奎 11.6742 度。

夕留:

中积 334.6424。

中星 100.5599。

入历度 374.0009。

盈缩历 8.7434(盈初)。

盈缩差 0.9314(盈)。

定积:中积±盈缩差=335.5738(盈加)。

定日 4.9988(戊辰)。

定星:中星±盈缩差=101.4913 度。

加时定星 110.4631 度。

所入月日:十月二十日(19.9851)。

入月经朔 45.0137(己酉)。

夜半定星 110.4631 度,留段即用加时定星。

十月戊辰夜半木星宿度:奎 6.7656 度。

夕迟初:

中积 358.6424。

盈缩差 0.9314,本段无差,借前段差加减之。

定积 359.5738,加盈差 0.9314。

定日 28.9988(壬辰)。

所入月日:十一月十五日(14.4545)。

入月经朔 14.5443(戊寅)。

夜半定星 110.4631 度。

十一月壬辰夜半木星宿度:壁 6.7656 度。

夕迟末:

中积 386.6424。

中星 102.4699。

入历度 375.4509。

盈缩历 10.1934(盈初)。

盈缩差 1.0814(盈加)。

定积:387.7238-岁周=22.4813。

定日 57.1488(辛酉)。



定星 103.5513。
加时定星:定星+本年冬至黄道日度=112.5092。
所入月日:十二月十四日(13.0738)。
入月经朔 44.0750(戊申)。
加减定分:定日小余×初行率 0.12=0.01786。
夜半定星 112.4913 度(顺减)。
十二月辛酉夜半木星宿度:奎 8.7938 度。
夕疾初:
中积 414.6424。
中星 106.7799。
入历度 378.7309。
盈缩历 13.4734(盈初)。
盈缩差 1.4154(盈)。
定积 50.8153。
定日 25.4828(己丑)。
定星 108.1953 度。
加时定星 117.1532 度。
所入月日:正月十三日(11.8772)。
入月经朔 13.6056(丁丑)。
加减定分:定日小余×初行率 0.18=0.0869。
夜半定星 117.0663 度(顺减)。
正月己丑夜半木星宿度:奎 13.3688 度。
夕疾末:
中积 442.6424。
中星 112.2899。
入历度 382.9209。
盈缩历 17.6634(盈初)。
盈缩差 1.8309(盈)。
定积 79.2308(盈加)。
定日 53.8983(丁巳)。
定星 114.1208。
加时定星 123.0787。
所入月日:二月十一日(10.7621)。

入月经朔 43.1362(丁未)。
加减定分:定日小余×初行率 0.21=0.1886。
夜半定星 122.8901(顺减)。
二月丁巳夜半木星宿度:娄 1.3226 度。
夕伏:
中积 470.6424。
中星 118.3999。
入历度 387.5609。
盈缩历 22.3034(盈初)。
盈缩差 2.2753(盈)。
定积 107.6752。
定日 22.3427(丙戌)。
定星 120.6752。
加时定星 129.6331 度。
所入月日:三月十一日(9.6759)。
入月经朔 12.6668(丙子)。
加减定分:定日小余×初行率 0.22=0.0754。
夜半定星 129.5577 度。
三月丙戌夜半木星宿度:娄 7.9902 度。
合伏:
中积 487.5024。
中星 122.2599。
入历度 390.4909。
盈缩历 25.2334(盈初)。
盈缩差 2.5468。
定积 124.8067(盈加)。
定日 39.4742(癸卯)。
定星 124.8067。
加时定星 133.7646。
所入月日:四月二十八日(26.8074)。
入月经朔 12.6668(丙子)。
加减定分:定日小余×初行率 0.23=0.1091。
夜半定星 133.6555 度(顺减)。



四月癸卯夜半木星宿度：娄 12.0880 度。

各动态段的定星即该段初日木星所在黄道位置距冬至点的角距。经过加减定分改正（顺减退加）就得到该段初日子夜的黄道位置。黄经自春分点自西向东量度。冬至点的黄经为 270°，将授时历计算得到的木星每段初日夜半的黄道位置化为 360°制，内减 90°，即授时历推算所得木星黄经。将它们与用现代方法计算得出的木星黄经比较，就可看出授时历推步的精确度。

结果如表 10－31 所示。

表 10—31 授时历计算元大德三年至四年木星位置的精度

段 目	初 日	干支	木星实黄经(°)	授时推步(°)	相差(°)
合伏	1299.3.12	辛酉	356.2	356.4	－0.2
晨疾初	1299.3.29	戊寅	0.3	0.5	－0.2
晨疾末	1299.4.26	丙午	6.7	6.9	－0.2
晨迟初	1299.5.24	乙亥	12.3	12.9	－0.6
晨迟末	1299.6.22	癸卯	16.8	17.5	－0.7
晨留	1299.7.20	辛未	19.1	19.6	－0.5
晨退	1299.8.13	乙未	19.2	19.6	－0.4
夕退	1299.9.29	壬午	14.6	14.9	－0.3
夕留	1299.11.14	戊辰	9.8	10.0	－0.2
夕迟初	1299.12.8	壬辰	9.6	10.0	－0.4
夕迟末	1300.1.6	辛酉	12.0	12.0	0.0
夕疾初	1300.2.3	己丑	16.3	16.6	－0.3
夕疾末	1300.3.2	丁巳	22.0	22.3	－0.3
夕伏	1300.3.31	丙戌	28.7	28.9	－0.2
合伏	1300.4.17	癸卯	32.7	32.9	－0.2

授时历推步与用现代方法计算得出的黄经如此密合，最大相差仅为 0°.7，各段动态亦与天相合。下面我们将要看出，由于授时历冬至点和合伏与天稍有偏失，实际上黄经误差要大些。

大德情况如此，那么到了明朝末年，授时历已行用了 300 余年，计算的木星位置和各段动态，情况又是怎样呢？为此，我们又计算了万历二十七年、二十八年（1599、1600）的木星历（表 10－32）。邢云路《古今律历考》书中，也用授时历推算了万历二十七年、二十八年的木星的运动。他在木星的晨留、晨退、夕退、夕留等段选用的入历度与我们稍有不同。在其他几段，有时推算也略有差异。因而得出的夜半定星有时会出现 0°.1 的差别。表 10－33 列出授时历推步和用现代方法计算结果的比较。表中《古》表示《古今律历考》推步所得值。

表 10—32　万历二十七年

	合伏	晨疾初	晨疾末
中积	207.9678	224.8278	252.8278
中星	207.9678	211.8278	217.9378
入历度	110.4662	113.3962	118.0362
盈末历	72.1626 盈末	69.2326 盈末	64.5926 盈末
盈缩差	5.6274	5.5191	5.3215
定积	213.5952	230.3469	258.1493
定日	15.6748	32.4265	0.2289
定星	213.5952	217.3469	223.2593
加时定星	218.2355	221.9872	227.8996
所入月日	六月二日	六月十九日	七月十七日
入月经朔	14.9220	14.9220	44.4526
入月日数	0.7528	17.5045	15.7763
加减定分	−0.1552	−0.0938	−0.0481
夜半定星	218.0803	221.8934	227.8515
木星宿度	井 30.4328	柳 1.1059	柳 7.064
	己亥距元 318 年	中积	
	庚子距元 319 年	中积	

	夕退	夕留	夕迟初	夕迟末
中积	407.4078	453.9878	477.9878	505.9878
中星	224.7866	219.9053		221.8153
入历度	127.2850	127.6137		129.0637
盈末历	55.344 盈末	55.015 盈末		53.565 盈末
盈缩差	4.8371	4.8178		4.7308
定积	47.0027	93.5634	117.5634	145.4764
定日	34.3245	20.8852	44.8852	12.7982
定星	229.6237	224.7231		226.5461
加时定星	234.2496	229.3490		321.1720
所入月日	十二月廿三日	二月十日	三月五日	四月三日
入月经朔	12.1056	11.1668	40.6974	10.2280
入月日数	22.2189	9.7184	4.1878	2.5702
加减定分	+0.0519			−0.0958
夜半定星	234.3015	229.3490		231.0762
木星宿度	星 0.514	柳 8.5615		柳 10.289
	闰余 23.4023		天正经朔 18.6773	
	闰余 4.7468		天正经朔 42.5750	



己亥(1599)木星历(授时)

晨迟初	晨迟末	晨留	晨退
280.8278	308.8278	336.8278	360.8278
223.4478	227.7578	229.6678	
122.2262	125.5062	126.9562	
60.403 盈末	57.123 盈末	55.673 盈末	
5.1166	4.9393	4.8563	
285.9444	313.7671	341.6841	0.4419
28.0240	55.8467	23.7637	47.7637
228.5644	232.6971	234.5241	
233.2047	237.3374	239.1644	
八月十六日	九月十三日	十月十一日	十一月六日
13.9832	43.5138	13.0444	42.5750
14.0408	12.3328	10.7193	5.1887
−0.0043	−0.1016		
233.1984	237.2358	239.1644	
柳 12.411	星 3.4483	星 5.3769	

116147.0196 岁前	天正冬至　42.0796
116512.2618 岁前	天正冬至 47.3218

夕疾初	夕疾末	夕伏	合伏
533.9878	561.9878	589.9878	606.8478
226.1253	231.6353	237.7453	241.6053
132.3437	136.5337	141.1737	144.1037
50.285 盈末	46.095 盈末	41.455 盈末	38.525 盈末
4.5243	4.2413	3.9039	3.6786
173.2699	200.9869	228.6495	245.2842
40.5917	8.3087	35.9713	52.6060
230.6496	235.8766	241.6492	245.2839
235.2755	240.5025	246.2751	249.9098
五月二日	五月三十日	六月廿七日	七月十五日
39.7586	39.7586	9.2892	38.8197
0.8331	28.5501	26.6821	13.7863
−0.1065	−0.0648	−0.2137	−0.1394
235.1690	240.4377	246.0614	249.7704
星 1.3815	张 0.3402	张 5.9639	张 9.6729
冬至日度箕 5.0392(赤)箕 4.6403(黄)			
冬至日度箕 5.0236(赤)箕 4.6259(黄)			

表 10—33 授时历推算万历二十七年木星历与木星实位置的比较

段目	初日	干支	夜半实(°)	木星 授时(°)	黄经《古》 (°)	相差(°)
合伏	1599.7.23	己卯	120.8	120.4	120.4	0.4
晨疾初	8.9	丙申	124.5	124.1	124.1	0.4
晨疾末	9.6	甲子	130.4	130.0	129.9	0.5
晨迟初	10.4	壬辰	135.7	135.3	135.3	0.4
晨迟末	10.31	己未	139.5	139.2	139.2	0.3
晨留	11.28	丁亥	141.6	141.1	141.0	0.5
晨退	12.22	辛亥	141.4	141.1	141.0	0.4
夕退	1600.2.7	戊戌	136.8	136.4	136.4	0.4
夕留	3.24	甲申	132.1	131.5	131.6	0.6
夕迟初	4.17	戊申	131.9	131.5	131.6	0.4
夕迟末	5.15	丙子	133.8	133.2	133.2	0.6
夕疾初	6.12	甲辰	137.6	137.2	137.3	0.4
夕疾末	7.10	壬申	142.6	142.4	142.4	0.2
夕伏	8.6	己亥	148.2	148.0	148.0	0.2
合伏	8.23	丙辰	151.8	151.6	151.6	0.2

计算显示，授时历推步明末万历己亥、庚子(1599、1600)木星位置，误差比元初大了。但最大误差仍仅 0°.6(《古今律历考》计算最大误差亦 0°.5)，不足 1°，应该说，也还是比较精密的。

《明史·历志》记载，崇祯八年(1635)李天经推八月二十七日(10 月 7 日)寅正二刻，木、火、月三曜同在张 6 度，而大统推木在张 4 度、火、月张 3 度。至期果同在张 6 度。我们用前面介绍的推步方法，采用大统历数据(去周岁消长)来计算验证崇祯八年是时的木星位置。计算的中间过程和结果列于表 10－34 中。八月二十七日寅正二刻处于晨疾末段 17.7130 日。晨疾末段初日八月初九丙戌(9 月 19 日)晨前夜半定星 240.9 度，木星舍张宿 0.8 度。由本段初日行分及日差，可得每日行度分秒。则 18 日共行 3.5270 度，19 日共行 3.7132 度。即八月廿七日(10 月 7 日)晨前夜半木星舍张宿 4.327 度，寅正二刻木星宿度为张 4.365 度。确如明史所书，“大统推木在张四度”。



表 10－34　崇祯八年(1635)木星历(大统)

	合伏	晨疾初	晨疾末	晨迟初	晨迟末	晨留
中积	222.1824	239.0424	267.0424	295.0424	323.0424	351.0424
中星	222.1824	226.0424	232.1524	237.6624	241.9724	243.8824
入历度	124.7306	127.6606	132.3006	136.4906	139.7706	141.2206
盈末历	57.8982	54.9682	50.3282	46.1382	42.8582	41.4082
盈缩差	4.9825	4.8150	4.5271	4.2443	4.0085	3.9004
定积	227.1649	243.8574	271.5695	299.2867	327.0509	354.9428
定日	38.0699	54.7624	22.4745	50.1917	17.9559	45.8478
定星	227.1649	230.8574	236.6795	241.9067	245.9809	247.7828
加时定星	231.4834	235.1759	240.9980	246.2252	250.2994	252.1013
加减定分	－0.0161	－0.1677	－0.0996	－0.0345	－0.1147	
夜半定星	231.4673	235.0082	240.8984	246.1907	250.1847	252.1013
初日夜半	8月6日壬寅	8月22日戊午	9月19日丙戌	10月17日甲寅	11月13日辛巳	12月11日己酉
木星宿度	柳 10.6798	星 1.2207	张 0.8009	张 6.0932	张 10.0872	张 12.0038
度率	3.5409	5.8902	5.2923	3.9940	1.9166	
日率	16.6925	27.7121	27.7172	27.7642	27.8919	
平行分秒	0.21210	0.21255	0.19094	0.14385	0.06870	
泛差		0.0212	0.0686	0.1222		
增减差		0.00424	0.01372	0.02444		
总差		0.00848	0.02744	0.04888		
日差		0.00032	0.00103	0.00183		
初日行分		0.2168	0.2047	0.1683		
末日行分		0.2083	0.1772	0.1194		
大统黄经	133°.9	137°.4	143°.2	148°.4	152°.3	154°.2
实黄经	134°.5	138°.0	143°.9	149°.1	152°.9	155°.0
相差	0°.6	0°.6	0°.7	0°.7	0°.6	0°.8
	距元 354	天正冬至	50.9050	闰应 1.5833	天正经朔	49.3218
	前合 176.6976	后合 222.1824	冬至日度	箕 4.6900(赤)	箕 4.3185(黄)	

八月二十七日寅正二刻的木星宿度也可这样得出：晨疾末段初日丙戌(22.4745)加时定星240.998度，木星舍张0.9005度。八月二十七日寅正二刻处于晨疾末17.713日。17日共行3.3398度，18日共行3.5270度。17.713日共行3.473度。故是时木星宿度为张4.37度。

晨疾末段初日定星236.68度，即其时木星距冬至点的角距。经过加减定分0.1度的改正(顺减)，得到初日丙戌夜半木星距冬至的角距，化为360°制，减去90°，得到143°.17，为段初夜半木星黄经。与现代方法计算所得木星黄经143°.9，相差0°.7。根据大统历推步，初日夜半至八月二十七日寅正二刻相距18.187日，木星共行3.56度(3°.51)，得木星黄经146°.68，与现代计算木星黄经147°.4的结果(表10—30)，也仅相差0°.7。但《明史》说，李天经用西法推，木、火、月同在张6度，大统推木在张4度，相差2度，至期，木、火、月果同在张6度。这是怎么回事呢?

《明史》说的张6度、张4度，是黄道距度，不是现代天文上说的黄经。古历所说的黄道距度，是指通过所测两天体的赤经圈与黄道相交两点间的弧长。它与自黄极过所测两天体的黄经圈与黄道相交二点的黄经差是不同的。过张宿一(张宿距星)作赤经圈，它与黄道的交点，在黄道上距春分点的弧长，称张宿一的黄道距度。过张宿一作黄经圈，它与黄道的交点(黄经圈与黄道交角为正交)，距春分点的弧长，叫张宿一的黄经(自春分点向东计量)。它也等于过张宿一与过春分点的两个黄经圈之间在黄极的夹角。在明末时期，张宿一的黄经λ为150°.82，而张宿一的黄道距度λ'为141°.27，两者相差9°.55($\lambda-\lambda'$)。6度化为360°制为5°.91，4度为3°.94。所以张4度、张6度的黄道距度分别为145°.21和147°.18。

正好处在黄道上的天体，它的黄道距度λ'与黄经λ相同。五星中，木星的轨道倾角最小，仅为1°，基本上它在黄道内外1°内运动。它的黄经与黄道距度极为接近。所以根据木星的黄经可以判断木星所舍的黄道距度。

现代方法计算得出崇祯八年八月二十七日(1635年10月7日)寅正二刻木星、火星、月亮同位于黄经147°.2左右(表10—30)。张6度的黄道距度为147°.18。可知其时木、火、月三曜确皆位于张6度初。据此，以及崇祯七年闰八月末的木犯积尸气；表10—30显示的九月初四昏初的火土同度；九月初七卯正金土同度；九月十一日昏初金火同度等等。西洋新法推算的五星位置皆与天相合，是精确的。

张4度与张6度相差2度，实际上大统历推步是时木在张4.4度，而西洋新法计算，测验木在张6.0度，相差约1.6度。而前面介绍元大德三年至四年，明万历二十七年到二十八年木星授时、大统算例时说，元明推算的木星位置比较合天，至明末误差也仅约半度。这是由于我们将授时历、大统历计算得出的夜半定星化为



黄经时，简单地假定授时历、大统历推步依据的春分点(冬至点)，以及合伏定星都是合天的，在这个前提下，得到的结果。实际上，授时历、大统历冬至点的位置计算不太准确，约有 0°.3～0°.5 的误差。即真正的冬至点应在它们给出的西面约0°.3～0°.5之处。这使得出的黄经另外增加有约半度之差。但更重要的是合伏时太阳位置的误差。

合伏指太阳和木星处在同一黄经的位置和时间。授时历步五星以冬至点为基准点。根据所求年得出的平合日期、入历度，计算盈缩差改正，得到木星合伏的定积、定日、定星。定积是木星合伏时与其前冬至时刻间的日数，定星乃合伏时木星的黄道距度位置与冬至点之间的角距。合伏时日星同经，是时太阳的黄道距度是据日平行 1 度，由定积得出的。冬至的干支时刻加上定积就得出合伏时的日期、干支和时刻。这就是定日。授时历特别是大统历，就取如此得出的太阳位置作为合伏时的木星位置。并以此为出发点，计算这一会合运动中任一段任一时刻的木星位置的。太阳运动有盈缩，并不严格按日行 1 度做平行运动。因此得出的合伏定星有误差。

合伏定星的误差包含两个方面。其一是由定积确定的合伏时间太阳并不正好在合伏定星的位置；其二，这时的太阳和行星黄经并不相同。就是说，是时实际上日星并未相合，并不是真正的合伏时刻。因此，根据合伏定星为基础推出的各动态段五星位置就难免有误差了。在我们计算的元大德三年(1299)、明万历二十七年(1599)、崇祯八年(1635)三组木星历中，真实太阳与合伏定星间约有 1°、合伏时刻约有 2 日左右的误差。

李天经用西洋新法推崇祯八年八月二十七日寅正二刻木星在张 6 度(初，黄道距度为 147°.2)，与天象合。大统推木在张 4 度，其黄道距度就应该在 145°.2～146°.2 之间才对。

大统推是年 8 月 6 日壬寅日七刻(38.0699)木星合伏，日木同经，在冬至点东 227.1649 度(定星)处。化为 360°制，即日星位在冬至点以东 223°.895，也就是黄经 133°.895 处。大统历就以这点为基础，推步得出每段每日的木星位置。但事实上，是年六月二十四日(1635 年 8 月 6 日)壬寅日七刻太阳实黄经为 132°.87。比大统历推得值小 1°.025。就是说，大统历计算所得木星位置，要化为 360°制，以黄经(对木星即黄道距度)来表示的话，除减 90°，将冬至改为春分点计算外，还都应再减去 1°.025。

大统历推得在晨疾末段初日，定星为 236.6795 度。经过加减定分(顺减)的改正，晨疾末段初日夜半木星位于冬至点以东 236.58 度。八月二十七日寅正二刻距初日夜半 18.19 日，这期间木星又向东走了 3.56 度。与 236.58 相加为 240.14 度。化为 360°制得236°.686。前面说过要以黄经表示需减去 90°(自春分点计量)、再减去

1°.025，得是时木星黄经为 145°.66。前已得出，大统推八月二十七日寅正二刻木星在张 4.4 度。张初度为141°.27，张 4.4 度(4°.34)为 145°.6。与西洋所得张 6 度 147°.2，确有 1°.6 之差。

至此，我们详细介绍了授时历、大统历推步木星的过程、方法，并讨论了计算的精度。在不考虑合伏定星误差情况下，授时历、大统历推得换算的木星位置元明两代与实黄经误差仅约半度，非常巧合。由太阳盈缩引起的合伏定星误差约为 1°。考虑了这点以及冬至点误差，可得出元明两代计算木星的精度约为 1°～2°。应该说还是比较准确的。

推步火、土、金、水四星的方法步骤与木星大致类似。为节省篇幅，不一一做实例计算了。邢云路《古今律历考》卷五十一至卷五十五，用授时历方法计算了万历二十七年(1599)的五星动态和位置，读者可以参看。为了给出授时历推步五星精确度的定量概念，我们用现代方法，计算了这一年的日月五星位置，并与之做了比较，结果分别列于表 10—35 至表 10—38 中。在将授时历计算结果换算成黄经值时，也做了简化处理，没有考虑因太阳盈缩引起的合伏定星约 1°的误差。

表 10—35　万历己亥(1599)火星历(授时)精度

段目	初日	干支	火星 实黄经(°)	黄经 授时历(°)	相差(°)
合伏	1598.12.14	戊戌	260.2	262.1	－1.9
晨疾初	1599.3.8	壬戌	325.1	326.3	－1.2
晨疾末	5.27	壬午	26.8	28.3	－1.5
晨次疾初	7.25	辛巳	68.8	68.7	0.1
晨次疾末	9.11	己巳	99.5	97.6	1.9
晨迟初	10.22	庚戌	121.7	118.4	3.3
晨迟末	11.26	乙酉	135.1	131.6	3.5
晨留	12.23	壬子	138.4	135.9	2.5
晨退	12.31	庚申	137.7	136.1	1.6
夕退	1600.1.27	丁亥	129.6	125.8	3.8
夕留	2.23	甲寅	120.6	115.4	5.2
夕迟初	1600.3.2	壬戌	119.4	115.4	4.0
夕迟末	3.29	己丑	121.1	119.3	1.8
夕次疾初	5.3	甲子	132.5	132.1	0.4



续表

段目	初日	干支	火星	黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)	
夕次疾末	6.11	癸卯	151.3	151.3	0.0
夕疾初	7.25	丁亥	176.6	176.2	0.4
夕疾末	9.14	戊寅	209.5	208.8	0.7
夕伏	11.14	己卯	253.0	251.7	1.3

表 10—36　万历己亥(1599)金星历(授时)精度

段目	初日	干支	金星	黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)	
合伏	1599.2.23	己酉	331.4	333.7	−2.3
夕疾初	4.3	戊子	19.9	22.5	−2.6
夕疾末	5.24	己卯	82.6	84.5	−1.9
夕次疾初	7.10	丙寅	139.3	140.1	−0.8
夕次疾末	8.20	丁未	187.4	188.9	−1.5
夕迟初	9.29	丁亥	231.5	232.7	−1.2
夕迟末	1599.11.2	辛酉	262.4	261.5	0.9
夕留	11.18	丁丑	271.1	265.7	5.4
夕退	11.23	壬午	272.3	265.7	6.6
夕退伏	12.4	癸巳	271.6	262.9	8.7
合退伏	12.10	己亥	269.2	258.9	10.3
晨退	12.16	乙巳	265.9	254.6	11.3
晨留	12.27	丙辰	259.8	251.1	8.7
晨迟初	1600.1.1	辛酉	258.0	251.1	6.9
晨迟末	1.17	丁丑	259.2	254.6	4.6
晨次疾初	2.20	辛亥	283.9	282.7	1.2
晨次疾末	3.31	辛卯	326.3	326.3	0.0
晨疾初	5.12	癸酉	14.9	15.9	−1.0
晨疾末	6.29	辛酉	72.2	73.5	−1.3
晨伏	8.18	辛亥	133.3	141.1	−7.8

表 10—37 万历己亥(1599)土星历(授时)精度

段目	初日	干支	土星	黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)	
合伏	1599.10.13	辛丑	199.2	200.8	−1.6
晨疾	11.2	辛酉	201.6	203.0	−1.4
晨次疾	12.3	壬辰	205.0	206.2	−1.2
晨迟	1600.1.1	辛酉	207.4	208.8	−1.4
晨留	1.27	丁亥	208.4	210.3	−1.9
晨退	2.26	丁巳	208.2	210.3	−2.1
夕退	4.18	己酉	205.0	206.1	−1.1
夕留	6.10	壬寅	202.0	203.1	−1.1
夕迟	7.10	壬申	202.0	203.1	−1.1
夕次疾	8.5	戊戌	203.2	204.5	−1.3
夕疾	9.3	丁卯	205.5	207.1	−1.6
夕伏	10.3	丁酉	208.7	209.9	−1.2

表 10—38 万历己亥(1599)水星历(授时)精度

段目	初日	干支	水星	黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)	
合伏	1598.12.27	辛亥	267.1	272.1	−5.0
夕疾	1599.1.13	戊辰	294.6	303.9	−9.3
夕迟	1.28	癸未	320.5	324.7	−4.2
夕留	2.9	乙未	337.6	334.5	3.1
夕退伏	2.22	戊申	336.4	327.2	9.2
晨留	3.5	己未	326.8	319.7	7.1
晨迟	3.7	辛酉	326.1	319.7	6.4
晨疾	3.19	癸酉	330.2	328.5	1.7
晨伏	4.3	戊子	347.0	349.5	−2.5

计算显示，授时历推步土星位置误差约为 1°～2°，也比较好。火星精度要比木、土为低，起伏较大，有±3°左右，最大绝对误差可达 5°～6°。水星、金星精度最



低，起伏较大，绝对误差可达 10°以上。起伏这么大，这和水星轨道倾角较大(7°)，黄经与黄道距度差异稍大也可能有点关系。金、水二星是内行星，附日而行。金星轨道几近圆形，不易测准它的近日点和计算它们的中心差等因素可能是造成误差较大的原因。

现代计算得出，授时历推得的万历己亥(1599)火星合伏时间与实际日星相合天象相差 5.6 日；土星相差 0.6 日；金星失天 8.0 日；水星相差 12.6 日。前面已给出木星相差约 1.5 日。

大统历不用授时历消长之法。我们用授时历“周岁消长，百年各一”方法，推步崇祯八年木星历。天正冬至黄道日度比大统约小 0.2 度，即授时冬至点在大统历西约 0.2 度处。木星各段初日定星比大统约大 0.11 度，夜半定星和木星宿度约少 0.09 度，差别主要是由天正冬至黄赤道日度差引起的。

第十节　弧矢割圆术与步中星

一、句股测望和弧矢割圆术

《明史・历志・大统历法・法原・句股测望》说：

北京立四丈表，冬至日午正测得景长 798.5 寸。随以简仪测到太阳南至地平 26.465 度，为半弧背 s。求得矢度 v5.915 度。北京去戴日下之度为周天半径 r60.875度内减矢 5.915，得 54.96 度，为股 q。弦为 r。用句股算术求得句 26.1756 度，为日出地半弧弦。

北京立四丈表，夏至日午正测得景长 117.1 寸。再以简仪测到太阳南至地平 74.265 度，为半弧背。用割圆求矢术，求得矢度 43.7425 度，周天半径内减矢度，余 17.1325 度为句，乃本地去戴日下之度。以句弦別股术，求得股 58.455 度，为日出地半弧弦。

以二至日度相加得 100.73 度，折半得 50.365 度，为北京赤道出地度。所以北京北极出地度为周天象限内减赤道出地度(91.314375－50.365)，余 40.949375 度。即北京地理纬度。

以上参见法原二至出入差图。

弧矢割圆术：

周天径 121.7525 度(用 121.75)，半径 60.875 度。又为黄赤道大弦。二至黄赤道内外半弧背 24 度(所测就整)。因周天度 365.2575 度，用圆周率 π=3 除之得周天直径 d121.7525 度，半径 r60.875 度。

根据沈括会圆术：

半弧背 s＝半弧弦 p＋二至黄赤道弧矢 v/d

由句股算术有：

$$d=v+p^2/v$$

两式中消去 p，得：

$$v^4+(d^2-2sd)v^2-d^3v+s^2d^2=0$$

用贾宪增乘开方法解之，求得矢度 v 的一个正根为（式中 s 即二至黄赤道内外半弧背 24 度）：

$$v=4.8482\text{ 度}$$

$$\text{黄赤道大股 } q=r-v=56.0268\text{ 度}$$

$$\text{黄赤道大句(半弧弦)} p=\sqrt{dv-v^2}=23.8070\text{ 度}$$

由半弧背 s，用 $v^4+(d^2-2sd)v^2-d^3v+s^2d^2=0$，求弧矢 v 的方法，称割圆求矢术。

大统历法法原中给出的割圆求矢术，即上述方程的具体解法。

二、布黄赤道相求弧矢诸率立成法

授时历创建弧矢割圆术。由此可推算黄赤道积度、黄赤道差、黄赤道内外度、去极度、日出入、昼夜时刻等。授时历经给出有“黄赤道率”、“黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分”二立成。大统历志法原载有“黄赤道相求弧矢诸率立成”、“黄道每度去赤道内外及去北极立成”及“黄道每度昼夜刻立成”、“冬夏二至后晨昏分立成（所载乃南京应天府晷刻）”等立成表。本节介绍在黄赤道相求各立成中有关弧矢诸率的推步方法。

1. 黄道各度下求赤道积度

黄赤道小弦＝周天半径 r－黄道矢度。各度下黄道矢度由前述割圆求矢术（即解割圆求矢方程）得出。周天半径 $r=60.875$ 度。

黄赤道小股＝黄赤道小弦×（r－二至黄赤道弧矢 v）/黄赤道大弦 r。其中二至黄赤道弧矢 $v=4.8482$ 度。$r-v=56.0268$ 度，即黄赤道大股 q。

黄道半背弦差＝黄道矢度^2/周天全径 d。周天全径 $d=121.75$ 度。

黄道半弧弦＝黄道积度（即黄道半弧背、弧长）－黄道半背弦差。

黄道积度已知。

赤道小弦＝[（黄道半弧弦）^{2}＋（黄赤道小股）^{2}]$^{\frac{1}{2}}$。

赤道半弧弦＝r×黄道半弧弦/赤道小弦。

赤道横大句＝r×黄赤道小股/赤道小弦。



赤道横弧矢＝r－赤道横大句。

赤道半背弦差＝赤道横弧矢$^2/d$。

赤道积度＝赤道半弧弦＋赤道半背弦差。

度率为相邻积度之差。

黄赤道差＝黄道积度－赤道积度。

由此可以得出，"黄赤道相求弧矢诸率立成"和授时历经之"黄赤道率"表。后者称"黄道矢度"为"积差"。相邻"黄道矢度"之差，前者称"黄道矢差"，后者叫"差率"。

2. 推黄道各度，距赤道内外及去极远近术

赤道二弦差＝r－赤道小弦。赤道二弦差又称黄赤道小弧矢、内外矢、股弦差。

黄赤道小弦＝r－黄道矢度。黄赤道小弧弦＝二至黄赤道内外半弧弦(23.71度)×黄赤道小弦/黄赤道大弦(r)。即黄赤道内外半弧弦，又为黄赤道小句。

半背弦差＝[黄赤道小弧矢(赤道二弦差)]$^2/d$。

黄赤道内外度＝黄赤道小弧弦＋半背弦差。黄赤道小弧半背，即黄赤道内外度。

太阳去北极度分＝象限度 91.314375±黄赤道内外度。盈初缩末限为加，缩初盈末限为减(夏至前后)。

这样就可以布"黄道每度去赤道内外及去北极度立成"。

三、里差刻漏和求黄道每度昼夜刻

推算日出入和昼夜时刻是中历步晷漏中星术的主要内容。授时历创用弧矢割圆法对推步日出入时刻也有很大发展。

1. 求二至差股及出入差

由北京北极出地 40.95 度，根据割圆弧矢法，可求得出地半弧弦为 39.26 度，为大三斜中股。实测得到二至黄赤道内外度 23.90 度为弧 s(割圆弧矢术中称半弧背)。以前述方法可推得内外半弧弦 23.71 度，又为黄赤道大句，又为小三斜弦。参见"二至出入差图"(图见《明史・历志》)。

以内外半弧弦为句，半径 r 为弦。依句股算法，得股 56.068。以股转减半径 r，余 4.81 度为二至出入矢，即黄赤道内外矢。

夏至，日南到地平 74.265 度为半弧背(弧长 s)。依前法，求得日下至地半弧弦58.45度。由相似句股形关系，大三斜中股(北京北极出地半弧弦)39.26×二至内外半弧弦23.71，以半径 60.875(大三斜中弦)为法除之，得 15.29 度，(为小三斜中股，又为小股。置小股 15.29 度)去减日下至地半弧弦 58.45 度，余43.16度为大股。以出入矢 4.81 度，

去减半径 60.875 度，余56.065，为大股弦。

由相似句股形关系，可得出：二至出入差半弧弦＝大股弦 56.065×小股 15.29/大股 43.16＝19.87 度，为小弦。

根据会圆术、句股法，已知二至出入差半弧弦 p，可求出二至出入差半弧背 19.9614度。以二至黄赤道内外半弧弦 23.71 度除之，得 84.19 分(0.8419 度)为度差分。

2. 求黄道每度昼夜刻

每度出入差半弧背＝所求度黄赤道内外半弧弦×二至出入差半弧背 19.9614 度/二至黄赤道内外半弧弦 23.71 度＝黄赤道内外半弧弦×度差 0.8419 度。

日行百刻度＝2×(r60.875 度－黄赤道内外矢)×3＋1 度＝3×(d121.75 度－2×黄赤道内外矢)＋1 度。黄赤道内外矢，即赤道二弦差。

出入差刻＝所求度出入半弧背×100 刻/日行百刻度。

半昼刻＝25 刻±出入差刻。黄道在赤道内(太阳赤纬为正)用加号，在赤道外(太阳赤纬 δ 为负)用减号。

昼刻＝2×半昼刻。

夜刻＝100 刻－昼刻。

3. 黄赤道差、太阳去极、昼夜刻计算例

现计算冬至后黄道积度 40 度(括号内数值为 44 度)的赤道积度、黄赤道差、太阳去极度及昼刻夜刻。先根据前述的割圆求矢术，已知黄道积度 s40 度(44 度)，求黄道矢度 v，解方程式

$$v^4+(d^2-2sd)v^2-d^3v+s^2d^2=0$$

式中 d＝121.75 度。得出黄道积度 s40 度(44 度)的黄道矢度 v＝13.6889 度(黄道积度 s44 度的黄道矢度 v＝16.5682 度)。$r=d/2$。

黄赤道小弦＝r－黄道矢度＝47.1861(44.3068)度。

黄赤道小股＝黄赤道小弦×(r－二至黄赤道弧矢 4.8482)/黄赤道大弦 r＝43.4281(40.7782)度。

黄道半背弦差＝黄道矢度^2/周天全径 d＝1.5391(2.2546)度。

黄道半弧弦＝黄道积度－黄道半背弦差＝38.4609(41.7454)度。

赤道小弦＝[(黄道半弧弦)^2＋(黄赤道小股)^2]$^{\frac{1}{2}}$＝58.0107(58.3569)度。

赤道半弧弦＝r×黄道半弧弦/赤道小弦＝40.3599(43.5467)。

赤道横大句＝黄赤道小股×r/赤道小弦＝45.5724(42.5378)度。

赤道横弧矢＝r－赤道横大句＝15.3027(18.3373)。

赤道半背弦差＝赤道横弧矢^2/d＝1.9234(2.7618)。



赤道积度＝赤道半弧弦＋赤道半背弦差＝42.2832(46.3085)度。

度率＝相邻积度之差＝1.0126(1.0027)度。

黄赤道差＝黄道积度－赤道积度＝2.2832(2.3085)度。

赤道二弦差＝r－赤道小弦＝2.8643(2.5181)度。

黄赤道小弦＝r－黄道矢度＝47.1681(44.3068)度。

黄赤道小弧弦(内外半弧弦)＝二至黄赤道内外半弧弦23.71×黄赤道小弦/r＝18.3783(17.2569)度。

半背弦差＝赤道二弦差^2/d＝0.0674(0.0521)。

黄赤道内外度＝黄赤道小弧弦＋半背弦差＝18.4456(17.3089)度。

太阳去北极度分＝象限度 91.314375±黄赤道内外度。冬至前后(盈初缩末限)去极度＝109.7599(108.6232)。夏至前后(缩初盈末限)去极度＝72.8687(74.0054)。

出入半弧背＝黄赤道内外半弧弦(黄赤道小弧弦)×二至出入差半弧背19.9614度/二至黄道赤道内外半弧弦 23.71 度＝15.4726(14.5285)度。

日行百刻度＝2×(r－赤道二弦差)×3＋1＝349.0642(351.1414)度。

出入差刻＝出入半弧背×100/日行百刻度＝4.4326 刻(4.1375 刻)。

半昼刻＝25 刻－出入差刻＝20.5674(20.8625)刻。因为冬至后 40 度(44 度)，黄道在赤道外，太阳赤纬 δ 为负，故用减。如为夏至后 40(44)度，或夏至前 40(44)度，黄道在赤道内，太阳赤纬为正，则用加。

昼刻＝2×半昼刻＝41.1348(41.7250)刻。

夜刻＝100－昼刻＝58.8652(58.2750)刻。

四、步中星——求每日日出入辰刻

授时历步中星，给出的昼夜刻分，乃大都北京之晷漏。

大都北极出地 40 度太强。

冬至太阳去极 115.2173 度。

夏至太阳去极 67.4113 度。

冬至昼、夏至夜长 0.381592 日。

夏至昼、冬至夜长 0.618408 日。

昏明(晨昏蒙影)0.0250 日。

1. 求每日黄道出入赤道内外度、去极度

将所求日晨前夜半 0^h 黄道积度，如大于半岁周，去之。如在象限度以下，为初限；以上，复减半岁周，余数为入末限。根据初末限整数度数查“黄道出入赤道内外

去极度及半昼夜分”立成表。小数部分以其段内外差乘之，所得积，用来减表列的内外度，即得所求日、子正出入赤道内外度。太阳在赤道内者（夏至前后、缩初盈末限）减，太阳在赤道外者（冬至前后、盈初缩末历）加象限度，即得所求日太阳去极度及分秒。

2. 求每日半昼夜及日出入晨昏分

根据前面得出的所求日入初末限，按整数度查表，小数部分以昼夜差乘之，将所得结果加减其段的半昼分、半夜分，即得所求日之半昼、半夜分。表列数值前大后小者用减，前少后多者用加。

日出分＝半夜分

日入分＝日周－日出分

晨分＝日出分－昏明分

昏分＝日入分＋昏明分

3. 求昼夜刻及日出入辰刻

夜刻＝2×半夜分/100

昼刻＝100 刻－夜刻

将日出入分化为时辰初、正、刻、分，即得日出入辰刻。

4. 求更点率及更点所在辰刻

更率＝晨分×2/5

点率＝更率/5

将所求更点数，以更点率乘之，加其日昏分，化为时辰初正刻分，即得所求辰刻。

5. 求距中度及更差度

距中分＝半日周－其日晨分

距中度＝距中分×366.2575 度/日周 10000

更差度分＝2×（183.12875 度－距中度）/5

6. 求昏明五更中星

初更中星＝其日午中赤道日度＋距中度

初更中星，即昏中星所临宿次。以更差度分累加，满赤道宿次去之，为逐更及晓（旦）中星宿度及分秒。

各地所在昼夜刻分及中星诸数，皆可据各地北极出地度数（纬度）推算出来。

7. 求各地所在漏刻

在各地以仪测验或下水漏，测量定出其地冬至、夏至夜刻，与 50 刻相减，余为至差刻。即：至差刻＝50 刻－冬（夏）至夜刻。所求夜刻＝50 刻±至差刻×所求日黄道去赤



道内外度分×10/239。太阳在赤道内(赤纬为正)用减,太阳黄道在赤道外用加。昼刻=百刻-夜刻。

至于日出入辰刻以及更点等数值,皆可依上述方法得出。

五、求定差、距度、定限度

授时历称月亮的降交点为正交,升交点为中交。即白道和黄道的两个交点。白道由北向南穿过黄道名正交,由南到北曰中交。当月球轨道的升交点或降交点正好位于冬至或夏至点时,白道与赤道的交点距二分点为最大 14.66 度。若黄白交点不在二至点上,那么赤白交点距二分点小于 14.66 度。

定差=初末限×14.66 度/象限

距差=14.66 度-定差

定限度=98 度±黄赤道内外半弧背 24 度×定差/14.66

正交在冬至后为减,夏至后为加。距差表示白赤交点距黄赤交点(二分点)的角度,定差指白赤交点距二分点角度,小于极差 14.66 度的差值;初末限是月球正交点与二至点的黄道距度。初末限如等于象限数,则定差为 14.66 度而无距差;若月正交正当二至,初末限为 0,则距差为极差 14.66 度而无定差。所以距差是距二分点的度差,定差是因黄白交点距二至点引起的差。定差若满 14.66 度,由上式看出,加减差满 24 度,这时正交正当二分点,黄白赤三道交于一点。半交正当二至。若月正交点正当二至,那时定差为零,亦即没有加减差。

若月正交在春分点,那么它的定差为 14.66 度,减差为 24 度,它的定限度为 74 度。若月正交在秋分点,定差为 14.66 度,加差为 24 度,它的定限度是 122 度。这个数值是月道半交去极度数。月正交若在二至点,那时既无定差,又无加减差,它的定限度为 98 度。98 度乃象限度与赤道外 6 度有奇之和,是月道出入黄道度加入赤道去极度之数。

参考文献

[1] 朱文鑫.历法通志.上海:商务印书馆,1934.

[2] 邢云路.古今律历考.上海:商务印书馆,1936.

[3] 铃木敬信.日食与月食.东京:恒星社,1936.

[4] H. M. Nautical Almanac Office. Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris. London: Her Majesty's stationery Office,1974.

[5] 薮内清.中国的天文历法.东京:平凡社,1975.

[6] 中华书局编辑部.历代天文律历等志汇编.北京:中华书局,1976.

[7] Danjon, A.球面天文学和天体力学引论.李珩,译.北京:科学出版社,1980.

[8] 潘鼐,向英.郭守敬.上海:上海人民出版社,1980.

[9] 中国科学院自然科学史研究所.钱宝琮科学史论文选集.北京:科学出版社,1983.

[10] 苗永宽.球面天文学.北京:科学出版社,1983.

[11] 陈遵妫.中国天文学史(第三册).上海:上海人民出版社,1984.

[12] Montenbruck, O. Practical Ephemeris Calculations. New York, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.

[13] 曲安京,纪志刚,王荣彬.中国古代数理天文学探析.西安:西北大学出版社,1994.

[14] 陈久金.陈久金集.哈尔滨:黑龙江教育出版社,1993.

[15] 陈美东.古历新探.沈阳:辽宁教育出版社,1995.



总 跋

《中国天文学史大系》(以下简称《大系》)的研究和编著计划,创意于20世纪70年代末、80年代初。

早在20世纪70年代后期,在中国科学院的直接领导下,组织有一个中国天文学史整理研究小组,小组的成员分别来自北京天文台、紫金山天文台、南京大学天文系、北京天文馆和自然科学史研究所。这个小组的主要任务是编著一部《中国天文学史》。为了把天文学史的整理研究工作引向深入,小组还编辑了《中国天文学史文集》(1~3辑,科学出版社出版于1978、1981和1984年)、《科技史文集·天文学史专集》(1~4辑,上海科学技术出版社出版于1978、1980、1983和1992年)①。

1978年,《中国天文学史》书稿编著完成,交付科学出版社出版。当此之时,中国天文学史整理研究小组的同志们觉得历史上遗留下来的中国天文学史资料浩如烟海;中国天文学的历史发展也极其丰富多彩,既是整个中国文化史上一个富有特色的部分,也是世界科学史上一个极具魅力的部分。已经完成的《中国天文学史》一书虽然达到了一定的深度,在当代中国天文学史众多的出版物中是一部具有较强学术性的综合性专著。但是,总的说来,该书作者们认为,限于篇幅,也限于时间和条件,许多问题总觉得言犹未尽,全书的规模也不能与真实历史的瑰丽多姿相匹配。为此,自1979年起,人们开始思索:是否有可能编著一部与中国天文学的悠久历史和广阔内涵相适应的中国天文学史著作?商议的结果便是《大系》构想的诞生。时在1979年冬。

以后,此构想在全国天文学史界用多种方式征询意见,获得全国天文学界同行的鼓励和支持,构想日渐成熟。

1983年4月,中国天文学史整理研究小组解散,但为了部署今后的中国天文学史研究工作,中国科学院原数理学部在宣布解散该小组的同时,召开了《大系》的工作会议。会上确定了整个《大系》有16个子项目,这些子项目由7个归口单位分工负责。同时确定了以中国科学院自然科学史研究所为主编会议的召集单位。

此后,由于种种原因,主编会议虽开过多次,但核心的问题——科研经费一事

① 第4辑编成于1984年,时中国天文学史整理研究小组已经解散,只因出版社为了保持一定的连续性,编者的名字不宜改得太突然,故仍使用了该小组的落款。至于到1992年始克出版,这是由于种种复杂而可理解的原因所致,在此不赘。

却始终无法解决。因此，工作始终无法具体落实。这中间虽曾获得一笔国家自然科学基金会的资助，但数额极其有限，整个《大系》工作，仍无法启动。

时间一晃，过了7年，此时得到了两个意外的支持。其一，由于学术界老前辈、自然科学史界的泰斗之一——钱临照院士的关怀和过问，中国天文学界的老前辈王绶琯院士、叶叔华院士的鼎力支持，中国科学院数理化学局给予了经费支持，同时，该局的天文处通过天文委员会的同意也提供了部分经费。《大系》由此得到了启动的科研经费。其二，河北科学技术出版社在省新闻出版局领导的支持下，积极支持大型的、有重大科学意义的著作出版。他们知道了《大系》的编著计划后即向省新闻出版局申请了一笔专项出版基金，总数达70万元之巨。《大系》的著述计划得到了这两项强有力的支持后，遂于1990年秋，在北京召开了工作会议，重新调整的子项目为15个（原定16个子项目的负责人中已有一位英年早逝，一位患中风，无力再承担繁重的工作），组织起新的工作机构班子，于1991年经费到位后开始工作。

整个计划原定1993年完成，1995年书出齐，但由于种种复杂的原因，直到1997年7月编著工作才基本结束，这中间还包括了两项子课题的调整精减。最终完成的是一部13个子课题的《大系》。当然，作为一件科学作品而言，主持人总觉得有所缺憾，有所不满足。但是，既然主客观条件只能允许做到现在这样的程度，那么，我们也只能实事求是地来承认这个事实，并从客观现实的情况出发来评价这个事实。

第一，《大系》是迄今为止中国天文学史著作中部头最大的一部，其所涉及的深度和广度有许多都超过了以往的有关作品。例如，《中国少数民族天文学史》、《中国古代天文机构与天文教育》、《中国古代天文学词典》等，这些卷的内容过去从未有过完整而系统的研究和著述。这是《大系》的特有产品①。

第二，《大系》中其他各卷的内容或多或少，都有前贤们作过探究，但这次聘任的有关各卷主编，均系对各自的课题有过长期研究，多有心得的。在《大系》中他们都作出了最大的努力，即使如古代天文学思想、历法等这类古老的课题，也都有大量超乎前人的发现。至如星占术这一课题，自20世纪80年代以来受到著述家的诸多偏爱。但究其竟，大多为非天文学家的作品，对星占术的研究往往只限于社会学、历史学方面的考虑，而对星占术本身的来龙去脉、结构、原理往往无暇涉及。《大系》中的《中国古代星占学》则弥补了以往学术界的不足，深入到星占术本身的深层结构，剖析了星占术本身的发生、发展和结构、原理，从而为这一方面的研究向学术界提供了一个可靠的基础。又如，关于中国近现代天文学史，过去著述极少，只有以往陈展云、陈遵妫两位天文学界前辈曾作系统的著述。但陈展云先生的作

---

① "天文机构与天文教育"卷是最早交稿的（1994年），此后，我们发现在台北市出版了一部讨论天文机构，主要是中央机构的专著。但是，有关天文教育的内容仍未见有系统性的专著问世。



品是内部出版物，传世极其稀少，今已难见到。陈遵妫先生则是在其专著《中国天文学史》第四册辟有第十篇共9章17万余字来论述这一课题。陈先生是中国现代天文学发展的亲身参加者，其文多有珍贵史料。但无可讳言，其中也有若干出自回忆和传闻。待考之处，在所难免。《大系》中这一课题的主编苗永宽先生，学风极其严谨，断事行文每每必据可靠之档案文献，不可靠的传闻则必摒弃。故其总的篇幅或虽稍少于陈遵妫先生之书，但也每多可以引为参考，或补陈书所不足。至若《大系》其他各卷之长处，读者明智，自有鉴别，也勿庸我们多饶舌自夸。

第三，如同任何事物一样，《大系》自然也是一分为二的。由于种种原因，《大系》还有各种不足。首先，取消了两个子课题，这样一来，"中国天文学史导论"卷的删除，使《大系》缺少了一个总的理论框架和经验总结，并且原定的"中国天文学的起源"和"中国天文学在国外"两卷，也因故而取消，这是非常可惜的事。至于另一个子课题"中国天文文献史料学"一卷，则是属锦上添花的工作，它的被删除虽也有点可惜，但好在整个《大系》已是花团锦簇，暂缺这一项留待他日补裁也不为大害。

其次，由于本人才疏学浅，加之20世纪90年代以来又复疾病缠身，故对《大系》之学术编辑和加工的力量极其不足，于是许多卷的学术编辑加工仍只得依靠各位主编本身，致使这部由数十人参加编纂的巨著，总不免有互相抵牾各卷中疏漏差错之处也有多寡不等的存在。虽然这一切可以诿之于文责自负，但却给读者带来一些困惑和烦恼。这是作为我本人主其事者所最为不安于心的。在此我们不敢企求读者的原谅，而只是希望读者能严肃而具体地予以批评。这对我们固然是巨大的帮助，而且对整个中国天文学史的工作也是一种促进和帮助。

可以理解的是：像《大系》这样规模巨大的科研、著述工程，自始至终必须有许多单位和个人的大力支持，始克有成。虽然开列一份感谢的名单将会非常困难，但我们总觉得不见诸笔端，内心感到不安，特别有许多老同志，已退休有年，但他们的支持我们是决不能忘怀的。

为《大系》提供研究经费的单位有：中国国家自然科学基金会；中国科学院数理化学局及天文处；中国科学院天文委员会；中国科学院自然科学史研究所。

在为《大系》争取或提供科研、著述经费活动中发挥了重大作用的个人有：

钱临照、叶叔华、王绶琯、钱文藻、李满园、刘佩华、王宜、苏洪钧、汪克敏、汲培文。

《大系》是一项由多系统、多单位参加的大型科研项目。这其间必然涉及大量复杂的科研组织、管理和协调工作，没有这些复杂的工作，《大系》的开展并完成是不可能的。就这一方面而言，《大系》始终依靠着中国科学院原数理学部和改革后的数理化学局的领导。而在早期，数理化学部则是通过天文处来进行领导工作的。

这期间天文处先后有李荣竞、唐廷友、沈海璋、王宜等为《大系》做过许多工作[①]。尤其是王宜，可谓伴随《大系》立项的始终，为《大系》的组织协调和经费支持，对上下左右做了大量工作，为《大系》排除了许多我们力所不能及的障碍和困难。

20世纪90年代数理化学局的李满园、刘佩华对《大系》作了全力的支持，经过他们的努力，《大系》项目成为中国科学院的一项重点科研项目。他们二位加上王宜和陈美东组成了《大系》工作的协调委员会。

1983年以后，经数理学部委任，自然科学史研究所成为《大系》主编会议的召集单位，90年代以后，自然科学史研究所又是编委会主任的所在单位，因此，《大系》作为中国科学院的重点科研项目，自必成了自然科学史研究所历任所长和业务处长议事日程上经常要考虑、研究，并为之解决各种繁杂问题的一件大事。

对《大系》工作予以特别支持的历任所长是席泽宗、陈美东、廖克。其中前二位又是《大系》主编会议成员，他们作为主人，为《大系》出力是当然的。不过，必须指出的是，席泽宗在20世纪80年代曾作为主编会议的召集人，为《大系》工作的开展贡献了他自己的力量。陈美东为关键的90年代初的《大系》经费的获得作出了重要贡献。他还是数理化学局组织的监督《大系》经费使用的4人协调委员会成员之一。廖克则对《大系》给予了精神支持，在因各方面的原因使《大系》进度不及原计划时，他给予了理解和鼓励，使我这个项目主持人得以有勇气继续干到底。

自然科学史研究所的历任业务处处长、副处长黄炜、范楚玉、李家明、周嘉华、朱冰对《大系》给予了多方面的支持。吴晓峰也为《大系》后期的经费和上下协调工作方面作出了很多贡献。

至于其他许多有关单位的领导和个人的支持，我们在各卷的主编前言中都可以看到，我们在此也向他们一总致以深切的感谢。没有他们的支持和帮助，《大系》也是不可能完成的。

好了，书归正传，请明智的读者自己来阅读《大系》的正文，如果它能使您感到有所得，那是我们无上的荣光和欣喜；如果它使您感到有所失，那是我们最大的遗憾和不安。我们真诚地请求您给予严格的批评和指教。

《中国天文学史大系》编委会主任　薄树人

1997年7月于病榻上

---

① 上溯到1983年以前，中国天文学史整理研究小组的日常管理和领导工作，由数理学部委托北京天文台代管。因此，当时有关的北京天文台的领导，尤其是负责业务领导的副台长洪斯溢，也曾为《大系》计划的形成和宣传贡献过他们的心力。

补 记

薄树人先生的“总跋”是1997年于病榻上写成的。就在其后的两个月，他便走完了人生的最后里程，离我们远去，“总跋”竟成了一曲令人心碎的绝唱。它真实地记录了《中国天文学史大系》(以下简称《大系》)从提出设想到基本完稿的艰辛历程，也寄托了期待《大系》早日出版的殷切希望。

《大系》完全定稿的时间大约是1999年，我们这些还活着的参与者本以为可以顺利出版了，不曾想原来承诺出版《大系》的出版社因故将出版之事一拖再拖，期间，我们期待、焦虑、苦闷之情，难以言表。2006年7月，该出版社以退稿的方式中止了出版合同，这不啻是对我们的致命打击。面对困境，大家合力，起而求生，先后联系七八家出版社，可惜均无果而终。

时光流逝，2006年11月终于迎来柳暗花明的时节。中国科学院自然科学史研究所廖育群所长到昆明开会，遇到中国科学技术出版社副社长吕建华先生，细细谈及了《大系》之事，吕先生对《大系》表示了很大的兴趣，愿意尽快研究出版的事；几乎与此同时，安徽教育出版社的杨多文先生到广州出差，向广东教育出版社副社长陈兵先生介绍了《大系》之事，陈先生也表示了很大兴趣，说可以考虑出版问题。我们对两家出版社怀有同样的感激之情。吕、陈两位都是基于《大系》乃是一个重要学术领域的原创之作的认识和出版社理当出版高水平学术著作的理念而作出判断的，这是出版家所独具的眼光和胸襟。他们对学术的推崇、他们的热情，给人以清新的气息，令人欣喜。

随后的发展，可以说是中国科学技术出版社和广东教育出版社之间的君子之争，这是大家都始料未及的。从出版意愿到完成全部选题审批的程序，两家都需要时间。此外，出版《大系》需要有较大的经费投入，对此必须有所筹措，而从经济实力上看，中国科学技术出版社不占优势。应该说，从办事的节奏上看，中国科学技术出版社要稍稍快一些，这给我们留下深刻的印象。2007年2月，中国科学技术出版社吕副社长与许英副总编率先正式提出了出版《大系》的具体而可行的设想。在征求了王绶琯院士及《大系》大部分作者的意见后，主要基于方便出版具体事项操作的考虑，我们选择了在北京的中国科学技术出版社，而对广东教育出版社表达了深深的敬意。

《大系》由中国科学技术出版社出版之事，得到了国家新闻出版总署有关部门

领导的赞许，他们表示：如果书号有困难，可以向他们申请。《大系》中的《中国古代历法》、《中国古代天文学思想》与《中国古代星占学》3卷很快被选入《中国文库》第三辑。中国科学院国家天文台、中国科学院自然科学史研究所与广州市教育局还愿意继续执行当年购书的允诺。这些都是令人鼓舞的好消息。

自2007年3月开始，《大系》在中国科学技术出版社进入了紧张有序的出版作业，多年修就的善果贡献给读者的时日可待。我们需要感谢的各界贤达，除了薄先生在“总跋”中已提及者之外，自然还应包括上述诸位。

陈美东

2007年6月于北京